3.3 Derivazione

Con la nozione di "funzione continua" abbiamo individuato una classe di funzioni che si distinguono per la loro regolarità, in quanto esse "non fanno salti" nei punti del loro dominio. Dato un sottoinsieme $A \subset \mathbb{R}$ ed una funzione continua $f : A \to \mathbb{R}$, può essere talora interessante studiare *con che rapidità* cambia il valore di $f(x) \in \mathbb{R}$ al cambiare della variabile $x \in A$. Si pensi ad esempio di voler descrivere, al variare del tempo, la posizione di un punto P che si muove su una retta: in tal caso, fissato un sistema di coordinate ascisse sulla retta, si sta considerando la funzione f ove la variabile x del dominio A indica il tempo (diciamo dunque che A sia un intervallo temporale $A = [a, b]$), ed il valore $f(x)$ indica l'ascissa del punto della retta occupato da P all'istante x del punto P. Presi due istanti x_0 (iniziale) e x_1 (finale) in A, il rapporto $\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$ tra la misura spaziale $f(x_1) - f(x_0)$ e l'intervallo temporale $x_1 - x_0$ si chiama, come noto, *velocità media* del punto P tra gli istanti x_0 e x_1, e descrive proprio la rapidità media di movimento del punto P in tale intervallo temporale. Pensando ora di rendere sempre più vicino l'istante finale x_1 a quello iniziale x_0, per continuità anche la posizione finale $f(x_1)$ si avvicinerà sempre più a quella iniziale $f(x_0)$: come abbiamo visto, ciò non significa che il limite del rapporto $\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$ debba per forza esistere ma, se esiste, è naturale che tale limite ci descriverà la *velocità istantanea* del punto P nell'istante x_0.[33] La nozione di "funzione derivabile" descrive per l'appunto una funzione in cui *tale passaggio al limite è possibile, con risultato finito.* Ciò permette di continuare il procedimento di ricerca di regolarità che abbiamo iniziato con le funzioni continue: non ci si accontenterà più del fatto che la funzione non faccia salti, ma si chiederà anche che la funzione "proceda in modo liscio". Vediamo di precisare questa idea.

3.3.1 Derivate

Sia $A \subset \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione, e sia $c \in A$ di accumulazione per A. Se $\xi \in A \setminus \{c\}$, il *rapporto incrementale* $\frac{f(\xi)-f(c)}{\xi-c}$ descrive la rapidità con cui varia la funzione f tra ξ e c in rapporto al muoversi della variabile da ξ a c: ad esempio, se f è costante esso è nullo (ovvero, la rapidità di variazione è nulla). Il significato geometrico del rapporto incrementale è evidente: nel piano cartesiano che contiene il grafico di f, esso rappresenta il coefficiente angolare (cioè, la "pendenza") della retta che congiunge i punti $(c, f(c))$ e $(\xi, f(\xi))$. È naturale allora esaminare il limite di tale rapporto incrementale quando ξ tende a c: infatti, per quanto appena detto, se esiste *finito*, geometricamente esso rappresenterà

[33] Con esempi più familiari, la velocità istantanea è la velocità che la Polizia Stradale rileva su un veicolo che transita per strada ad un certo istante, mentre la velocità media è quella che un addetto corse rileva, cronometro alla mano, dividendo la lunghezza del circuito per il tempo impiegato dal pilota della sua scuderia che ha appena effettuato un giro di prova.

il coefficiente angolare della retta *tangente al grafico della funzione nel punto* $(c, f(c))$. Tale valore reale, se esiste, si denoterà con $f'(c)$, o con $\frac{df}{dx}(c)$, e si dirà *derivata di* f *in* c:

$$f'(c) = \lim_{\xi \longrightarrow c} \frac{f(\xi) - f(c)}{\xi - c} = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h},$$

ove la seconda espressione segue subito dal cambio di variabile $h = \xi - c$ (la variabile infinitesima h si dice *incremento*). Si dirà allora che f è *derivabile in* c. Può certo accadere che esistano finiti separatamente i limiti $f'_{\pm}(c) = \lim_{\xi \longrightarrow c^{\pm}} \frac{f(\xi)-f(c)}{\xi - c}$ (detti rispettivamente *derivata destra* e *sinistra* di f in c) senza che essi siano uguali (in tal caso, è d'uso chiamare c "*punto angoloso*", con ovvio significato geometrico): è allora chiaro che la funzione f è derivabile in c se e solo se essa è derivabile a destra e a sinistra in c con lo stesso valore finito da ambo i lati. Anche qui è fondamentale notare che la derivabilità in c è un concetto *locale*, ovvero che si studia solo in un intorno (anche assai piccolo) di c. Se f è derivabile in ogni punto c del suo dominio A, essa si dirà *derivabile in* A; in generale, il sottoinsieme $A' = \{x \in A : f \text{ è derivabile in } x\} \subset A$ si dirà *insieme di derivabilità* di f in A: si determina così una nuova funzione $f' : A' \to \mathbb{R}$, detta (funzione) *derivata* di f.

