Matematica – Esercizi di ricapitolazione n. 2

Integrazione - Curve parametriche - Funzioni di due o più variabili reali - Equazioni differenziali

Università di Verona - Laurea in Biotecnologie - A.A. 2009/10

Martedì 15 dicembre 2009

Questi esercizi vengono proposti in preparazione alla prova d'esame (seconda prova parziale e preappello straordinario) di mercoledì 20/01/2010, e alcuni di essi verranno trattati in aula nelle lezioni di giovedì 14/01 e venerdì 15/01 pp.vv. .

N.B.: degli esercizi indicati con (*) verrà messa in rete lunedì 28/12 la risoluzione dettagliata.

---

(1) **Integrazione.**

Si calcolino i seguenti integrali definiti:

(**1.a**) $\int_0^4 \sqrt{x}\, e^{1+\sqrt{x}}\, dx$, (**1.b**) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \frac{\sin 2x}{\sin^2 x+4\sin x+5}\, dx$, (**1.c**) $\int_{-1}^0 \frac{x^3}{x^2-6x+9}\, dx$,

(**1.d**)* $\int_0^1 e^{-x}(x^2+\sin 2x)\, dx$, (**1.e**)* $\int_0^1 \frac{dx}{(x^2+1)^2}$ (porre $x = \operatorname{tg} t$), (**1.f**) $\int_{-1}^0 \frac{e^{3t}}{e^t+1}\, dt$,

(**1.g**)* $\int_1^2 \frac{t^2-2-(2t+1)\log(3-t)}{2t^2-5t-3}\, dt$, (**1.h**) $\int_0^1 x^3 \log(x^2+3)\, dx$, (**1.i**)* $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{2+\cos^2 x}\, dx$,

(**1.j**) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sqrt{\cos u} - u)\sin u\, du$, (**1.k**) $\int_1^9 \frac{\log(2\sqrt{x}-1)}{2x-\sqrt{x}}\, dx$, (**1.l**) $\int_1^e \frac{\operatorname{arctg}(1-2\log x)}{x}\, dx$.

Studiare l'andamento di $f(x)$, dire per quali $a, b \in \mathbb{R}$ è definito $\int_a^b f(x)\, dx$ e calcolarne il valore.

(**1.m**) $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2-x-2}$, (**1.n**)* $f(x) = 2\log|x| + \sqrt{x+2}$, (**1.p**) $f(x) = x(e^x - 1) - 1$.

Si disegnino le seguenti regioni finite del piano cartesiano (x, y) e si calcolino le loro aree.

(1.q) $S_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x(x-\pi) \le y \le x\sin x,\ y \ge 1-\pi\}$;

(1.r) $S_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x^2+x)y \le 2,\ |y| \le 1,\ |x| \le 3\}$;

(1.s)* $S_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \log(1-xy) \le 0,\ |y-2x| \le 1\}$;

(1.t) $S_4 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y^2-2y-3 \le x \le 1+\cos 2y,\ -\frac{\pi}{4} \le y \le \frac{\pi}{2}\}$.

(2) **Curve parametriche.**

(2.a) Tracciare il grafico della funzione $x = y - \log y$, ed esprimerlo come curva parametrica $\gamma(t)$; detti poi A e B i punti del grafico con $y = 1$ e $y = 4$ determinare in forma parametrica e cartesiana le rette tangenti al grafico in A e in B. Scrivere infine in modo corretto l'integrale che esprime la lunghezza del tratto di grafico tra A e B.

(2.b)* Si tracci[1] la curva parametrica $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ data da $\gamma(t) = (4\cos t, 3\sin t)$; eliminando il parametro t si trovi poi un'equazione cartesiana, riconoscendo di che tipo di curva si tratta. Trovare poi in forma parametrica e cartesiana la retta r ortogonale alla curva nel suo punto dato da $t = \frac{\pi}{3}$, e scrivere infine in modo corretto l'integrale che esprime la lunghezza della curva.

(2.c) Disegnare la curva polare[2] data da $r(t) = \frac{4}{t+1}$ con $0 \leq t \leq \pi$; trovare poi in forma parametrica e cartesiana la retta tangente alla curva nel suo punto dato da $t = \frac{\pi}{2}$, e scrivere infine in modo corretto l'integrale che esprime la lunghezza della curva.

(3) **Funzioni di due o più variabili reali.**

(3.a) Data la funzione $f(x, y) = 1 + \log|y(x^2 - 2)|$, si determinino il dominio naturale, i punti nei quali si annulla e quelli in cui è positiva, disegnando tali insiemi sul piano cartesiano. Si ragioni sui limiti notevoli di f. f è limitata? Dove è differenziabile? Calcolare il differenziale totale df, la funzione lineare tangente di f (il cui grafico è il piano tangente al grafico di f) e la forma cartesiana e parametrica del piano tangente al grafico di f nei punti $A = (1, 1)$ e $B = (-1, 2)$. Calcolare le derivate parziali seconde di f, verificando il teorema di Schwarz.

(3.b) Stesse domande per $g(x, y) = \frac{\sqrt{x-y^2}-x}{x+2}$, con $A = (2, -1)$ e $B = (4, 0)$.

(3.c)* Stesse domande per $h(x, y) = x\,\mathrm{tg}\,(xy^3)$, con $A = (0, 0)$ e $B = (\frac{\pi}{4}, 1)$.

(3.d)* Stesse domande per $\ell(x, y) = \mathrm{arctg}\,(|2x + y - 1| - y)$, con $A = (1, 1)$ e $B = (-1, \frac{3}{2})$.

(3.e) Stesse domande per $m(x, y) = \frac{x}{\sqrt{|1-x^2-2y^2|}}$ con $A = (0, 0)$ e $B = (-3, 2)$.

(3.f) In quali punti $P_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ il piano tangente al grafico di $f(x, y) = x^4 - 4x^3 - 4xy - y^2 + x$ in P_0 è parallelo al piano di equazione cartesiana $z = 5x + 2y + 1$? Calcolare il differenziale totale df e la forma cartesiana e parametrica del piano tangente al grafico di f in ognuno dei punti trovati.

(3.g) Data $f(x, y) = x \log y$ descriverne il dominio, gli zeri, il segno, i limiti notevoli. Come sono fatte le sue curve di livello $f(x, y) = k$? Disegnare la curva di livello passante per $A(0, 1)$ e quella passante per $B(-1, e)$. Calcolare i vettori gradienti $\nabla f(A)$ e $\nabla f(B)$, e notare come sono diretti rispetto alle suddette curve di livello. Infine, supponendo di spostarsi, nel dominio, di un piccolo incremento (dx, dy) dal punto B , qual'è la stima lineare della variazione di f dal valore che essa aveva in B?

(3.h)* Determinare la funzione $f(x, y)$ sapendo che ha derivate parziali $\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2y - 6y^2 + 7$ e $\frac{\partial f}{\partial y} = x^3 - 12xy + 2y$, e che vale $f(0, 2) = -1$. Stesso problema per $g(x, y)$, sapendo che $\frac{\partial g}{\partial x} = 2x\cos xy - x^2y\sin xy - 3y^2 + 8$ e $\frac{\partial g}{\partial y} = -x^3\sin xy - 6xy - 2y$, e che vale $g(-1, 0) = -3$.

