

## V.C. RETTANGOLARE o UNIFORME

La **v.c. continua RETTANGOLARE o UNIFORME** descrive il modello probabilistico dell'*equiprobabilità*.

$$X \in [a, b]$$

con densità di probabilità associata:

$$P(x) = \frac{1}{b-a}$$

con  $P(x)$  costante.

Sono soddisfatte le due condizioni affinché  $X$  sia una v.c.; infatti:

1) La funzione di probabilità  $p(x)$  è non negativa:  $\mathbf{p(x) \geq 0}$ ;

$$2) \int_a^b p(x) dx = 1$$

$$M(X) = \frac{a+b}{2}$$

$$VAR(X) = M(X^2) - M^2(X) = \frac{a^2 + ab + b^2}{3} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$$

MODA(X): la distribuzione Uniforme è zeromodale.

$$Med(X) = \frac{a+b}{2}$$

# V.C. NORMALE

## ESERCIZI RIGUARDANTI LA V.C. NORMALE

### ESERCIZIO

Il 10° e l'80° percentile di una variabile casuale Normale X valgono rispettivamente  $x_{10\%}=187,2$  e  $x_{80\%}=208,4$ .

- Determinare Media e Varianza di X;
- Indicare la densità di probabilità di X;
- Trovare i *quartili*;

Calcolare:

- $P[(x < 190) \cap (x > 204)]$
- $P[(x < 190) \cup (x > 204)]$
- $P(x > 196)$

### SOLUZIONI

- Si imposta il seguente sistema:

$$u_{10\%} = \frac{187,2 - \mu}{\sigma}$$

$$u_{80\%} = \frac{208,4 - \mu}{\sigma}$$

Sulle tavole di  $u$  si trovano i percentili della v.c. normale standardizzata:

$$-1,28 = \frac{187,2 - \mu}{\sigma}$$

$$+0,84 = \frac{208,4 - \mu}{\sigma}$$

Si ha quindi un sistema di 2 equazioni nelle 2 incognite  $\mu$  e  $\sigma$ , facilmente risolvibile:

$\mu=200$ ;  $\sigma=10$ .

- La densità di probabilità di tale v.c. normale è la seguente:

$$P(x) = \frac{1}{10\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-200)^2}{2 \cdot 10^2}} = 0,04 e^{-\frac{(x-200)^2}{200}}$$

c) Il 1° Quartile coincide con il 25° percentile. Per determinare il 25° percentile della v.c. Normale in considerazione, si trova sulle tavole il 25° percentile della v.c. Normale Standardizzata e poi si utilizza la formula di standardizzazione:

$$u_{25\%} = -0,67 = \frac{Q_1 - 200}{10} \text{ da cui } Q_1 = 193,3$$

Il 2° Quartile, ovvero 50° percentile, ovvero Mediana, trattandosi di una v.c. Normale, coincide con la media aritmetica:

$$Q_2 = \text{Med}(x) = M(x) = 200$$

Il 3° Quartile, ovvero 75° percentile, si determina in modo analogo a quanto fatto per il 1° Quartile:

$$u_{75\%} = +0,67 = \frac{Q_3 - 200}{10} \text{ da cui } Q_3 = 206,7$$

Il 4° Quartile è il termine di una distribuzione che lascia prima di sé il 100% della distribuzione. Quindi, poiché la v.c. Normale è definita da  $+\infty$  a  $-\infty$ , sarà:

$$Q_4 = x_{100\%} = +\infty$$

d)  $P[(x < 190) \cap (x > 204)] = 0$  essendo la probabilità di un evento *impossibile*: infatti è impossibile che la variabile X possa assumere valori inferiori a 190 e contemporaneamente valori maggiori di 204.

e)  $P[(x < 190) \cup (x > 204)] = P(x < 190) + P(x > 204) =$

$$= P\left(u < \frac{190 - 200}{10} = -1\right) + P\left(u > \frac{204 - 200}{10} = 0,4\right) =$$

$$= (0,50 - 0,3413) + (0,50 - 0,1554) = 0,5033$$

$$f) P(x > 196) = P\left(u > \frac{196 - 200}{10} = -0,4\right) = 0,1554 + 0,5 = 0,6554$$

ESERCIZIO riguardante la trasformazione lineare di una v.c. normale (es.3-1/06/2009)

Un'azienda negozia un prodotto X che acquista a €12 il kg sostenendo costi fissi mensili per €1500. Sapendo che tale prodotto è poi rivenduto a €20 il kg e che la quantità X di prodotto mensilmente commercializzata è distribuita normalmente con media 250 kg e s.q.m. 25 kg,

- Descrivere la funzione di Costo mensile C, la funzione di Ricavo mensile R e la funzione di Profitto mensile P ( differenza fra ricavo e costo);
- Indicare la distribuzione di probabilità con i rispettivi parametri della funzione di profitto P e rappresentarla graficamente;
- Determinare la quantità minima mensile da vendere per non perdere e la probabilità di non raggiungere tale minimo;

- d) Determinare l'intervallo entro cui si dovrebbe collocare, con *pratica certezza*, il profitto mensile.

