Esercizi di Geometria Affine

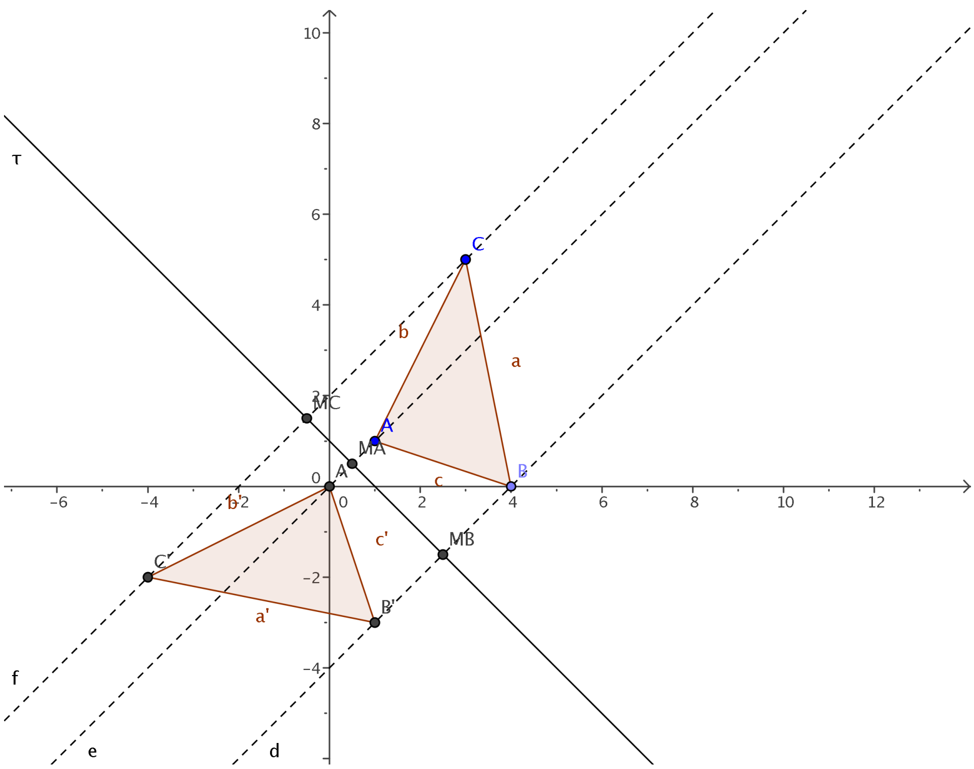
Sansonetto Nicola*

22 dicembre 2014

Geometria Affine nel Piano

Esercizio 1. Nel piano affine standard $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ dotato del riferimento canonico, si consideri la retta τ di equazione affine $y + x = 1$ e il triangolo T di vertici $A : (1, 1)$, $B : (4, 0)$ e $C : (3, 5)$. Determinare il simmetrico di T rispetto alla retta τ nella direzione ortogonale a τ. L'applicazione così ottenuta è un'affinità? In caso affermativo determinare la forma della trasformazione.

Sol. La direzione ortogonale a τ è data dal sottospazio direttore $n = \langle \vec{\eta} = [1 \quad 1]^T \rangle$.



Consideriamo il punto A e determiniamone il simmetrico rispetto a τ nella direzione di n. La retta r_A per il punto A e ortogonale a τ ha equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + t \end{cases}$$

*Dipartimento di Matematica, Università degli Studi di Padova via Trieste 65, 35121 Padova, email: sanson@math.unipd.it

Il punto $M_A = r_A \cap \tau$ di intersezione tra la retta r_A e la retta τ è ottenuto per il valore $\bar{t} = \frac{1}{2}$ del parametro t. Quindi il simmetrico A' di A è
$$A' = A + 2\bar{t}\,\vec{\eta} = A + \vec{\eta} = (0, 0)$$
Procedendo in maniera analoga si ottengono i simmetrici dei punti B e C: $B' : (1, -3)$ e $C' : (-4, -2)$.