(3.i)* Ricercare eventuali punti di massimo e minimo locale della funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ data da

[1] Intuire l'andamento della curva disegnandone alcuni punti con i valori notevoli $t = 0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \ldots$.

[2] Si ricorda che, in un curva polare $r = r(t)$, il parametro t esprime l'angolo del raggio vettore che ruota in senso antiorario, e $r(t)$ è la distanza dall'origine del punto della curva in funzione dell'angolo; pertanto la curva è espressa parametricamente da $\gamma(t) = (r(t)\cos t, r(t)\sin t)$.

$f(x,y) = x^3y^2(1-x-y)$. Disegnare poi gli insiemi chiusi e limitati $A = \{(x,y) : |x|+|y| \le 1\}$ e $B = \{(t,-2) : |t| \le 2\}$, e determinare il massimo e minimo assoluti di f su ciascuno di essi.

(3.l) Ricercare eventuali punti di massimo e minimo locale della funzione $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ data da $g(x,y) = \dfrac{x^2\, e^{-y^2}}{1+x^4}$. Poi, notando (e se possibile dimostrando) che $\lim_{(x,y)\to\infty_2} g(x,y) = 0$, spiegare perché g deve ammettere estremi assoluti su tutto il dominio $\mathbb{R}^2$ anche se quest'ultimo non è limitato (e dunque non si può applicare Weierstrass), e dire quanto valgono.

(3.m) Disegnare l'insieme $K = \{(x,y) : y^2 - 2y \le x \le 1\}$, calcolarne l'area e determinare massimo e minimo assoluti su di esso della funzione $h(x,y) = 3x+4y$, cercando poi di spiegare quest'ultimo risultato con un ragionamento grafico.

(4) **Equazioni differenziali.**

(4.a) Data l'equazione differenziale $y\,y' = x\,e^{-y^2}$ si dica quali zone del piano le soluzioni $y(x)$ sono crescenti. (Facoltativo: si dica in quali zone del piano le soluzioni sono convesse; si dimostri che le soluzioni sono funzioni pari.[3]) Si calcoli infine la soluzione del problema di Cauchy con condizione iniziale $y(0) = -1$.

(4.b) Data l'equazione differenziale $2(x-2)y' = x(y^2+4)$ si dica quali zone del piano le soluzioni $y(x)$ sono crescenti, ed in quali zone del piano sono convesse. Si calcoli infine la soluzione del problema di Cauchy con condizione iniziale $y(1) = 0$.

(4.c)* Data l'equazione differenziale $y^2y'\sin^2 x + (y^3+1)\cos x = 0$ si dica in quali zone del piano le soluzioni $y(x)$ sono crescenti. Si calcoli poi la soluzione del problema di Cauchy con condizione iniziale $y(\frac{\pi}{2}) = -\sqrt[3]{2}$, e quella con condizione iniziale $y(-3) = -1$.

Risolvere le seguenti equazioni differenziali lineari del primo ordine.

(4.d) $(x+1)y' - y = \log x, \quad y(1) = 0.$

(4.e) $xy' + (x+1)y = -2-2x, \quad y(1) = -1$ oppure $= -2$ (fare anche come variabili separabili)

(4.f)* $y'\sin x + y\cos x = \sin 2x, \quad y(\frac{\pi}{2}) = y_0$ oppure $y(-\frac{\pi}{2}) = y_1$. Per quali y_0 e y_1 si possono prolungare in $x = 0$, incollandole, le due soluzioni appena trovate ottenendo una funzione derivabile?

Risolvere le seguenti equazioni differenziali del secondo ordine a coefficienti costanti.

(4.g) $y'' + 2y' - 3y = 2e^x - \cos 2x, \quad y(0) = -1,\ y'(0) = \frac{1}{2}.$

(4.h)* $4y'' - 4y' + y = (x+1)e^{\frac{x}{2}}, \quad y(0) = -2,\ y'(0) = 0.$

(4.i) $y'' + 2y' + 5y = 2e^x \sin 2x + \sin x - 5, \quad y(0) = 1,\ y'(0) = -1.$

Risolvere i seguenti problemi tramite un'opportuna equazione differenziale.

(4.j) Una pallina di massa m, vincolata a stare su una guida rettilinea verticale liscia, è soggetta alla propria forza peso ed è trattenuta anche da una molla di costante elastica k; il tutto è immerso in un fluido di viscosità β. Calcolare la legge oraria del moto nei casi $(m,k,\beta) = (1,2,3)$

[3] Se $\varphi(x)$ è una soluzione, si ponga $\psi(x) = \varphi(-x)$: poiché $\psi'(x) = -\varphi(-x)$, si mostri che anche $\psi(x)$ è soluzione; poi, notando che $\psi(0) = \varphi(-0) = \varphi(0)$...

e $(m, k, \beta) = (1, 2, 2)$, supponendo che all'istante iniziale la pallina venga lasciata con velocità nulla nel punto in cui è anche attaccata la molla;[4] cercare poi di interpretare i risultati alla luce del buon senso. Se si vuole, discutere anche il caso di m, k, β qualunque.

(4.k) La velocità di crescita di una colonia di batteri è, in ogni istante, direttamente proporzionale al tempo che passa e inversamente proporzionale all'entità della colonia stessa. Sapendo che all'istante iniziale dell'esperimento erano stati messi assieme 4 batteri, e che dopo 4 secondi questi erano raddoppiati, calcolare quanti ve ne saranno dopo un'ora.

(4.l)* La sera di San Silvestro, un gruppo di amici decide di lanciare in aria un candelotto di fuochi artificiali per festeggiare l'anno nuovo. Il candelotto ha massa 1 kg, e dunque è soggetto ad una forza di gravità di (circa) 10 Newton; al momento dell'accensione esso viene spinto da una forza verso l'alto pari a 150 Newton, che decresce proporzionalmente al tempo e si esaurisce dopo 5 secondi. L'aria oppone una resistenza di tipo viscoso con coefficiente pari a 1 Newton·sec/m. Sapendo che il candelotto contiene un meccanismo programmato per causare l'esplosione dopo 3 secondi dallo spegnimento della forza propulsiva (dunque, in tutto, dopo 8 secondi dalla partenza), si dica a che altezza dal suolo (arrotondata al metro) esploderà il candelotto.

Auguri di Serene Festività e di un Felice 2010

[4] Tutte le grandezze sono espresse nelle unità di misura del sistema internazionale standard MKS, e dunque la massa m è espressa in kg, la costante elastica k in Newton/m, il coefficiente di viscosità β in Newton·sec/m, e l'accelerazione di gravità g (che, se si vuole, si può arrotondare per comodità a 10) in m/sec^2. Naturalmente, converrà porre sulla guida rettilinea un sistema di coordinate ascisse x orientato verso l'alto, supponendo che la molla sia imperniata in 0: la domanda è dunque di determinare la funzione $x(t)$.

Alcune soluzioni.