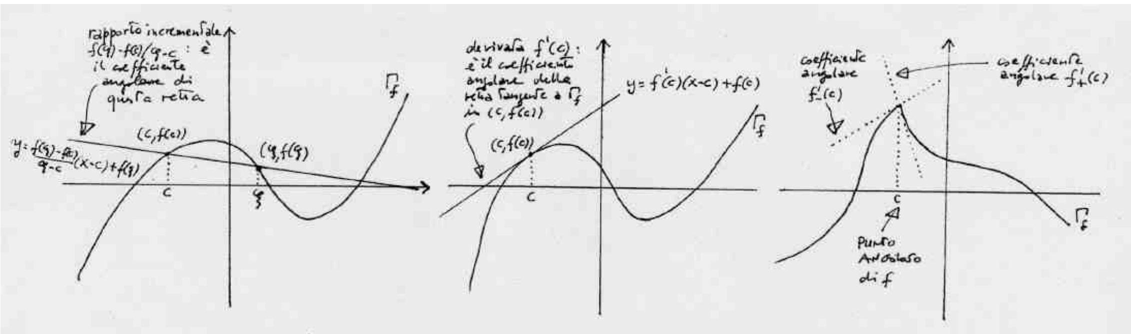

Figura 3.9: *Rapporto incrementale; derivata; punto angoloso.*

Vediamo ora che, effettivamente, la derivabilità è una proprietà più forte della continuità.

Proposizione 3.3.1. *Se* f *è derivabile in* c*, essa è anche continua in* c*, ma non vale il viceversa.*

Dimostrazione. Se f è derivabile in c vale $\lim_{\xi \longrightarrow c}(f(\xi) - f(c)) = \lim_{\xi \longrightarrow c}(\xi - c)\frac{f(\xi)-f(c)}{\xi - c} = 0 \cdot f'(c) = 0$, e dunque $\lim_{\xi \longrightarrow c} f(\xi) = f(c)$, ovvero f è continua in c. La funzione modulo $f(x) = |x|$ è continua in 0 ma ivi non derivabile, perché $f'_{\pm}(0) = \lim_{\xi \longrightarrow 0^{\pm}} \frac{|\xi| - |0|}{\xi - 0} = \pm 1$ (le derivate sinistra e destra esistono ma sono diverse); addirittura, la funzione $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $g(0) = 0$ e $g(x) = x \sin(\frac{1}{x})$ per $x \neq 0$ è continua in 0 (infatti $\lim_{x \longrightarrow 0} x \sin(\frac{1}{x}) = 0$, perché x è infinitesima e $\sin(\frac{1}{x})$ limitata), ma le derivate sinistra e destra di g in 0 non esistono (perché non esistono i limiti $\lim_{\xi \longrightarrow 0^{\pm}} \frac{\xi \sin(\frac{1}{\xi}) - 0}{\xi - 0} = \lim_{\xi \longrightarrow 0^{\pm}} \sin(\frac{1}{\xi})$). □