Per vedere se la trasformazione in questione è una trasformazione affine vediamo direttamente se essa può essere posta nella forma $P' = \vec{b} + MP$, in cui P e P' sono punti di $\mathbb{A}^2$, $\vec{b}$ è un vettore dello spazio direttore $\mathbb{R}^2$ e M è una matrice 2×2 a coefficienti reali. Sia $P = (x_P, y_P)$ il generico punto di $\mathbb{A}^2$. La retta r_P per P nella direzione di n ha equazioni parametriche
$$\begin{cases} x = x_P + t \\ y = y_P + t \end{cases}$$
mentre il punto di intersezione tra la retta r_P e la retta τ è individuato per il valore $\bar{t} = \frac{1-x_P-y_P}{2}$ del paramentro t. Quindi il simmetrico P' del punto P rispetto alla retta t nella direzione di n è
$$P' = P + \bar{t}\,\vec{\eta}$$
Esplicitando le coordinate
$$\begin{cases} x_{P'} = 1 - y_P \\ y_{P'} = 1 - x_P \end{cases}$$
e quindi
$$P' = \vec{b} + M\,P$$
in cui $\vec{b} = [1 \quad 1]^T$ e $M = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$. E quindi la trasfrmazione in considerazione è affine ed è un'affinità, poiché il rango di M è massimo.[1]

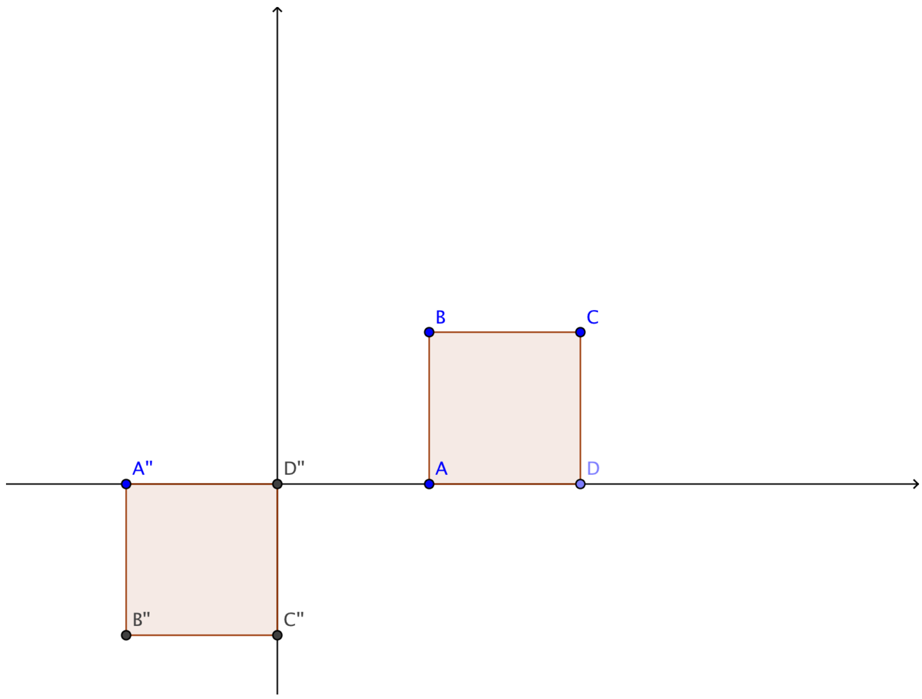
Esercizio 2. Dire se la matrice
$$\Lambda = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$
è la matrice unificata di un'affinità del piano affine standard in cui è scelto un sistema di riferimento $\mathcal{R}$, e in tal caso determinare l'immagine del triangolo di vertici $A(1, 1)$, $B(0, 1)$ $C(1, 0)$.

Esercizio 3. Determinare due matrici A e B diagonalizzabili tali che il loro prodotto AB non sia diagonalizzabile.

Esercizio 4. Nel piano affine standard $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ dotato del riferimento canonico si consideri la mappa
$$\begin{aligned} A(0,0) &\longmapsto A'(-1,0) \\ B(1,1) &\longmapsto B'(-2,-1) \\ C(2,1) &\longmapsto C'(-3,-1) \end{aligned}$$
Determinare in due modi differenti la matrice dell'affinità definita dalla mappa precedente.

Esercizio 5. Descrivere, in relazione alla figura, due possibili affinità che mandano il quadrato $ABCD$ nel quadrato $A''B''C''D''$.

[1]Nel linguaggio dei gruppi, $M \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$



Di che tipo di affinità si tratta?

