Prof. Francesca Mantese
Università di Verona, 2018/2019
Corso di Laurea in Matematica Applicata

Esercizi per il Corso di

ALGEBRA LINEARE ED ELEMENTI DI GEOMETRIA

Foglio 8
11 Gennaio 2019

1. Si consideri l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito da $f(x, y, z) = [x - z - y, 3y - x + z, x - 2z]^T$
   (a) Scrivere la matrice A associata a f rispetto alla base canonica $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3\}$ su dominio e codominio.
   (b) f è un isomorfismo?
   (c) Si consideri la base $\mathcal{B} = \{e_1, e_1 + e_3, e_2 - e_3\}$ di $\mathbb{R}^3$. Scrivere la matrice associata a f rispetto alla base canonica sul dominio e la base $\mathcal{B}$ sul codominio.

(6 punti)

2. Si consideri la base $\mathcal{B} = \{(1,\ 0,\ 1)^T, (0,\ 1,\ 0)^T, (1,\ 1,\ 2)^T\}$ di $\mathbb{R}^3$. Si consideri l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ che rispetto alla base $\mathcal{B}$ su dominio e codominio ha matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

   (a) trovare la matrice di f rispetto alla base canonica su dominio e codominio
   (b) trovare la matrice di f rispetto alla base $\mathcal{B}$ sul dominio e alla base canonica sul codominio
   (c) trovare la matrice di f rispetto alla base canonica sul dominio e alla base $\mathcal{B}$ sul codominio
   (d) Trovare $\ker f$ e $\mathrm{Im} f$

(6 punti)

3. Sia $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ una base di $\mathbb{R}^3$ e sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da $f(v_1) = v_1 - v_3$, $f(v_2) = v_2 - v_3$, $f(v_3) = v_1 + 2v_2$.
   (a) trovare la matrice associata a f rispetto alla base $\mathcal{B}$ su dominio e codominio.
   (b) L'applicazione lineare f è iniettiva? È surettiva?
   (c) Esiste una applicazione lineare $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $f \circ g$ sia l'applicazione identica? si trovi una matrice associata a g.
   (d) Esiste una applicazione lineare $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $h \circ f$ sia l'applicazione identica? Si esprima $h(v_1)$, $h(v_2)$ e $h(v_3)$ come combinazione lineare di v_1, v_2 e v_3.

(6 punti)

4. (a) Si determini una applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $(0,\ 1, 1)^T \in \ker(f)$, $(2,\ 0,\ -1) \in \mathrm{Im} f$, $(0,\ 1,\ 2) \in \mathrm{Im} f$.
   (b) Si scriva la matrice di f rispetto alla base canonica su dominio e codominio.
   (c) Si trovi $\ker(f)$ e $\mathrm{Im} f$

(6 punti)

5. Si consideri al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ la famiglia di applicazioni lineari $T_\alpha : \mathbb{R}^3 \longrightarrow M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ definite da $T_\alpha(x, y, z) = \begin{bmatrix} x + \alpha y & 0 \\ z & x - \alpha y \end{bmatrix}$.
   (a) Scrivere la matrice associata a T_α rispetto alle basi canoniche degli spazi in questione.
   (b) Determinare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, $\ker(T_\alpha)$ e $\mathrm{Im}(T_\alpha)$.
   (c) Data la matrice $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, trovare un vettore $v \in \mathbb{R}^3$ tale che $T_\alpha(v) = B$.

(6 punti)

Consegna: venerdì 18 Gennaio