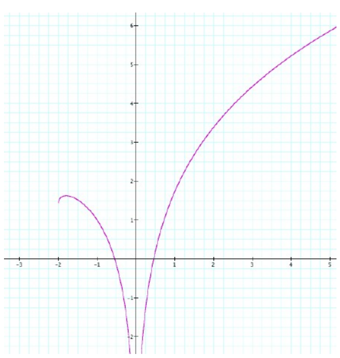
(1) **Integrazione.**

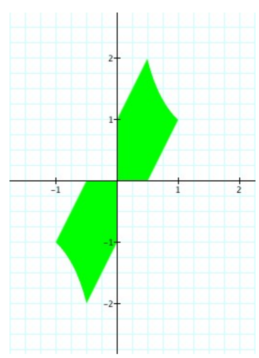
(1.d) Vale $\int e^{-x}(x^2+\sin 2x)\,dx = \int x^2 e^{-x}\,dx + \int e^{-x}\sin 2x\,dx$; integrando per parti si ottiene $\int x^2e^{-x}\,dx = -x^2e^{-x}+\int 2xe^{-x}\,dx = -x^2e^{-x}+2(-xe^{-x}+\int e^{-x}\,dx) = -(x^2+2x+2)e^{-x}+k$, e $\int e^{-x}\sin 2x\,dx = -e^{-x}\sin 2x + 2\int e^{-x}\cos 2x\,dx = -e^{-x}\sin 2x + 2(-e^{-x}\cos 2x - 2\int e^{-x}\sin 2x\,dx)$, da cui $5\int e^{-x}\sin 2x\,dx = -e^{-x}\sin 2x - 2e^{-x}\cos 2x$, da cui $\int e^{-x}\sin 2x\,dx = -\frac{1}{5}e^{-x}(\sin 2x + 2\cos 2x)+k$. Pertanto $\int e^{-x}(x^2+\sin 2x)\,dx = -e^{-x}(x^2+2x+2+\frac{\sin 2x + 2\cos 2x}{5})+k$, e $\int_0^1 e^{-x}(x^2+\sin 2x)\,dx$ basta sottrarre i valori di tale primitiva negli estremi 1 e 0.

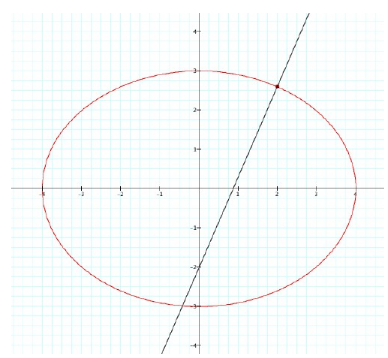
(1.e) Da $x=\operatorname{tg} t$ si ha $dx = \frac{1}{\cos^2 t}\,dt$; se $x=0$ si ha $t=0$, e se $x=1$ si ha $t=\frac{\pi}{4}$, dunque $\int_0^1 \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{(\operatorname{tg}^2 t+1)^2}\frac{1}{\cos^2 t}\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^4 x}{(\cos^2 t+\sin^2 t)^2}\frac{1}{\cos^2 t}\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 t\,dt = (\frac{t+\sin t\cos t}{2}]_0^{\frac{\pi}{4}} = (\frac{\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}}{2}) - (0) = \frac{\pi+2}{8}$.

(1.g) Si ha $2t^2-5t-3=(2t+1)(t-3)$, dunque $\int \frac{t^2-2-(2t+1)\log(3-t)}{2t^2-5t-3}\,dt = \int \frac{t^2-2}{2t^2-5t-3}\,dt + \int\frac{\log(3-t)}{t-3}\,dt$. Iniziamo calcolando $\int\frac{t^2-2}{2t^2-5t-3}\,dt$: dividendo si ha $\frac{t^2-2}{2t^2-5t-3} = \frac{1}{2}(1+\frac{5t-1}{2t^2-5t-3})$, e poi $\frac{5t-1}{2t^2-5t-3} = \frac{1}{2t+1}+\frac{2}{t-3}$, pertanto $\int\frac{t^2-2}{2t^2-5t-3}\,dt = \frac{1}{2}(t+\frac{1}{2}\log|2t+1|+2\log|t-3|)+k$. Passando poi a $\int\frac{\log(3-t)}{t-3}\,dt$, poniamo $\tau = 3-t$, da cui (sostituendo e integrando per parti) si ottiene $d\tau=-dt$: si ha allora $\int\frac{\log(3-t)}{t-3}\,dt = \int\frac{\log\tau}{\tau}\,d\tau = \log^2\tau - \int\frac{\log\tau}{\tau}\,d\tau$, da cui $\int\frac{\log\tau}{\tau}\,d\tau = \frac{1}{2}\log^2\tau+k$, ovvero $\int\frac{\log(3-t)}{t-3}\,dt = \frac{1}{2}\log^2(3-t)+k$. A questo punto basta riunire i due integrali addendi e sottrarre i valori della primitiva così ottenuta negli estremi 2 e 1.

(1.i) Posto $t=\cos x$ si ha $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2x}{2+\cos^2 x}\,dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x\cos x}{2+\cos^2 x}\,dx = -2\int_1^0\frac{t}{2+t^2}\,dt = \int_0^1\frac{2t}{2+t^2}\,dt = (\log(2+t^2)]_0^1 = \log\frac{3}{2}$.







(1) Grafico di $f(x)=2\log|x|+\sqrt{x+2}$ in (1.n); **(2)** L'insieme S_3 in (1.s); **(3)** L'ellisse $\gamma(t)$ in (2.b).

(1.n) (Figura 1) Il dominio di $f(x)=2\log|x|+\sqrt{x+2}$ è dato da $x\geq -2$ e $x\neq 0$; la funzione non ha periodo o parità, è continua nel suo dominio e derivabile ovunque tranne che in $x=-2$ (a causa della radice). Un facile confronto grafico tra le funzioni $2\log|x|$ (il logaritmo a due falde simmetriche e raddoppiato di valore) e $-\sqrt{x+2}$ (la radice quadrata arretrata di 2 e resa negativa) mostra che f si annulla in due punti x_0 e x_1 con $-1<x_0<0<x_1<1$, e vale $f(x)>0$ per $-2\leq x<x_0$ e $x>x_1$. I limiti notevoli sono determinati e valgono $\lim_{x\to 0}f(x)=-\infty$ e $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$, mentre f è continua in -2 col valore $f(-2)=2\log 2\sim 1{,}4$; non vi sono asintoti a $+\infty$. Derivando (con $x\neq -2$) si ottiene $f'(x)=\frac{2}{x}+\frac{1}{2\sqrt{x+2}}=\frac{4\sqrt{x+2}+x}{2x\sqrt{x+2}}$: vale $f'(x)=0$ quando $4\sqrt{x+2}=-x$, che nell'ipotesi $-x>0$ (cioè se $-2\leq x<0$) equivale a $(4\sqrt{x+2})^2=(-x)^2$, ovvero $x^2-16x-32=0$, soddisfatta per $x=x_2:=-4(\sqrt{6}-2)\sim -1{,}8$. Passiamo ora allo studio di $f'(x)>0$. Il numeratore è positivo quando $4\sqrt{x+2}>-x$, che se $-x<0$ (cioè se $x>0$) è sempre vero, mentre se $-x>0$ (cioè se $-2<x<0$) equivale a $(4\sqrt{x+2})^2>(-x)^2$, ovvero $x^2-16x-32<0$, soddisfatta per $x>x_2$: pertanto il numeratore è positivo per $x_2<x<0$ e per $x>0$. D'altra parte il denominatore è positivo quando $x>0$, dunque $f'(x)>0$ per $-2<x<x_2$ e per $x>0$: ne ricaviamo che $x=x_2$ è un punto di massimo locale (con $f(x_2)\sim 1{,}6$). Si osservi anche che $\lim_{x\to-2^+}f'(x)=+\infty$. La derivata seconda $f''(x)=-\frac{2}{x^2}-\frac{1}{4}(x+2)^{-\frac{3}{2}}$ è sempre <0, dunque f è concava in tutto il dominio. Dallo studio appena effettuato ricaviamo che l'integrale $\int_a^b f(x)\,dx$ ha senso quando sia a che b stanno in $[-2,0[$, oppure quando sono entrambi >0, ed in tali casi vale $\int_a^b f(x)\,dx = (2x(\log|x|-1)+\frac{2}{3}(x+2)^{\frac{3}{2}}]_a^b$.