Esercizio 6. Nel piano affine standard $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ dotato del riferimento canonico , determinare il simmetrico del triangolo T di vertici $A(0,1)$, $B(3,0)$ e $C(2,2)$ rispetto alla retta t di equazione $2x + y + 1 = 0$, nella direzione individuata dalla retta r di equazione $x - 3y - 3 = 0$ e scrivere la matrice della corrispondente affinità. Calcolare, inoltre, l'area del triangolo T e del trasformato T'.

Esercizio 7. Nello spazio affine standard $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ dotato del riferimento canonico

(i) Determinare i simmetrici A' e B' dei punti $A(2,3,1)$ e $B(-1,2,1)$, rispetto al punto $C(1,-1,1)$.

(ii) Determinare l'area del poligono (non convesso) $ABCA'B'$.

Esercizio 8. Esiste un'affinità che mappa un'ellisse in una circonferenza? Giustificare la risposta e trovare un controesempio in caso di risposta negativa, la (eventuale) soluzione generale in caso di risposta affermativa.

Geometria affine ed euclidea dello spazio

Esercizio 9. Nello spazio euclideo reale $\mathbb{E}^3$ si considerino le rette

$$r : \begin{cases} x - y + z = 2 \\ x + z = 0 \end{cases} \qquad s : \begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ x - z = 0 \end{cases}$$

A. Verificare che le rette r e s sono sgembe e calcolarne la mutua distanza. Determinare, inoltre, i punti R e S, rispettivamente su r e s, di minima distanza.

B. Dato il punto $A = (1,0,0)$, scrivere l'equazione della retta h per A e incidente sia r che s.

C. Scrivere l'equazione del cilindro $\mathcal{C}$ avente la retta s come asse e tangente alla retta r. Determinare i punti P e Q di intersezione tra il cilindro e la retta h.

D. Determinare il volume del tetraedro $SPQR$.

Sol. A. In primo luogo scriviamo le equqzioni parametriche di r e s:

$$r : \begin{cases} x = t \\ y = -2 \quad t \in \mathbb{R} \\ z = -t \end{cases} \qquad s : \begin{cases} x = u \\ y = 1 \quad u \in \mathbb{R} \\ z = u \end{cases}$$

Dalle equazioni paramentriche emerge semplicemente che r e s non sono nè parallele nè incidenti. Non sono parallele perché i loro spazi direttori, $\vec{v}_r = [1 \quad 0 \quad -1]^T$ e $\vec{v}_s = [1 \quad 0 \quad 1]^T$ non sono proporzionali, e non sono incidenti perchṕer alcun valore dei parametri t e u $P_r = (t, -2, -t)$ coincide con $P_s = (u, 1, u)$.

Un altro modo di vedere ciò lo si fa considerando i due vettori direttori $\vec{v}_r$ e $\vec{v}_s$ di r e s rispettivamente e un qualsiasi vettore con un estremo in r e uno in s e poi vedere se questi tre vettori sono linearmente indipendenti. Prendiamo $\overrightarrow{AB}$ il vettore di estremi $A = (0, -2, 0)$ e $B = (0, 1, 0)$, in r e s rispettivamente. È allora semplice verificare che la matrice

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

che ha per colonne i vettori $\overrightarrow{AB}$, $\vec{v}_r$ e $\vec{v}_s$ ha rango massimo.

I punti di minima distanza tra le rette r e s sono quei punti R e S tali per cui il vettore $\overrightarrow{RS}$ è ortogonale sia alla retta r che alla retta s:

$$\langle \overrightarrow{RS} | \vec{v}_r \rangle = 0$$
$$\langle \overrightarrow{RS} | \vec{v}_s \rangle = 0$$

e ciò si ottiene per $t = 0$ e $u = 0$. Per cui $R = (0, -2, 0)$ e $S = (0, 1, 0)$. Infine $d(r, s) = d(R, S) = \|\overrightarrow{RS}\| = 3$

B. La retta h si ottiene come intersezione di un piano per r e di un piano per s entrambi passanti per il punto A. Consideriamo quindi i fasci di piani $\mathcal{F}_r$ e $\mathcal{F}_s$ di asse r e s, rispettivamente:

$$\lambda(x - y + z - 2) + \mu(x + z) = 0, \qquad (\lambda, \mu) \neq (0, 0)$$
$$\alpha(x + 2y - z - 2) + \beta(x - z) = 0, \qquad (\alpha, \beta) \neq (0, 0)$$