Esempi. (0) Si consideri un punto P che si muove sulla retta reale, e si consideri la funzione f che ad ogni istante temporale x associa l'ascissa $f(x)$ occupata da P nell'istante considerato. Allora, come già detto, il rapporto incrementale $\frac{f(\xi)-f(c)}{\xi-c}$ descrive la *velocità media* di P nell'intervallo temporale compreso tra gli istanti ξ e c, mentre (se esiste) la derivata $f'(c)$ è la *velocità istantanea* di P nell'istante c. **(1)** Calcoliamo le derivate di alcune funzioni elementari. Se $f(x)$ è costante, tutti i rapporti incrementali sono nulli (il numeratore è nullo) e dunque $f'(x) \equiv 0$. Se $f(x) = ax+b$, allora $f'(x) = \lim_{\xi \to x} \frac{(a\xi+b)-(ax+b)}{\xi-x} = \lim_{\xi \to x} \frac{a(\xi-x)}{\xi-x} \equiv a$. Se $f(x) = ax^2+bx+c$ si ha $f'(x) = \lim_{\xi \to x} \frac{(a\xi^2+b\xi+c)-(ax^2+bx+c)}{\xi-x} = \lim_{\xi \to x} \frac{(\xi-x)(a(\xi+x)+b)}{\xi-x} = 2ax+b$. Se $f(x) = \sqrt{x}$ e $x > 0$ si ha $f'(x) = \lim_{\xi \to x} \frac{\sqrt{\xi}-\sqrt{x}}{\xi-x} = \lim_{\xi \to x} \frac{1}{\sqrt{\xi}+\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, mentre per $x = 0$ si ha $\lim_{\xi \to 0} \frac{\sqrt{\xi}-0}{\xi-0} = \lim_{\xi \to 0} \frac{1}{\sqrt{\xi}} = +\infty$, e dunque f non è derivabile in 0. **(2)** La funzione $f(x) = |x+1|-|x-2|$ (che dunque vale -3 per $x \le -1$, $2x-1$ per $-1 < x \le 2$ e 3 per $x > 2$) è continua. Nei punti $c < -1$ e $c > 2$ essa è costante, e dunque banalmente derivabile con derivata nulla; nei punti $-1 < c < 2$ il rapporto incrementale è $\frac{(2\xi-1)-(2c-1)}{\xi-c} = 2$, e dunque la derivata vale sempre 2. In $c = -1$ (risp. $c = 2$) essa è derivabile a sinistra con valore 0 (risp. 2) e a destra con valore 2 (risp. 0): dunque essa non sarà derivabile. **(3)** Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = -x$ (se $x < 0$) e $f(x) = 3x^2$ (se $x \ge 0$). Essa è continua in tutto $\mathbb{R}$. Se $c < 0$ il rapporto incrementale (all'intorno di c) vale $\frac{(-\xi)-(-c)}{\xi-c} = -1$, e dunque f è derivabile in c con valore -1; se $c > 0$ il rapporto incrementale (all'intorno di c) vale $\frac{(3\xi^2)-(3c^2)}{\xi-c} = 3(\xi+c)$, e dunque f è derivabile in c con valore $6c$. Se invece $c = 0$, la derivata sinistra vale $\lim_{\xi \to 0^-} \frac{(-\xi)-0}{\xi-0} = -1$, mentre la destra vale $\lim_{\xi \to 0^+} \frac{3\xi^2-0}{\xi-0} = 0$: dunque f non è derivabile in 0.

Proposizione 3.3.2. (Derivate e parità) *Se f è una funzione derivabile pari* (risp. dispari)*, la sua derivata f' è una funzione dispari* (risp. pari)*.*

Dimostrazione. Se ad esempio f è pari, posto $\eta = -\xi$ si ha $f'(-x) = \lim_{\xi \to -x} \frac{f(\xi)-f(-x)}{\xi-(-x)} = \lim_{\eta \to x} \frac{f(-\eta)-f(-x)}{-\eta-(-x)} = \lim_{\eta \to x} \frac{f(\eta)-f(x)}{-(\eta-x)} = -f'(x)$, ovvero f' è dispari. $\square$

Calcoliamo le derivate delle funzioni elementari, mettendo in evidenza il dominio naturale $A \subset \mathbb{R}$ e l'insieme di derivabilità $A' \subset A$.

Proposizione 3.3.3. *Le funzioni elementari hanno dominio di derivazione e derivate come riportato nella tabella della Figura 3.10.*

Dimostrazione. Nel corso di questa dimostrazione si useranno i limiti notevoli visti nella Proposizione 3.2.10. • Se $f(x) = k$ (costante), come visto, tutti i rapporti incrementali sono nulli e dunque anche il loro limite. • Se $f(x) = x^\alpha$, esaminiamo $\lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^\alpha - x^\alpha}{h}$. Iniziamo dal caso $x = 0$ (e dunque andrà supposto all'inizio $\alpha > 0$): si ottiene $\lim_{h \to 0} h^{\alpha-1}$, che è finito per $\alpha \ge 1$ e vale 1 se $\alpha = 1$ e 0 se $\alpha > 1$. Se invece $x \ne 0$, ponendo $t = \frac{h}{x}$ si ha $\lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^\alpha - x^\alpha}{h} = x^\alpha \lim_{h \to 0} \frac{(1+\frac{h}{x})^\alpha - 1}{h} = x^{\alpha-1} \lim_{t \to 0} \frac{(1+t)^\alpha - 1}{t} = \alpha x^{\alpha-1}$. • Se $f(x) = |x|$ vale $f(x) = -x$ (se $x < 0$) e $f(x) = x$ (se $x > 0$), da cui l'affermazione segue immediatamente. • Se $f(x) = a^x$, ponendo $\tau = h \log a$ si ha $\lim_{h \to 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = a^x \lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h} = a^x \log a$. • Se $f(x) = \log_a x$, ponendo $t = \frac{h}{x}$ ed usando le proprietà del logaritmo si ha $\lim_{h \to 0} \frac{\log_a(x+h) - \log_a x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\log_a(\frac{x+h}{x})}{h} = \frac{1}{x} \lim_{t \to 0} \frac{\log_a(1+t)}{t} = \frac{1}{x \log a}$. • Per le funzioni goniometriche $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ e $\operatorname{cotg} x$ si usano le formule di prostaferesi: ad esempio, ricordando che $\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos(\frac{\alpha+\beta}{2})\sin(\frac{\alpha-\beta}{2})$ e $\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$, per $f(x) = \sin x$ ponendo $t = \frac{h}{2}$ si ha $\lim_{h \to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2\cos(x+\frac{h}{2})\sin\frac{h}{2}}{h} = \lim_{t \to 0} \cos(x+t)\frac{\sin t}{t} = \cos x$, mentre se $f(x) = \operatorname{tg} x$ si ha $\lim_{h \to 0} \frac{\operatorname{tg}(x+h) - \operatorname{tg} x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \frac{\sin h}{\cos(x+h)\cos x} =$