(1.s) (Figura 2) La condizione $\log(1-xy) \leq 0$ richiede che $0 < 1-xy \leq 1$, ovvero che $0 \leq xy < 1$: si tratta delle parti di I e III quadrante strettamente comprese tra le due falde dell'iperbole equilatera $xy = 1$. Invece, la condizione $|y-2x| \leq 1$ equivale a $-1 \leq y-2x \leq 1$, ovvero $2x-1 \leq y \leq 2x+1$: si tratta della fascia obliqua di piano compreso tra le due rette $y = 2x-1$ e $y = 2x+1$. L'insieme S_3 è ottenuto dall'intersezione di tali sottoinsiemi. Dal sistema tra $y = \frac{1}{x}$ e $y = 2x+1$ si ottiene $x = -1$ e $x = \frac{1}{2}$, e da quello tra $y = \frac{1}{x}$ e $y = 2x-1$ si ottiene $x = -\frac{1}{2}$ e $x = 1$: per chiare ragioni di simmetria, l'area di S_3 risulta $2(\int_0^{\frac{1}{2}} (2x+1)\, dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{x}\, dx + \int_1^{\frac{1}{2}} (2x-1)\, dx + \int_{\frac{1}{2}}^0 0\, dx) = 2((x^2+x]_0^{\frac{1}{2}} + (\log x]_{\frac{1}{2}}^1 + (x^2-x]_1^{\frac{1}{2}}) = 2\log 2 + 1 \sim 2,4$.

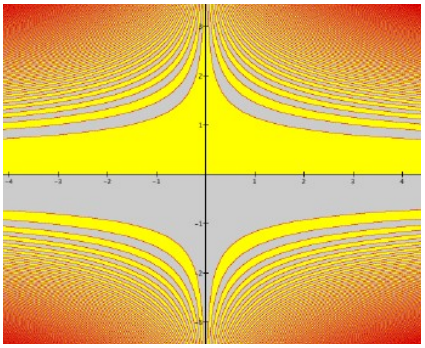
(2) **Curve parametriche.**

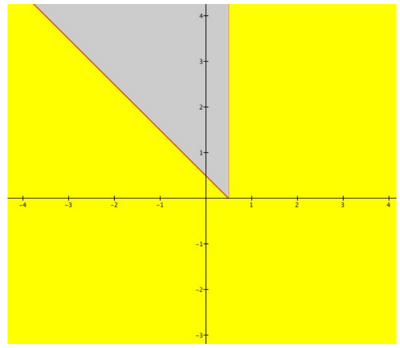
(2.b) (Figura 3) La curva parametrica $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ data da $\gamma(t) = (4\cos t, 3\sin t)$ è l'ellisse centrata in $(0,0)$ con assi coincidenti con gli assi coordinati, e semiassi lunghi rispettivamente 4 e 3: ciò risulta evidente eliminando il parametro t dalle due equazioni $x = 4\cos t$ e $y = 3\sin t$, perché da $\cos t = \frac{x}{4}$ e $\sin t = \frac{y}{3}$ si ottiene la ben nota forma canonica $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$. Il punto dato da $t = \frac{\pi}{3}$ è $P = \gamma(\frac{\pi}{3}) = (2, \frac{3\sqrt{3}}{2})$; essendo $\gamma'(t) = (-4\sin t, 3\cos t)$, un vettore tangente in P è $\gamma'(\frac{\pi}{3}) = (-2\sqrt{3}, \frac{3}{2})$, e dunque uno ortogonale è (a meno di proporzionalità) $(\sqrt{3}, 4)$. Da ciò si ottiene la forma parametrica $r = \{(2, \frac{3\sqrt{3}}{2}) + t(\sqrt{3}, 4) : t \in \mathbb{R}\}$; da $x = 2 + t\sqrt{3}$ e $y = \frac{3\sqrt{3}}{2} + 4t$ si trova la forma cartesiana $8x - 2\sqrt{3}y - 7 = 0$. Infine, l'integrale che esprime la lunghezza della curva è $L = \int_0^{2\pi} \sqrt{\gamma_1'(t)^2 + \gamma_2'(t)^2}\, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{16\sin^2 t + 9\cos^2 t}\, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{9 + 7\sin^2 t}\, dt$.

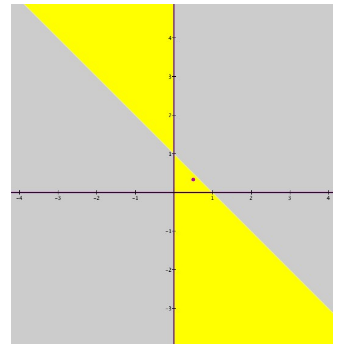
(3) **Funzioni di due o più variabili reali.**