Imponiamo il passaggio per A ottenendo $\mu = \lambda$ e $\alpha = \beta$. Per cui

$$h : \begin{cases} 2x - y + 2z = 2 \\ x + y - z = 1 \end{cases}$$

C. Il cilindro $\mathcal{C}$ è il luogo geometrico dei punti $X = (x, y, z)$ dello spazio aventi distanza pari a 3[2] dalla retta s:

$$d(X, s) = \frac{\|\overrightarrow{P_s X} \times \vec{v}_s\|}{\|\vec{v}_s\|} = 3$$

in cui $P_s = (u, 1, u)$. Sviluppando si ricava che l'equazione del cilindro $\mathcal{C}$ è

$$(x - z)^2 + 2\,(y - 1)^2 = 18$$

I punti P e Q di intersezione tra il cilindro $\mathcal{C}$ e la retta h sono le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} (x - z)^2 + 2\,(y - 1)^2 = 18 \\ x = -1 - t \\ y = 4t \\ z = 3t \end{cases}$$

da cui $P = \left(\frac{3-\sqrt{6}}{4}, 1 + \sqrt{6}, \frac{3+3\sqrt{6}}{4}\right)$ e $Q = \left(\frac{3+\sqrt{6}}{4}, 1 - \sqrt{6}, \frac{3-3\sqrt{6}}{4}\right)$

[2] Grazie alla condizione di tangenza.

D. Il volume del tetrardro è

$$\mathrm{vol}(SPQR) = \frac{1}{6} \, \| \langle \overrightarrow{SR}, \overrightarrow{SP} \times \overrightarrow{SQ} \rangle \| = \frac{3\sqrt{6}}{8}$$

Esercizio 10. Nello spazio euclideo reale $\mathbb{E}^3$ in cui sia fissato un sistema di riferimento cartesiano si considerino il punto $P : (0, 0, 1)$ e il piano $\pi : \quad 2z - x = 0$.

1. Determinare la proiezione ortogonale P' a P su π.
2. Determinare la proiezione M di P su π lungo la direzione $V = \langle \vec{v} = [1 \quad 1 \quad -1]^T \rangle$.
3. Calcolare l'area del triangolo $OP'M$, in cui O è l'origine del sistema di riferimento.
4. Detto R il simmentrico di P rispetto a π lungo V, determinare il volume del tetraedro $OPRP'$.

Sol. 1. Determiniamo la retta r per P e ortogonale a π; P' sarà quindi dato dall'intersezione tra tale retta e il piano π. Tale retta ha direzione parallela al vettore $\vec{n}_\pi = [1 \quad 0 \quad -2]^T$, e quindi

$$r : \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 1 - 2t \end{cases}$$

Ora $P' = r \cap \pi$ e cioè $t = \frac{2}{5}$ e quindi $P' = \left(\frac{2}{5}, 0, \frac{1}{5}\right)$.

