Prof. Lidia Angeleri
Università di Verona, 2014/15

Algebra Lineare ed Elementi di Geometria

(Programma aggiornato in data 26 novembre 2014)

0. Introduzione al linguaggio matematico

§1. Insiemi

1.1 Esempi

1.2 Come si denota un insieme

1.3 Altri esempi

1.4 Sottoinsieme, sottoinsieme proprio

1.5 Principio di doppia inclusione

1.6 Esempi

1.7 L'insieme delle parti

1.8 Esempi

1.9 Teorema: se M ha n elementi, l'insieme delle parti ne ha 2^n.

1.10 Unione, intersezione, differenza, complemento, prodotto cartesiano

1.11 Esempi

1.12 Alcune proprietà

(*vedi anche* Precorso on-line, LEZIONI: Capitolo Insiemi oppure [AF, Cap. 1])

§2. Tecniche dimostrative

2.1 Dimostrazioni e controesempi

2.2 Gli assiomi di Peano

2.3 Principio di induzione

2.4 La somma dei primi n numeri naturali

2.5 Dimostrazione del Teorema 1.9

(*vedi anche* [GS, Appendice B])

§3. Numeri complessi

3.1 Il campo $\mathbb{C}$

3.2 Numeri immaginari

3.3 Forma algebrica di un numero complesso

3.4 Coniugato e modulo

3.5 Esempio

3.6 Coordinate polari

3.7 Forma trigonometrica di un numero complesso

3.8 Prodotto di numeri complessi in forma trigonometrica

3.9 La Formula di De Moivre

3.10 Definizione: radici n-esime

3.11 Teorema sulle radici n-esime

3.12 Esempio: Divisione del cerchio

3.13 Esempio

3.14 Teorema Fondamentale dell'Algebra

(*vedi anche* [GS, Appendice A] oppure [AF, Cap. 4.6 e 4.7])

I. Matrici e sistemi lineari

§4. Matrici e loro operazioni

4.1 Esempio

4.2 Definizioni

4.3 Esempi

4.4 Somma di due matrici

4.5 Moltiplicazione di una matrice per uno scalare

4.6 Prodotto di due matrici

4.7 Altri esempi

(*vedi* [GS, Capitolo I])

§5. Sistemi lineari e matrici

5.1 Esempi

5.2 Sistemi lineari in forma matriciale

5.3 Operazioni elementari

5.4 Metodo di eliminazione di Gauss (EG)

5.5 Risoluzione di un sistema lineare

5.6 Esempio

5.7 Rango di una matrice

5.8 Matrici elementari

(*vedi* [GS, Capitolo I])

§6. Matrici inverse

6.1 Lemma e Definizione

6.2 Esempi

6.3 Proposizione (sistemi lineari equivalenti)

6.4 Proposizione

6.5 Proposizione

6.6 Teorema (esistenza dell'inversa destra)

6.7 Definizione di H-trasposta

6.8 Teorema (esistenza dell'inversa sinistra)

6.9 Corollario (matrici invertibili)

6.10 Calcolo della matrice inversa. Esempio

(*vedi* [GS, Capitolo I])

II. Spazi vettoriali

§7. Spazi vettoriali e basi

7.1 Gruppo

7.2 Campo

7.3 Spazio vettoriale

7.4 Esempi

7.5 Proposizione

7.6 Combinazioni lineari

7.7 Esempi

7.8 Insieme di generatori, base

7.9 Esempi

7.10 Spazi vettoriali finitamente generati

7.11 Esempi

§8. Dipendenza e indipendenza lineare

8.1 Definizione di indipendenza lineare

8.2 Osservazione: base = insieme di generatori linearmente indipendente

8.3 Esempi

8.4 Caratterizzazione di dipendenza lineare

8.5 Esempi

8.6 Proposizione

8.7 Caratterizzazioni di una base

8.8 Proposizione

(*vedi* [GS, Capitolo II])

§9 . Dimensione di uno spazio vettoriale

9.1 Esistenza della base.

9.2 Teorema di Steinitz

9.3 Corollario

9.4 Dimensione.

9.5 Esempi

9.6 Teorema: completamento della base

9.7 Proprietá di uno spazio vettoriale di dimensione n

9.8 Esempi

(*vedi* [GS, Capitolo II])

§10. Sottospazi di uno spazio vettoriale

10.1 Definizione di sottospazio

10.2 Esempi

10.3 Un sottospazio di V coincide con V se e solo se ha la stessa dimensione.

10.4 L'intersezione di due sottospazi

10.5 Esempio (unione di sottospazi)

10.6 La somma di due sottospazi

10.7 Formula di Grassmann

10.8 Somma diretta di due sottospazi

10.9 Esempi

10.10 Osservazioni

(*vedi* [GS, Capitolo II])

§11. Applicazioni lineari

11.1 Definizione

11.2 Esempi

11.3 Alcune proprietà

11.4 Lemma

11.5 Teorema: Ogni spazio vettoriale su K di dimensione n è isomorfo a K^n.

11.6 Definizione: l'applicazione delle coordinate

11.7 Esempi

11.8 Corollario: due spazi vettoriali sono isomorfi se e solo se hanno la stessa dimensione.

11.9 nucleo e immagine

11.10 Esempi

11.11 Teorema (nullità + rango)

11.12 Corollario

(*vedi* [GS, Capitolo II])

§12. Quattro spazi associati a una matrice

12.1 Lemma

12.2 L'applicazione $f_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$, $x \mapsto Ax$ associata a $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$