(3.c) (Figura 4) Il dominio di $f(x,y) = x\,\mathrm{tg}\,(xy^3)$ è dato dalla condizione $xy^3 \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ (con $k \in \mathbb{Z}$): si tratta di escludere una famiglia di curve del tipo $xy^3 = \alpha$, che hanno due rami simili a quelli dell'iperbole equilatera $xy = 1$ nel primo e terzo quadrante se $\alpha > 0$, nel secondo e quarto quadrante se $\alpha < 0$, mentre se $\alpha = 0$ si ottiene l'unione dei due assi coordinati $x = 0$ e $y = 0$. Similmente, si ha $f(x,y) = 0$ per $x = 0$, $y = 0$ oppure per $xy^3 = k\pi$ (con $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$). Si ha poi $f(x,y) > 0$ nei seguenti casi: se $x > 0$, per $k\pi < xy^3 < \frac{\pi}{2} + k\pi$; e se $x < 0$, per $\frac{\pi}{2} + k\pi < xy^3 < \pi + k\pi$ (con $k \in \mathbb{Z}$). Quando il punto (x,y) si avvicina ad una delle curve escluse dal dominio, $f(x,y)$ diverge a $\pm\infty$; dunque f non è limitata. La funzione è differenziabile su tutto il suo dominio; le derivate parziali sono $\frac{\partial f}{\partial x} = \mathrm{tg}\,(xy^3) + x\frac{y^3}{\cos^2(xy^3)}$ e $\frac{\partial f}{\partial y} = x\frac{3xy^2}{\cos^2(xy^3)}$. Essendo $f(0,0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$, sia la funzione lineare tangente in $(0,0)$ che il differenziale $df_{(0,0)}(x,y)$ sono 0; essendo invece $f(\frac{\pi}{4}, 1) = \frac{\pi}{4}$, poi $\frac{\partial f}{\partial x}(\frac{\pi}{4}, 1) = 1 + \frac{\pi}{4}\frac{1}{\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{2} + 1$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(\frac{\pi}{4}, 1) = \frac{\pi}{4}\frac{\frac{3\pi}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{3\pi^2}{8}$, si ha $df_{(\frac{\pi}{4},1)}(x,y) = (\frac{\pi}{2}+1)x + \frac{3\pi^2}{8}y$ e la funzione lineare tangente $\frac{\pi}{4} + (\frac{\pi}{2}+1)(x - \frac{\pi}{4}) + \frac{3\pi^2}{8}(y-1) = (\frac{\pi}{2}+1)x + \frac{3\pi^2}{8}y - \frac{\pi^2}{2}$. Le derivate seconde sono $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2\frac{y^3}{\cos^2(xy^3)} + 2xy^6\frac{\sin(xy^3)}{\cos^3(xy^3)} = \frac{2y^3(\cos(xy^3)+y^3\sin(xy^3))}{\cos^3(xy^3)}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 3x^2\frac{2y\cos^2(xy^3)+2y^2\cdot 3xy^2\sin(xy^3)\cos(xy^3)}{\cos^4(xy^3)} = \frac{6x^2y(\cos(xy^3)+3xy^3\sin(xy^3))}{\cos^3(xy^3)}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial x}) = \frac{3xy^2}{\cos^2(xy^3)} + x\frac{3y^2\cos^2(xy^3)+y^3\cdot 2\sin(xy^3)\cos(xy^3)\cdot 3xy^2}{\cos^4(xy^3)} = \frac{6xy^2(\cos(xy^3)+xy^3\sin(xy^3))}{\cos^3(xy^3)}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial y}) = 2x\frac{3y^2}{\cos^2(xy^3)} + x^2 \cdot 3y^2\frac{2y^3\sin(xy^3)}{\cos^3(xy^3)} = \frac{6xy^2(\cos(xy^3)+xy^3\sin(xy^3))}{\cos^3(xy^3)}$: notare che $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, come prescrive Schwarz.

(3.d) (Figura 5) Il dominio di $\ell(x,y) = \mathrm{arctg}\,(|2x+y-1| - y)$ è tutto $\mathbb{R}^2$; vale $\ell(x,y) = 0$ quando $|2x+y-1| = y$: nell'ipotesi che $y \geq 0$, ciò equivale a $2x+y-1 = y$ (ovvero $x = \frac{1}{2}$) oppure $2x+y-1 = -y$ (ovvero $y = -x + \frac{1}{2}$), pertanto ℓ si annulla sui tratti delle rette $x = \frac{1}{2}$ e $y = -x + \frac{1}{2}$ che stanno nel semipiano $y \geq 0$. Quanto al segno, vale $\ell(x,y) > 0$ quando $|2x+y-1| > y$; ciò è sempre vero se $y < 0$, mentre se $y \geq 0$ equivale a $2x+y-1 < -y$ (ovvero $y < -x + \frac{1}{2}$) oppure $2x+y-1 > y$ (ovvero $x > \frac{1}{2}$): pertanto ℓ è positiva su tutto il piano $\mathbb{R}^2$ tranne il settore del semipiano $y > 0$ compreso tra le rette $x = \frac{1}{2}$ e $y = -x + \frac{1}{2}$. La funzione ℓ è certamente limitata, perché $|\ell(x,y)| < \frac{\pi}{2}$; da quanto detto sopra, si evince che il limite a ∞ non esiste. La funzione è certamente differenziabile in tutti i punti che non stanno sulla retta $2x+y-1$ (a causa del modulo). Dove $2x+y-1 > 0$ (ovvero sopra la retta $y = -2x+1$) la funzione diventa $\ell(x,y) = \mathrm{arctg}\,((2x+y-1)-y) = \mathrm{arctg}\,(2x-1)$, dunque costante rispetto a y, con derivate parziali $\frac{\partial \ell}{\partial x} = \frac{2}{1+(2x-1)^2} = \frac{1}{2x^2-2x+1}$ e $\frac{\partial \ell}{\partial y} \equiv 0$. Il punto $A = (1,1)$ sta in tale parte del dominio: essendo $\ell(1,1) = \mathrm{arctg}\,(1) = \frac{\pi}{4}$ e $\frac{\partial \ell}{\partial x}(1,1) = 1$, si ha $d\ell_{(1,1)}(x,y) = x$ e la funzione lineare tangente $\frac{\pi}{4} + (x-1) = x + \frac{\pi}{4} - 1$. Dove invece $2x+y-1 < 0$ (ovvero sotto la retta $y = -2x+1$) la funzione diventa $\ell(x,y) = \mathrm{arctg}\,(-(2x+y-1)-y) = \mathrm{arctg}\,(1-2x-2y)$, con derivate parziali $\frac{\partial \ell}{\partial x} = \frac{\partial \ell}{\partial y} = \frac{-2}{1+(1-2x-2y)^2} = -\frac{1}{2x^2+2y^2+4xy-2x-2y+1}$. Il punto $B = (-1, \frac{3}{2})$ sta in tale parte del dominio: essendo $\ell(-1, \frac{3}{2}) = \mathrm{arctg}\,(0) = 0$ e $\frac{\partial \ell}{\partial x}(-1, \frac{3}{2}) = \frac{\partial \ell}{\partial y}(-1, \frac{3}{2}) = -2$, si ha $d\ell_{(-1,\frac{3}{2})}(x,y) = -2x - 2y$ e la funzione lineare tangente $0 - 2(x-(-1)) - 2(y - \frac{3}{2}) = -2x - 2y + 1$. Guardiamo ora i punti sulla retta "incriminata" $y = -2x+1$, ovvero quelli della forma $(x_0, -2x_0+1)$: la derivata parziale $\frac{\partial \ell}{\partial y}$ ha (ovviamente) limite 0 tendendo ad un tale punto da sopra la retta, ed ha limite $-\frac{1}{2(x_0)^2+2(-2x_0+1)^2+4x_0(-2x_0+1)-2x_0-2(-2x_0+1)+1} = -\frac{1}{2x_0^2-2x_0+1}$ tendendovi da sotto: si noti che tale ultimo limite non è mai nullo, dunque $\frac{\partial \ell}{\partial y}$ non esiste in nessuno dei punti della retta. Ciò dimostra senza dubbio che ℓ, pur essendo continua sui punti della retta, non è differenziabile in nessuno di essi (se lo fosse, dovrebbero anche esistere entrambe le derivate parziali). Le derivate seconde sopra la retta $y = -2x + 1$ sono $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\frac{2(2x-1)}{(2x^2-2x+1)^2}$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \equiv 0$; sotto la retta $y = -2x + 1$ sono invece $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{2(2x+2y-1)}{(2x^2+2y^2+4xy-2x-2y+1)^2}$. In entrambi i casi il teorema di Schwarz è confermato.