$f(x) \equiv k$ (costante)	$A = A' = \mathbb{R}$	$f'(x) \equiv 0$
$f(x) = x^\alpha$	$A = \begin{cases} \mathbb{R}_{\geq 0} & (\text{se } \alpha > 0) \\ \mathbb{R}_{>0} & (\text{se } \alpha < 0) \end{cases}$ $A' = \begin{cases} \mathbb{R}_{\geq 0} & (\text{se } \alpha \geq 1) \\ \mathbb{R}_{>0} & (\text{se } \alpha < 1) \end{cases}$	$f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$
$f(x) = \lvert x \rvert$	$A = \mathbb{R},\ A' = \mathbb{R} \setminus \{0\}$	$f'(x) = \frac{\lvert x \rvert}{x} = \begin{cases} -1 & (\text{se } x < 0) \\ 1 & (\text{se } x > 0) \end{cases}$
$f(x) = a^x$	$A = A' = \mathbb{R}$	$f'(x) = a^x \log a$
$f(x) = \log_a x$	$A = A' = \mathbb{R}_{>0}$	$f'(x) = 1/(x \log a)$
$f(x) = \sin x$	$A = A' = \mathbb{R}$	$f'(x) = \cos x$
$f(x) = \cos x$	$A = A' = \mathbb{R}$	$f'(x) = -\sin x$
$f(x) = \operatorname{tg} x$	$A = A' = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + \mathbb{Z}\pi\}$	$f'(x) = 1/\cos^2 x$
$f(x) = \operatorname{cotg} x$	$A = A' = \mathbb{R} \setminus \{\mathbb{Z}\pi\}$	$f'(x) = -1/\sin^2 x$
$f(x) = \arcsin x$	$A = [-1,1],\ A' =]-1,1[$	$f'(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$
$f(x) = \arccos x$	$A = [-1,1],\ A' =]-1,1[$	$f'(x) = -1/\sqrt{1-x^2}$
$f(x) = \operatorname{arctg} x$	$A = A' = \mathbb{R}$	$f'(x) = 1/(1+x^2)$
$f(x) = \operatorname{arccotg} x$	$A = A' = \mathbb{R}$	$f'(x) = -1/(1+x^2)$
$f(x) = \sinh x$	$A = A' = \mathbb{R}$	$f'(x) = \cosh x$
$f(x) = \cosh x$	$A = A' = \mathbb{R}$	$f'(x) = \sinh x$
$f(x) = \operatorname{sett\,sinh} x$	$A = A' = \mathbb{R}$	$f'(x) = 1/\sqrt{x^2+1}$
$f(x) = \operatorname{sett\,cosh} x$	$A = \mathbb{R}_{\geq 1},\ A' = \mathbb{R}_{>1}$	$f'(x) = 1/\sqrt{x^2-1}$