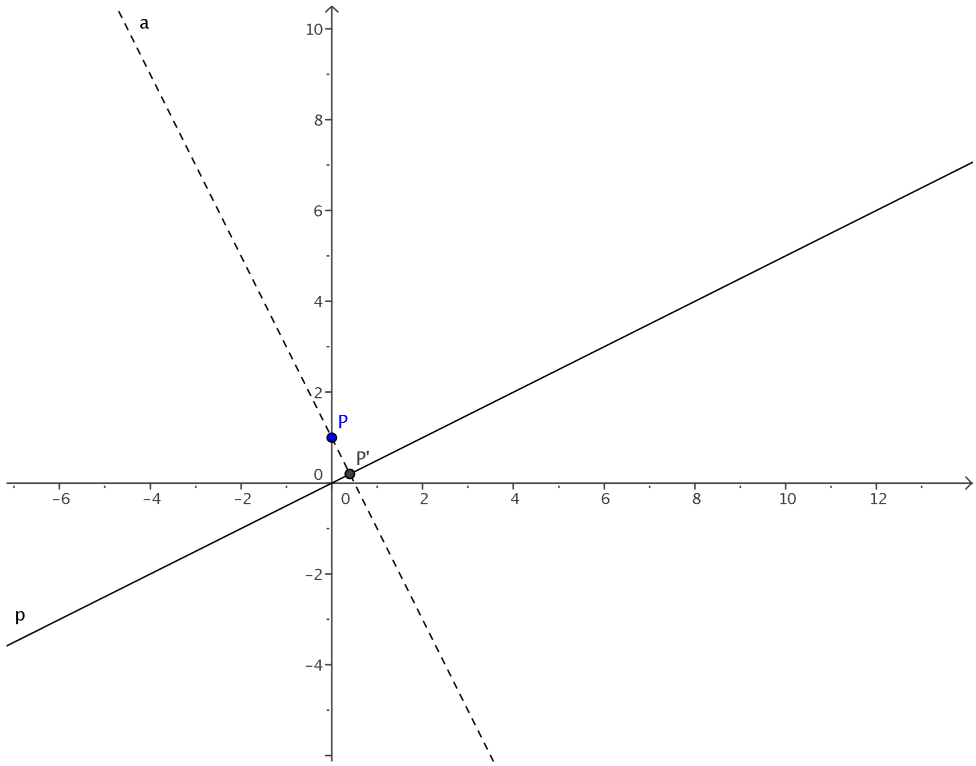


Figura 1: Sezione sul piano (x, z)

2. Consideriamo ora la retta r' per P e nella direzione di $\vec{v}$:
$$r' : \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 1 - t \end{cases}$$
Ora $M = \pi \cap r'$ e cioè $t = \frac{2}{3}$ e quindi $M = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

3. A questo punto calcolare l'area del triangolo $OP'M$:
$$S_{OP'M} = \frac{1}{3} \|\overrightarrow{OP'} \times \overrightarrow{OM}\| = \frac{\sqrt{5}}{15}$$

4. Per determinare il volume di $OP'RP$ non è necessario determinare R (vedi figura), infatti
$$\text{vol}(OP'RP) = \text{vol}(OPMP') + \text{vol}(OP'MP) = 2\,\text{vol}(OPMP') = 2S_{OP'M}\,PP' = \frac{4}{45}$$

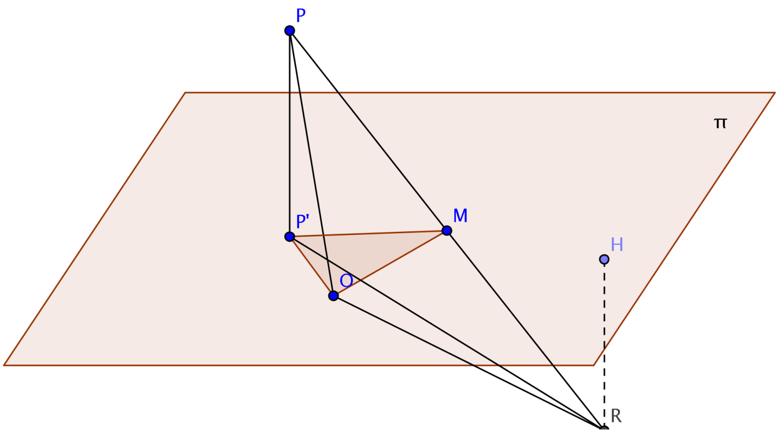


Figura 2: Tetraedro $OP'RP$

Esercizio 11. Nel piano euclideo reale, in cui sia fissato un riferimento cartesiano, si considerino le rette
$$r : \begin{cases} x - y = 0 \\ y - z + 3 = 0 \end{cases}, \qquad s : \begin{cases} x - 2y + 2 = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$$

1. Scrivere le equazioni parametriche di r e s.
2. Determinare i vettori direttori $\vec{v}_r$ e $\vec{v}_s$ di r e s, rispettivamente, quindi determinare la mutua posizione di r e s.
3. Determinare la distanza di r da s.
4. Sia $P = (0, 0, 3)$ un punto appartenente a r. Determinare le distanza di s da P.
5. Determinare la retta t passante per P e contenente il segmento di minima distanza di r da s.

Esercizio 12. Nello spazio euclideo reale $\mathbb{E}^3$ in cui sia fissato un sistema di riferimento cartesiano si considerino la retta di equazioni parametriche

$$r: \quad \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 3t \\ z = 2t \end{cases}$$

e il piano $\pi: \; x + y = 0$.

1. Determinare la retta p proiezione di r su π lungo la direzione $W = \langle \vec{w} = [0 \quad 1 \quad 1]^T \rangle$.
2. Sia π' il piano individuato da r e da p. Si considerino i due piani del fascio di asse p che formano con π' angoli di $\frac{\pi}{3}$.
3. Detti λ e μ i piani di cui al punto 2., determinare i loro piani bisettori.