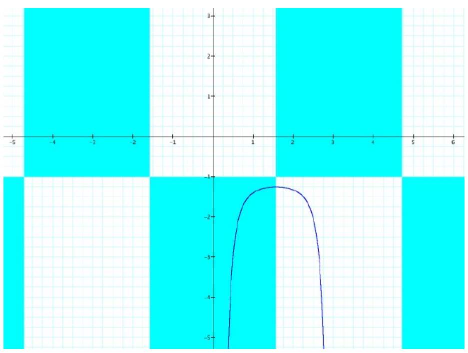
(4) Segno di $x \operatorname{tg}(xy^3)$ in (3.c); **(5)** Segno di $\operatorname{arctg}(|2x + y - 1| - y)$ in (3.d); **(6)** Segno di $x^3y^2(1 - x - y)$ in (3.i); in porpora i punti stazionari.

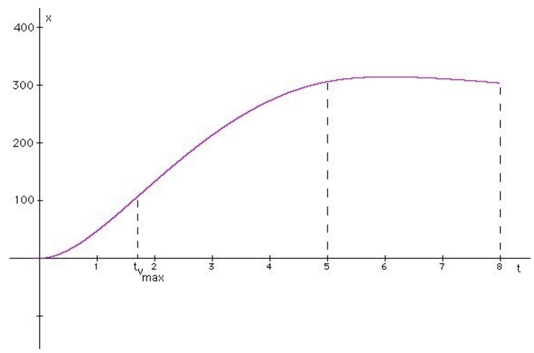
(3.h) Poiché $\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2y - 6y^2 + 7$, integrando rispetto a x dovrà essere $f(x, y) = x^3y - 6xy^2 + 7x + \varphi(y)$ per una certa funzione $\varphi(y)$ da determinare; essendo poi $\frac{\partial f}{\partial y} = x^3 - 12xy + 2y$, integrando rispetto a y si ottiene $x^3 - 12xy + \varphi'(y) = x^3 - 12xy + 2y$, da cui $\varphi'(y) = 2y$, da cui $\varphi(y) = y^2 + k$ con $k \in \mathbb{R}$ costante da determinare, e dunque $f(x, y) = x^3y - 6xy^2 + 7x + y^2 + k$; infine, da $f(0, 2) = -1$ si ricava $4 + k = -1$, dunque $k = -5$, e perciò $f(x, y) = x^3y - 6xy^2 + 7x + y^2 - 5$. In modo simile, poiché $\frac{\partial g}{\partial x} = 2x \cos xy - x^2y \sin xy - 3y^2 + 8$ dovrà essere $g(x, y) = x^2 \cos xy - 3xy^2 + 8x + \varphi(y)$ per una certa funzione $\varphi(y)$ da determinare; essendo poi $\frac{\partial g}{\partial y} = -x^3 \sin xy - 6xy - 2y$ si ottiene $-x^3 \sin xy - 6xy + \varphi'(y) = -x^3 \sin xy - 6xy - 2y$, da cui $\varphi'(y) = -2y$, da cui $\varphi(y) = -y^2 + k$ con $k \in \mathbb{R}$ costante da determinare, e dunque $g(x, y) = x^2 \cos xy - 3xy^2 + 8x - y^2 + k$; infine, da $g(-1, 0) = -3$ si ricava $1 - 8 + k = -3$, dunque $k = 5$, e perciò $g(x, y) = x^2 \cos xy - 3xy^2 + 8x - y^2 + 5$.
Si noti che in generale, se vengono assegnate le derivate parziali $\frac{\partial f}{\partial x} = \alpha(x, y)$ e $\frac{\partial f}{\partial y} = \beta(x, y)$, il teorema di Schwarz implica che deve essere $\frac{\partial \alpha}{\partial y} = \frac{\partial \beta}{\partial x}$ (condizioni di *chiusura*). Per maggiori dettagli, si veda la parte finale facoltativa delle note sulle funzioni di più variabili reali.

(3.i) (Figura 6) Gli eventuali punti di massimo e minimo locale in $\mathbb{R}^2$ di $f(x, y) = x^3y^2(1 - x - y)$ si trovano tra i punti stazionari, dunque iniziamo col cercare questi ultimi. Dal sistema tra $\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2y^2(1 - x - y) - x^3y^2 = 0$ e $\frac{\partial f}{\partial y} = 2x^3y(1 - x - y) - x^3y^2 = 0$, ovvero tra $x^2y^2(3 - 4x - 3y) = 0$ e $x^3y(2 - 2x - 3y) = 0$, si trovano tutti i punti degli assi coordinati e il punto $P(\frac{1}{2}, \frac{1}{3})$. La matrice hessiana è $H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 6xy^2(1 - 2x - y) & x^2y(6 - 8x - 9y) \\ x^2y(6 - 8x - 9y) & x^3(2 - 2x - 6y) \end{pmatrix}$, dunque $H_f(P) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{9} & -\frac{1}{12} \\ -\frac{1}{12} & -\frac{1}{8} \end{pmatrix}$ ci dice che P è un punto di massimo locale stretto (con $f(P) = \frac{1}{432}$). D'altra parte, nei punti degli assi coordinati l'hessiano ha determinante nullo, dunque il criterio non dà informazioni precise; tuttavia, poiché sugli assi f è nulla, l'esame del segno di f (riportato in figura) ci dice subito che i punti $(x_0, 0)$ dell'asse x sono di massimo locale non stretto se $x_0 < 0$ oppure $x_0 > 1$ e di minimo locale non stretto se $0 < x_0 < 1$, mentre i punti $(0, 0)$, $(1, 0)$ e tutti i punti dell'asse y sono delle selle.
L'insieme $A = \{(x, y) : |x| + |y| \leq 1\}$ è il rombo pieno (lati compresi) di vertici $Q_1(1, 0)$, $Q_2(0, 1)$, $Q_3(-1, 0)$ e $Q_4(0, -1)$, mentre $B = \{(t, -2) : |t| \leq 2\}$ è il tratto di segmento orizzontale tra i punti $R_1(-2, -2)$ e $R_2(2, -2)$: essendo entrambi gli insiemi chiusi e limitati in $\mathbb{R}^2$, f ammetterà estremi assoluti su ciascuno di essi per Weierstrass. Iniziando da A, i punti interni candidati ad essere estremanti per f sono quelli per cui $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$, e sono dunque i già noti P (in cui $f(P) = \frac{1}{432}$) e quelli sugli assi (nei quali $f = 0$). Nei quattro vertici si ha pure $f(Q_1) = f(Q_2) = f(Q_3) = f(Q_4) = 0$. Sul lato Q_1Q_2 si ha $\phi_1(t) = f(t, 1 - t) \equiv 0$; sul lato Q_2Q_3 si ha $\phi_2(t) = f(t, t + 1) = -2t^4(t + 1)^2$ con $-1 < t < 0$, e ponendo $\phi_2'(t) = -4t^3(t + 1)(3t + 2) = 0$ si ottiene $t = -\frac{2}{3}$, ovvero il punto $(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$ in cui f vale $-\frac{32}{729}$; sul lato Q_3Q_4 si ha $\phi_3(t) = f(t, -1 - t) = 2t^3(t + 1)^2$ con $-1 < t < 0$, e ponendo $\phi_3'(t) = 2t^2(t + 1)(5t + 3) = 0$ si ottiene $t = -\frac{3}{5}$, ovvero il punto $(-\frac{3}{5}, -\frac{2}{5})$ in cui f vale $-\frac{216}{3125}$; infine, sul lato Q_4Q_1 si ha $\phi_4(t) = f(t, t - 1) = -2t^3(t - 1)^3$ con $0 < t < 1$, e ponendo $\phi_4'(t) = -6t^2(t - 1)^2(2t - 1) = 0$ si ottiene $t = \frac{1}{2}$, ovvero il punto $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ in cui f vale $\frac{1}{32}$. Pertanto, essendo $-\frac{216}{3125} < -\frac{32}{729} < 0 < \frac{1}{432} < \frac{1}{32}$, il minimo assoluto di f su A è $-\frac{216}{3125}$ (assunto in $(-\frac{3}{5}, -\frac{2}{5})$) e il massimo assoluto è $\frac{1}{32}$ (assunto in $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$).
Passiamo ora a B. Negli estremi si ha $f(R_1) = -160$ e $f(R_2) = 32$, mentre negli altri punti si ha $\phi(t) = f(t, -2) = 4t^3(3 - t)$ con $-2 < t < 2$: ponendo $\phi'(t) = 4t^2(9 - 4t) = 0$ si ottiene solo $t = 0$ (invece $t = \frac{9}{4}$ non interessa perché > 2), ovvero il punto $(0, -2)$ in cui f vale 0. Pertanto il minimo assoluto di f su B è -160 (assunto in R_1) e il massimo assoluto è 32 (assunto in R_2).