## SOLUZIONI

a)  $C = \text{costi fissi} + \text{costi variabili} = 1500 + 12X$

$$R = 20X$$

$$P = R - C = 20X - (1500 + 12X) = -1500 + 8X \quad (:\text{ trasformazione lineare di } X)$$

- b) Essendo la v.c.  $P$  trasformazione lineare di  $X$ , v.c. Normale di media  $M(x)=250$  e  $\sigma(x)=25$ , allora  $P$  è una v.c. Normale di media  $M(P)=-1500+8*250=500$  e  $V(P)=8^2*25^2=40000$ ; da cui  $\sigma(P)=8*25=200$ .

- c) la quantità minima mensile da vendere per non perdere si ha quando i ricavi uguagliano i costi:

$$R = C \text{ quindi } P = R - C = 0:$$

$$-1500 + 8X = 0 \text{ da cui } x = \mathbf{187,5 \text{ kg}}$$

$$P(x=187,5) = P\left(u < \frac{187,5 - 250}{25}\right) = P(u < -2,5) = 0,50 - 0,4938 = 0,0062$$

- d)  $99,74\% = P(m - 3\sigma < P < m + 3\sigma) = P(500 - 3*200 < P < 500 + 3*200) = P(-100 < P < 1100)$

## ESERCIZIO riguardante la somma di v.c. Normali (es.2-1/06/1998)

Il peso  $X$  delle confezioni di caffè di una certa ditta si distribuisce normalmente con media  $m=200\text{g}$ . e  $\sigma=10\text{g}$ .

Per la distribuzione queste confezioni vengono imballate in colli di 100 pezzi ciascuno. Se indichiamo con  $Y$  il peso di ciascun collo e sappiamo che i pesi delle confezioni sono indipendenti fra loro, determinare:

- Il peso medio e la varianza di ogni collo  $Y$ ;
- La distribuzione di probabilità di  $Y$ ;
- Il 99° percentile di  $X$  e il 5° percentile di  $Y$ ;
- $P(Y < 19,8\text{kg})$ ;  $P(Y > 21\text{kg})$ .

## SOLUZIONI

- a)  $Y$  è la somma di 100 v.c. Normali indipendenti  $X$  ( $m=200\text{g}$ ;  $\sigma=10\text{g}$ ), quindi  $Y$  si distribuisce normalmente con media  $M(Y)=100*200=20000\text{g}=20\text{kg}$  (la media della somma è uguale alla somma delle medie) e con  $V(Y)=100*10^2=10000$  (la varianza della somma è uguale alla somma delle varianze), da cui:  $\sigma(Y)=100\text{g}$ .

$$b) P(Y) = \frac{1}{100\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-20000)^2}{2 \cdot 10000}}$$

c)  $x_{99\%}$

$$u_{99\%} = \frac{x_{99\%} - m_x}{\sigma_x} = \frac{x_{99\%} - 200}{10} = +2,33$$

Da cui:  $x_{99\%} = 200 + 2,33 \cdot 10 = 233,3g$ .

$y_{5\%}$

$$u_{5\%} = \frac{y_{5\%} - m_y}{\sigma_y} = \frac{y_{5\%} - 20000}{100} = -1,64$$

Da cui:  $y_{5\%} = 20000 - 1,64 \cdot 100 = 19836g$ .

d)  $P(Y < 19,8kg) = P(Y < 19800g.) =$

$$= P(u < \frac{19800 - 20000}{100} = -2) = 0,50 - 0,4772 = 0,0228$$

$P(Y > 21kg) = P(Y > 21000g.) =$

$$= P(u > \frac{21000 - 20000}{100} = +10) = 0,50 - 0,50 = 0$$

## Utilizzo delle **TAVOLE** della v.c. “**t di Student**”

La v.c.  $t$  assume i valori nel campo reale:

$$t \in (-\infty, +\infty)$$

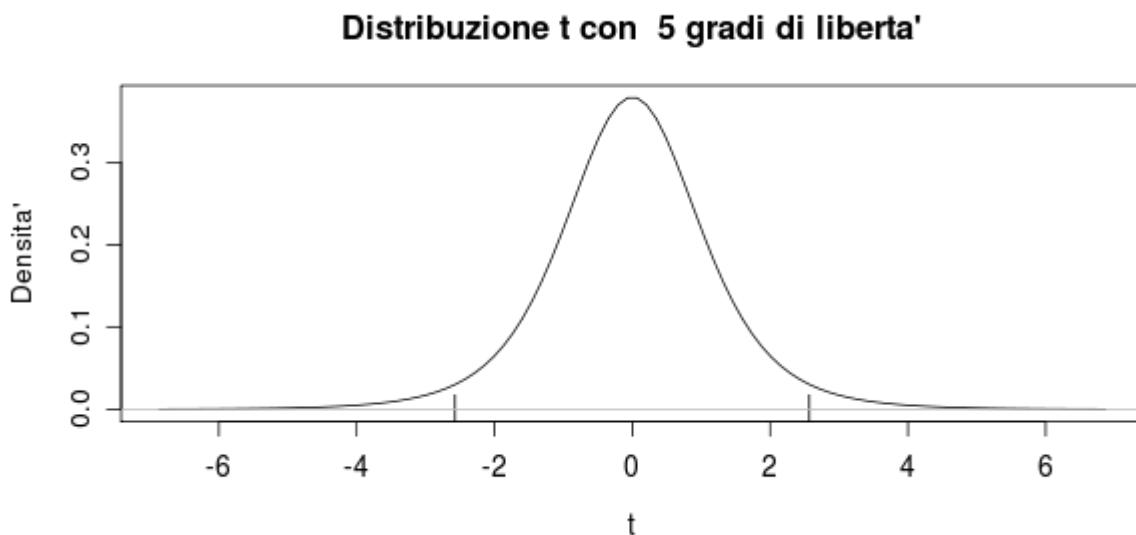
Con densità di probabilità  $P(t)=\dots$ . Si tratta di una distribuzione campanulare e simmetrica centrata sullo *zero*.

L'unico parametro di definizione di  $t$  è  $v=n-1$  ( $v$  esprime i *Gradi di libertà*).

$$M(t)=0$$

$$V(t) = \frac{v}{v-2}$$

$$\sigma_t = \sqrt{\frac{v}{v-2}}$$



Quando  $v$  è abbastanza elevato ( $v \rightarrow +\infty$ , ovvero nella pratica quando  $v > 30$ ) la v.c.  $t$  di Student converge alla v.c. Normale Standardizzata.

## Utilizzo delle **TAVOLE** della v.c. “chi-quadrato”

$$\chi^2 \in [0, +\infty)$$

Con densità di probabilità  $P(\chi^2)=\dots$ . Si tratta di una distribuzione campanulare asimmetrica.

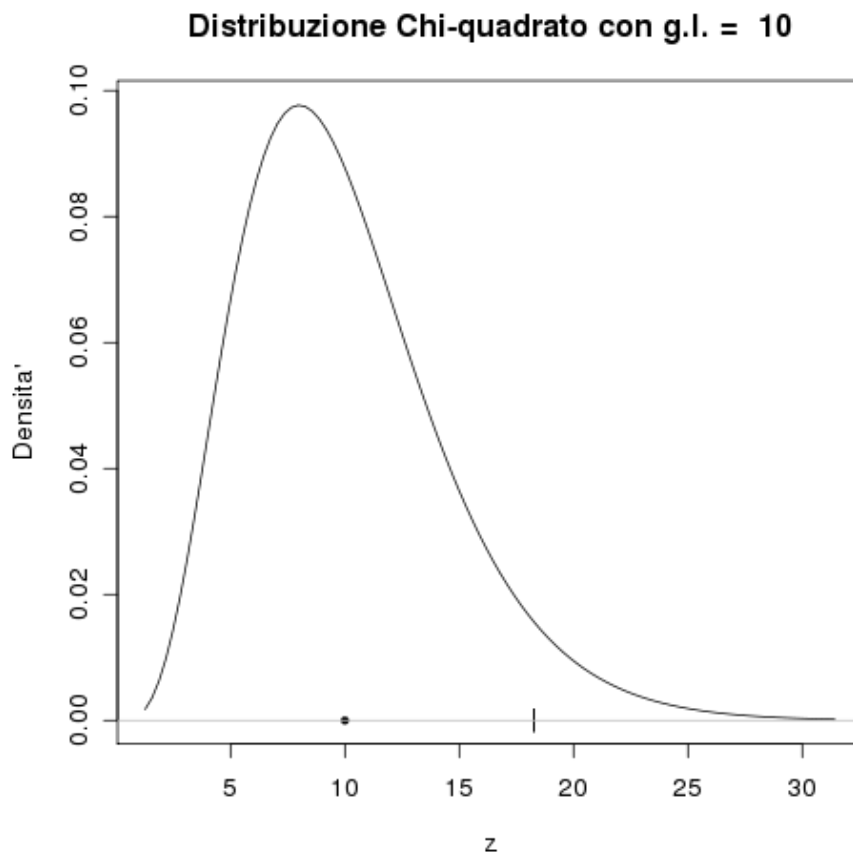
L'unico parametro di definizione di  $\chi^2$  è  $\nu=n-1$  ( $\nu$  esprime i *Gradi di libertà*).

$$M(\chi^2)=\nu$$

$$V(\chi^2)=2\nu$$

$$\sigma_{\chi^2} = \sqrt{2\nu}$$

$$\text{MODA}=\nu-2$$



Quando  $\nu$  è abbastanza elevato ( $\nu \rightarrow +\infty$ , ovvero nella pratica quando  $\nu > 100$ ) la v.c.  $\chi^2$  converge alla v.c. Normale.