Sol.

1. In primo luogo osserviamo che la retta r e il piano π non sono paralleli, infatti $\vec{v}_r = [1 \quad 3 \quad 2]^T$ e $\vec{n}_\pi = [1 \quad 1 \quad 0]^T$, che non sono ortogonali. Scriviamo l'equazione del fascio di piani $\mathcal{F}_r$ di asse r. Scriviamo le equazioni affini per r
$$r: \begin{cases} 3 - y - 3 = 0 \\ 2y - 3z = 0 \end{cases}$$
da cui il fascio $\mathcal{F}_r$ è dato da
$$\xi\,(2y - 3z) + \eta\,(3x - y - 3) = 0$$
Consideriamo ora il piano π' del fascio che sia parallelo ala direzione $\vec{w} = [0 \quad 1 \quad 1]^T$. Tale piano è individuato dalla condizione
$$\langle \vec{w} | \vec{n}_{\mathcal{F}} \rangle = 0$$
che porge $\eta = -\xi$. Prendendo $\eta = -1$ e quindi $\xi = 1$ si ottiene l'equazione di π'
$$\pi': \; x - y + z - 1 = 0$$
Per cui la retta $p = \pi' \cap \pi$ proiezione di r su π è definita da
$$p: \begin{cases} x - y + z - 1 = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$$

2. Consideriamo ora il fascio $\mathcal{F}_p$ di asse p, $\lambda(x - y + z - 1) + \mu(x + y) = 0$, $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$. I piani cercati sono quelli per cui
$$\cos(\mathcal{F}_p, \pi') = \frac{\langle \vec{n}_{\mathcal{F}_p} | \vec{n}_{\pi'} \rangle}{\|\vec{n}_{\mathcal{F}_p}\| \, \|\vec{n}_{\pi'}\|} = \frac{1}{2}$$
Sostituendo si ricava l'equazione
$$\frac{3\lambda}{\sqrt{3\lambda^2 + 2\mu^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
Sicuramente deve essere $\lambda \neq 0$, allora dividiamo tutto per λ e poniamo $\kappa^2 = \frac{\mu^2}{\lambda^2}$, da cui si ricava $\kappa = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ oppure $\kappa = -\frac{3\sqrt{2}}{2}$. I due piani cercati sono quindi
$$\lambda: x - y + z - 1 + \frac{3\sqrt{2}}{2}(x + y) = 0$$
$$\mu: x - y + z - 1 - \frac{3\sqrt{2}}{2}(x + y) = 0$$

3. Ovviamente π' biseca λ e μ. L'altro piano è il piano del fascio $\mathcal{F}_p$ ortogonale a π' che π.

Esercizio 13. 1. Scrivere l'equazione affine del piano π ortogonale al piano π' di equazione affine $x-y+2z = 0$ e contenente la retta

$$r : \begin{cases} x + 2y = 3 \\ x - z = 1 \end{cases}$$

2. Scrivere le equazioni parametriche di r.

3. Determinare i punti di che hanno distanza $\sqrt{6}$ dalla retta $s = \pi \cap \pi'$.

4. Scrivere le equazioni di π nel sistema di riferimento determinato dai punti $Q_0 = (1, 1, 0)$, $Q_1 = (2, 0, 2)$, $Q_2 = (1, 3, 1)$ e $Q_3 = (6, 2, -2)$.

Sol. 1. Il piano π è parallelo alla direzione $\vec{n}_{\pi'} = [1 \quad -1 \quad 2]^T$ ortogonale a π'. Inoltre π è un piano del fascio di piani $\mathcal{F}_r$ di asse r di equazione $x(\lambda+\mu)+2\lambda y-\mu z-(3\lambda+\mu) = 0$. Quindi π è li piano del fascio la cui direzione ortogonale $\vec{n}_\pi$ é ortogonale a $\vec{n}_{\pi'}$

$$\langle (\lambda + \mu, 2\lambda, -\mu) | \vec{n}_{\pi'} \rangle = 0$$

Da cui si ricava $\lambda = -\mu$. Prendendo $\lambda = 1$ si ottiene $\pi : 2y + z - 2 = 0$.