(4) **Equazioni differenziali.**

(4.c) (Figura 7) Per discutere la crescenza delle soluzioni bisogna ricavare esplicitamente y', ma ciò richiede di dividere per $y^2 \sin^2 x$: iniziamo dunque discutendo brevemente cosa accade quando tale divisione non è possibile. Dalla forma dell'equazione si deduce che se $y(x)$ è una soluzione e $y(x) = 0$, si ottiene $\cos x = 0$: ovvero, se una soluzione si annulla in un punto x allora tale punto dev'essere necessariamente della forma $\frac{\pi}{2} + k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$; viceversa, nei punti x della forma $\frac{\pi}{2} + k\pi$ si ha $\pm y^2(x)y'(x) = 0$, dunque o $y(x) = 0$ (come appena detto) o $y'(x) = 0$, ovvero si ha un punto stazionario, probabile estremante locale. Sempre dalla forma dell'equazione si deduce anche che se una soluzione è definita in qualche punto x del tipo $k\pi$, dev'essere $y^3(x) + 1 = 0$, ovvero in tale punto la soluzione deve valere -1. Escludendo ora i punti del piano in cui $y = 0$ oppure $x = k\pi$, otteniamo finalmente $y' = -\frac{(y^3+1)\cos x}{y^2 \sin^2 x}$: pertanto $y'(x) = 0$ o se $y(x) = -1$ o se $\cos x = 0$ (ovvero per $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$), mentre $y'(x) > 0$ se $(y^3 + 1)\cos x < 0$, ovvero se $y > -1$ e $\frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$ oppure se $y < -1$ e $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi$. Se la condizione iniziale è $y(-3) = -1$, la soluzione è la funzione costante $y(x) \equiv 1$; occupiamoci invece del caso in cui la condizione iniziale sia $y(\frac{\pi}{2}) = -\sqrt[3]{2}$. Separando le variabili, si ottiene $\frac{y^2}{y^3+1}y' = -\frac{\cos x}{\sin^2 x}$, da cui integrando si ha $\frac{1}{3}\log|y^3+1| = \frac{1}{\sin x} + k$; imponendo la condizione iniziale si ha $0 = 1 + k$, da cui $k = -1$ e perciò $\frac{1}{3}\log|y^3 + 1| = \frac{1}{\sin x} - 1$. Si ha dunque $|y^3 + 1| = e^{3(\frac{1}{\sin x}-1)}$, ovvero $y^3 + 1 = \pm e^{3(\frac{1}{\sin x}-1)}$: ma la condizione iniziale impone $-1 = \pm 1$, e dunque va scelto il segno "$-$", da cui $y^3 = -1 - e^{3(\frac{1}{\sin x}-1)}$, da cui $y = -\sqrt[3]{1 + e^{3(\frac{1}{\sin x}-1)}}$.





(7) Zone di crescenza e grafico della soluzione di (4.c); **(8)** Il grafico della legge oraria del moto di (4.l).

(4.f) Per risolvere l'equazione è necessario per il momento escludere i punti in cui $\sin x = 0$, ovvero i punti del tipo $k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$. In tale caso, l'equazione diventa $y' + p(x)\,y = q(x)$ con $p(x) = \operatorname{cotg} x$ e $q(x) = 2\cos x$. Come noto, una primitiva di $p(x)$ è $P(x) = \log|\sin x|$; bisogna poi calcolare $\int e^{P(x)}q(x)\,dx$, ovvero $\int |\sin x| \cdot 2\cos x\,dx = (\operatorname{sign}(\sin x))\int 2\sin x\cos x\,dx = -(\operatorname{sign}(\sin x))\cos^2 x$. Si ha dunque l'integrale generale $y(x) = e^{-P(x)}(\int e^{P(x)}q(x)\,dx + k) = \frac{1}{|\sin x|}(-(\operatorname{sign}(\sin x))\cos^2 x + k) = \frac{k}{|\sin x|} - \frac{\cos^2 x}{\sin x}$.
Imponendo la condizione iniziale $y(\frac{\pi}{2}) = y_0$ si ottiene $k = y_0$ e dunque $y(x) = \frac{y_0}{|\sin x|} - \frac{\cos^2 x}{\sin x} = \frac{y_0 - \cos^2 x}{\sin x}$, definita in $]0, \pi[$; imponendo invece la condizione iniziale $y(-\frac{\pi}{2}) = y_1$ si ottiene $k = y_1$ e dunque $y(x) = \frac{y_1}{|\sin x|} - \frac{\cos^2 x}{\sin x} = \frac{-y_1 - \cos^2 x}{\sin x}$, definita in $]-\pi, 0[$. L'unico caso in cui si può sperare di prolungare in $x = 0$, incollandole, le due soluzioni appena trovate è quando $y_0 = 1$ e $y_1 = -1$ (se queste due condizioni non sono soddisfatte contemporaneamente, entrambe oppure una delle due soluzioni divergono quando x tende a 0). In tal caso si ottiene la funzione $\frac{1-\cos^2 x}{\sin x} = \sin x$ sia a sinistra che a destra, e tale funzione può essere ovviamente prolungata come funzione derivabile (anzi, addirittura come funzione $\mathcal{C}^\infty$) in $x = 0$ col valore $\sin 0 = 0$. (D'altra parte, con un po' di occhio, si poteva riconoscere fin da subito che $y(x) = \sin x$ è una soluzione dell'equazione differenziale data.)