12.3 Lemma

12.4 Teorema sul rango

12.5 Corollario

12.6 Osservazione su A^H

12.7 Teorema dei quattro sottospazi: $\mathbb{K}^m = C(A) \oplus N(A^H)$ e $\mathbb{K}^n = C(A^H) \oplus N(A)$

12.8 Esempio

12.9 Procedimento per determinare basi di $C(A)$ e $N(A)$

12.10 Teorema di Rouché - Capelli

12.11 Teorema: le soluzioni di Ax=b sono i vettori di forma $p + u$ con $u \in N(A)$

12.12 Esempi

12.13 Procedimento per la risoluzione di un sistema lineare

(*vedi* [GS, Capitolo II])

§13. Applicazioni lineari e matrici

13.1 La matrice associata a un'applicazione lineare rispetto alla base canonica

13.2 Esempi

13.3 La matrice del cambiamento di base $\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2$

13.4 La matrice associata a un'applicazione lineare $f : V \to W$ rispetto alle basi $\mathcal{B}(V)$ e $\mathcal{B}(W)$

13.5 Esempio

13.6 Teorema sul cambiamento di basi

13.7 Corollario

13.8 Matrici simili: $B = PAP^{-1}$ come matrice associata a f_A rispetto alla base $\{P^{-1}e_1, \ldots, P^{-1}e_n\}$.

(*vedi* [A, Capitoli 7 e 8], [GS, Capitolo II])

III. Autovalori e autovettori

§14. Il determinante di una matrice quadrata

14.1 Definizione (per ricorrenza)

14.2 Regola di Sarrus

14.3 Seconda definizione (assiomatica)

14.4 Altre proprietà

14.5 Esempio

14.6 Proposizione su $\det A = 0$

14.7 Teorema di Binet

14.8 Corollario: le matrici invertibili, cioè le matrici con $\det A \neq 0$, formano un gruppo.

14.9 Corollario: $\det A = \det A^T$

14.10 Teorema di Laplace

14.11 Teorema di Cramer

14.12 Calcolo della matrice inversa (secondo metodo)

14.13 Determinante a blocchi

(*vedi* [A, Capitolo 9], [GS, Capitolo IV])

§15. Gli autovalori di una matrice

15.1 Definizione di autovalore e autovettore

15.2 Esempi

15.3 Osservazione

15.4 Definizione di polinomio caratteristico.

15.5 Teorema

15.6 Corollario: A possiede n autovalori (non necessariamente reali, né necessariamente distinti)

15.7 Autospazi e molteplicità algebriche e geometriche

15.8 Esempi

15.9 Proprietà del polinomio caratteristico

15.10 Teorema di Cayley-Hamilton (senza dimostrazione)

(- prova intermedia)

§16. Diagonalizzazione di una matrice

16.1 Osservazione

16.2 Definizione: matrici diagonalizzabili

16.3 Teorema sulla diagonalizzazione.

16.4 Esempi

16.5 Proprietà delle matrici simili.

16.6 Corollario

16.7 Esempio

§17. Criteri di diagonalizzazione

17.1 Lemma sugli autospazi

17.2 Lemma sulle molteplicità

17.3 Teorema: $A \in M_{n\times n}$ è diagonalizzabile su $\mathbb{C}$ se e solo se $m_\lambda = d_\lambda$ per ogni autovalore λ.

17.4 Algoritmo per la diagonalizzazione

17.5 Corollario

(*vedi* [GS, Capitolo V])

V. Spazi euclidei

§19. Prodotti interni e norme

19.1 Esempio

19.2 Prodotto scalare canonico su $\mathbb{K}^n$

19.3 Esempi

19.4 Prodotto interno

19.5 Esempi

19.6 Spazio vettoriale metrico, norma associata a $< \cdot, \cdot >$

19.7 Teorema di Pitagora, Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz

19.8 Definizione assiomatica di norma

§20. Basi ortonormali

20.1 ortogonale, ortonormale

20.2 Le coordinate di un vettore rispetto a una base ortonormale

20.3 Esempi

20.4 proiezione ortogonale, complemento ortogonale

20.5 Teorema: Per un sottospazio $U \subset V$ si ha $\mathbb{K}^n = U \oplus U^{\perp}$

20.6 Algoritmo di Gram-Schmidt

20.7 Corollario: Esistenza di basi ortonormali

(*vedi* [GS, Capitolo III], [A, Capitolo 10])

§21. Matrici ortogonali e unitarie

21.1 Osservazione: Matrici le cui colonne formano una ONB

21.2 Matrici unitarie e ortogonali

21.3 Osservazioni: Determinante e autovalori di $A \in U(n)$ hanno modulo 1.

21.4 Teorema di Schur

21.5 Corollario

21.6 Matrici normali

21.7 Esempi

21.8 Teorema Spettrale

21.9 Corollario sulle matrici simmetriche in $M_{n\times n}(\mathbb{R})$

(*vedi* [GS, Capitolo VI], [A, Capitolo 11])

Bibliografia:

[A] M. Abate, Algebra lineare, McGraw-Hill 2000.

[AF] M. Abate, de Fabritiis, Geometria analitica con elementi di algebra lineare, McGraw-Hill 2000.

[CB] M.Candilera, A.Bertapelle: Algebra lineare e primi elementi di Geometria, McGraw Hill, ISBN: 9788838661891.

[GS] E. Gregorio, L. Salce: Algebra lineare. Libreria Progetto, 2005.

Precorso on-line: sito web http://precorso.dicom.uninsubria.it/