2. Le equazioni parametriche di r sono

$$r : \begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = t \qquad\qquad t \in \mathbb{R} \\ z = 2 - 2t \end{cases}$$

3. Ricordiamo che $\pi \perp \pi'$, quindi, dal momento che $s = \pi \cap \pi'$, per ogni punto P di π, $d(P, s) = d(P, \pi')$. In particolare ciò vale per i punti di r. Usando la distanza punto/piano si ottiene $\sqrt{6} = d(P, s) = d(P, \pi') = \frac{\langle P|\vec{n}_{pi'} \rangle}{\|\vec{n}_{\pi'}\|} = \frac{|7-7t|}{\sqrt{6}}$. Da cui $t = \frac{1}{7}$ oppure $t = \frac{13}{7}$.

4. Il nuovo sistema di riferimento centrato in Q_0 ha come direzioni coordinate i vettori $Q_1 - Q_0$, $Q_2 - Q_0$ e $Q_3 - Q_0$. Quindi il cambiamento di sistema di coordinate è dato dalla trasformazione affine

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}$$

Sostituendo nell'equazione di π le espressioni di x, y e z in funzione di X, Y e Z si ricava che l'equazione di π rispetto al nuovo sistema di rifermento

$$\pi : Y = 0$$

Osserviamo, d'altra parte, che ciò era immediato, dal momento che π passa per il punto Q_0 ed è ortogonale al vettore $Q_2 - Q_0 = [0 \quad 2 \quad 1]^T$.

Esercizio 14. Nello spazio euclideo siano date le rette

$$r : \begin{cases} x + y = 0 \\ y + z + 3 = 0 \end{cases}, \qquad s : \begin{cases} x - 4y + 4 = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$$

(i) Determinare la retta ℓ passante per $P(1, 0, 1)$, incidente ad r e ortogonale ad s.

(ii) Le rette ℓ e s sono complanari? Giustificare la risposta.

(iii) Calcolare la distanza tra ℓ ed s.

(iv) Sia s' la retta per P e parallela ad s. Determinare le equazioni di s nel sistema di riferimento in cui l'asse X è la retta ℓ e l'asse Y è la retta s'. (Chi è l'asse Z?)

Esercizio 15. Nello spazio euclideo si considerino i vettori $\vec{v} = [1 \quad 1 \quad 1]^T$ e $\vec{w} = [2 \quad 2 \quad 1]^T$.

(i) Si decomponga il vettore $\vec{v}$ come somma di $\vec{v}_1 + \vec{v}_2$ in cui $\vec{v}_1$ è ortogonale a $\vec{w}$ e v_2 è parallelo a $\vec{w}$.

(ii) Si determinino le superfici dei due parallelogrammi aventi come lati i vettori $\vec{v}\,\vec{v}_1$ (primo parallelogramma) e $\vec{v}\,\vec{v}_2$ (secondo parallelogramma).

(iii) Le due superfici del punto precedente risultano uguali: dire se si tratta di un risultato generale (indipendente dai vettori $\vec{v}$ e $\vec{w}$ dati), ed eventualmente giustificarlo e darne un'interpretazione in termini di geometria (piana) euclidea.

Esercizio 16. Nello spazio euclideo si consideri il piano $\pi' : \; x + y = 0$, e la retta

$$r : \begin{cases} x - y - z = 1 \\ 2y + z = 0 \end{cases}$$

(i) Determinare la retta r' ottenuta proiettando r nella direzione $W = \langle [1 \quad 0 \quad 1]^T \rangle$.

(ii) Data la retta s di equazione

$$s : \begin{cases} x = -\mu + 1 \\ y = \mu \\ z = 1 \end{cases} \qquad \mu \in \mathbb{R}$$

determinare la sua posizione rispetto a r e determinare il piano π che le due rette individuano.

(iii) Determinare la retta s', ottenuta proiettando s su π' nella direzione di W.

(iv) Dato il piano $\sigma : \; x - y + z = 0$, determinare le coordinate dei punti $R = \sigma \cap r$, $S = \sigma \cap s$, $R' = \sigma \cap r'$, $S' = \sigma \cap s'$.

(v) Effettuare un disegno approssimativo della situazione.

(vi) Detti T e T' i punti che si ottengono intersecando r con s e r' con s', rispettivamente, calcolare il volume del solido $RSTR'S'T'$.