(4.h) L'equazione caratteristica è $4\lambda^2 - 4\lambda + 1 = 0$, che ha soluzione doppia $\lambda = \frac{1}{2}$: dunque la soluzione generale dell'equazione omogenea associata $4y'' - 4y' + y = 0$ è data da $y(x) = (A + Bx)e^{\frac{x}{2}}$ al variare di $A, B \in \mathbb{R}$. Cerchiamo ora una soluzione particolare $\tilde{y}(x)$ dell'equazione completa $4y'' - 4y' + y = (x + 1)e^{\frac{x}{2}}$: in questo caso, il metodo dei coefficienti indeterminati ci dice che si potrà trovare del tipo $\tilde{y}(x) = x^2 e^{\frac{x}{2}}(mx + q) = (mx^3 + qx^2)e^{\frac{x}{2}}$. Derivando, si ottiene $\tilde{y}'(x) = (\frac{m}{2}x^3 + (\frac{q}{2} + 3m)x^2 + 2qx)e^{\frac{x}{2}}$ e $\tilde{y}''(x) = (\frac{m}{4}x^3 + (\frac{q}{4} + 3m)x^2 + (2q + 6m)x + 2q)e^{\frac{x}{2}}$, ed imponendo che sia soluzione si trova allora $4\tilde{y}'' - 4\tilde{y}' + \tilde{y} = (24mx + 8q)e^{\frac{x}{2}} = (x + 1)e^{\frac{x}{2}}$, da cui $m = \frac{1}{24}$ e $q = \frac{1}{8}$ e dunque $\tilde{y}(x) = \frac{x^3+3x^2}{24}e^{\frac{x}{2}}$. L'integrale generale dell'equazione completa è dunque $y(x) = (A + Bx + \frac{x^3+3x^2}{24})e^{\frac{x}{2}}$ al variare di $A, B \in \mathbb{R}$, da cui $y'(x) = (\frac{1}{2}A + B + (\frac{1}{2}B + \frac{1}{4})x + \frac{3}{16}x^2 + \frac{1}{48}x^3)e^{\frac{x}{2}}$. Imponendo le condizioni iniziali, si trova $y(0) = A = -2$ e $y'(0) = \frac{1}{2}A + B = 0$, da cui $B = 1$, e dunque finalmente la soluzione $y(x) = \frac{x^3+3x^2+24x-48}{24}e^{\frac{x}{2}}$.

(4.l) (Figura 8) In base a quanto detto, l'intensità della forza propulsiva è data dalla funzione continua $F : [0,8] \to \mathbb{R}$ data da $F(t) = 150(1 - \frac{1}{5}t) = 150 - 30t$ (per $0 \le t \le 5$) e $F(t) \equiv 0$ (per $5 \le t \le 8$). Fissiamo ora un sistema di coordinate ascisse x orientato verso l'alto con il valore $x = 0$ sul suolo. Dall'istante iniziale $t = 0$ all'istante $t = 5$ il moto $x(t)$ obbedisce dunque all'equazione $x'' = -10 - x' + (150 - 30t)$, ovvero $x'' + x' = 140 - 30t$, con condizioni iniziali $x(0) = 0$ e $x'(0) = 0$ (il candelotto parte da terra con velocità nulla). Una prima integrazione dà $x' + x = 140t - 15t^2 + k$ con k da determinare; ma le condizioni iniziali danno necessariamente $k = 0$. Si ottiene allora l'equazione lineare del primo ordine $x' + x = 140t - 15t^2$. Ponendo $p(t) = 1$ e $q(t) = 140t - 15t^2$, una primitiva di $p(t)$ è $P(t) = t$, e $\int e^{P(t)}q(t)\,dt = \int(140t - 15t^2)e^t\,dt = (140t - 15t^2)e^t - \int(140 - 30t)e^t\,dt = (140t - 15t^2)e^t - (140 - 30t)e^t + \int(-30)e^t\,dt = (170t - 15t^2 - 170)e^t$. L'integrale generale è dunque $x(t) = e^{-t}((170t - 15t^2 - 170)e^t + h) = 170t - 15t^2 - 170 + he^{-t}$ con h da determinare; da $x(0) = 0$ si ricava $-170 + h = 0$, ovvero $h = 170$, da cui la soluzione $x(t) = 170(t - 1 + e^{-t}) - 15t^2$. Ribadiamo che questa legge vale solo fino a $t = 5$, in cui l'altezza raggiunta vale $x(5) \sim 306$ m, e la velocità è $x'(5) = [170(1 - e^{-t}) - 30t]_{t=5} \sim 19$ m/sec (corrispondenti a circa 68 km/h).
Dall'istante iniziale $t = 5$ all'istante $t = 8$ la forza propulsiva sparisce, ed il moto $x(t)$ obbedisce dunque all'equazione $x'' = -10 - x'$, ovvero $x'' + x' = -10$, con le nuove condizioni iniziali $x(5) = 306$ m e $x'(5) = 19$ m/sec ereditate dal moto precedente. Procedendo ancora come prima, una prima integrazione dà $x' + x = -10t + k$ con k da determinare, e le condizioni iniziali danno $19 + 306 = -50 + k$, da cui $k = 375$. Si ottiene allora l'equazione lineare del primo ordine $x' + x = -10t + 375$. Ponendo $p(t) = 1$ e $q(t) = 375 - 10t$, una primitiva di $p(t)$ è ancora $P(t) = t$, e $\int e^{P(t)}q(t)\,dt = \int(375 - 10t)e^t\,dt = (375 - 10t)e^t - \int(-10)e^t\,dt = (385 - 10t)e^t$. L'integrale generale è dunque $x(t) = e^{-t}((385 - 10t)e^t + h) = 385 - 10t + he^{-t}$ con h da determinare; da $x(5) = 306$ si ricava $385 - 50 + he^{-5} = 306$, ovvero $h = -29e^5 \sim -4304$, da cui la soluzione $x(t) = 385 - 10t - 4304e^{-t}$, che vale per $5 \le t \le 8$. L'altezza finale raggiunta all'istante dello scoppio, ovvero all'istante dell'inizio dello spettacolo dei fuochi d'artificio, è dunque $x(8) \sim 303$ m. (Terminiamo, per curiosità, con alcune osservazioni. La velocità massima toccata dal candelotto si ha quando $(x'(t))' = x''(t) = 170e^{-t} - 30 = 0$, ovvero dopo $\tilde{t} = \log\frac{17}{3} \sim 1,73$ secondi dalla partenza, quando diventa $x'(\tilde{t}) \sim 88$ m/sec, ovvero circa 317 km/h. L'altezza massima raggiunta durante l'ascesa si ha quando $x'(t) = -10 + 4304e^{-t} = 0$, ovvero dopo $\hat{t} = \log\frac{2152}{5} \sim 6,06$ secondi dalla partenza, alla quota $x(\hat{t}) \sim 314$ m; infatti, all'istante dello scoppio il candelotto sta già scendendo, con velocità $x'(\hat{t}) \sim -8,55$ m/sec, circa -31 km/h. È pure curioso notare che, in base al modello adottato in questo problema, se il candelotto non fosse esploso la velocità di discesa si sarebbe stabilizzata velocemente sui -10 m/sec, circa -36 km/h, raggiungendo nuovamente il suolo quando $385 - 10t - 4304e^{-t} = 0$, ovvero dopo circa $t_1 \sim 38,5$ secondi.)