Figura 3.10: *Dominio di derivazione e derivate delle funzioni elementari.*

$\frac{1}{\cos^2 x}$. • Sia ora $f(x) = \arcsin x$, e studiamo $\lim_{\xi \to x} \frac{\arcsin \xi - \arcsin x}{\xi - x}$. Se $x = 0$, ponendo $t = \arcsin \xi$ si ricava $\lim_{\xi \to 0} \frac{\arcsin \xi}{\xi} = \lim_{t \to 0} \frac{t}{\sin t} = 1$. D'ora in poi supponiamo che $x \neq 0$; anzi, poiché la funzione è dispari, la sua derivata sarà pari e dunque possiamo supporre per semplicità che $x > 0$ (e, considerando ξ in un intorno di x, anche $\xi > 0$). Se $\alpha = \arcsin \xi$ e $\beta = \arcsin x$, si ha $\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta = \xi\sqrt{1-x^2} - x\sqrt{1-\xi^2}$, da cui otteniamo facilmente le asintoticità $\arcsin \xi - \arcsin x = \arcsin\big(\xi\sqrt{1-x^2} - x\sqrt{1-\xi^2}\big) \sim_x \xi\sqrt{1-x^2} - x\sqrt{1-\xi^2} = \sqrt{1-\xi^2}\left(\xi\sqrt{1+\frac{\xi^2-x^2}{1-\xi^2}} - x\right) \sim_x \sqrt{1-\xi^2}\left(\xi(1+\frac{1}{2}\frac{(\xi+x)(\xi-x)}{1-\xi^2}) - x\right) = \sqrt{1-\xi^2}\left(1+\frac{\xi(\xi+x)}{2(1-\xi^2)}\right)(\xi - x)$. Pertanto abbiamo $\lim_{\xi \to x} \frac{\arcsin \xi - \arcsin x}{\xi - x} = \lim_{\xi \to x} \sqrt{1-\xi^2}\left(1+\frac{\xi(\xi+x)}{2(1-\xi^2)}\right) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. La dimostrazione per $\arccos x$ è analoga. • Sia $f(x) = \operatorname{arctg} x$, e consideriamo il limite $\lim_{\xi \to x} \frac{\operatorname{arctg} \xi - \operatorname{arctg} x}{\xi - x}$. Se $\alpha = \operatorname{arctg} \xi$ e $\beta = \operatorname{arctg} x$, si ha $\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta} = \frac{\xi - x}{1 + \xi x}$, da cui $\operatorname{arctg} \xi - \operatorname{arctg} x = \operatorname{arctg}(\frac{\xi - x}{1+\xi x}) \sim_x \frac{\xi - x}{1+\xi x}$ e perciò $\lim_{\xi \to x} \frac{\operatorname{arctg} \xi - \operatorname{arctg} x}{\xi - x} = \lim_{\xi \to x} \frac{1}{1+\xi x} = \frac{1}{1+x^2}$. Stessa dimostrazione per $\operatorname{arccotg} x$. • Gli enunciati per le funzioni iperboliche e le loro inverse si provano in maniera analoga a quanto fatto per le corrispondenti funzioni circolari, tenendo presente che valgono proprietà formali analoghe come detto nel paragrafo 3.2.6. □

Dalla Proposizione precedente risulta evidente il motivo per cui si previlegia la base "naturale" $a = e$ per l'esponenziale ed il logaritmo: infatti, in tal caso il fattore $\log a$ vale 1 e l'espressione della derivata ne risulta semplificata.

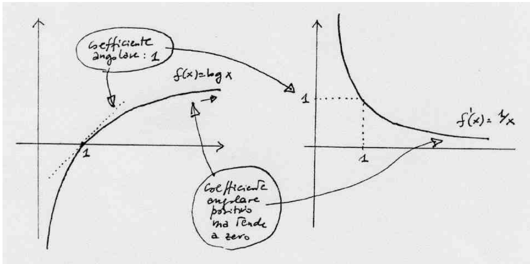

Figura 3.11: *La funzione derivata descrive, punto per punto, la pendenza del grafico di una funzione.*

Derivare funzioni ottenute sommando, sottraendo, moltiplicando, dividendo, componendo e (quando possibile) invertendo funzioni elementari è un semplice esercizio meccanico una volta che si ricordano le relative regole di calcolo, che per comodità ricordiamo tutte insieme nella prossima proposizione.

Proposizione 3.3.4. *Siano $f, g : A \to \mathbb{R}$ funzioni derivabili in $x \in A$.*

(i) (Linearità della derivazione) *Se $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, la funzione $\alpha f + \beta g$ è derivabile in x e vale*
$$(\alpha f + \beta g)'(x) = \alpha f'(x) + \beta g'(x).$$

(ii) (Regola di Leibniz per la derivata del prodotto) *La funzione prodotto fg* (ovvero $(fg)(x) = f(x)g(x)$) *è derivabile in x e vale*
$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$
Più generalmente, se $f_1, \dots, f_n$ sono derivabili in x anche il loro prodotto $F(x) = f_1(x)f_2(x)\cdots f_n(x)$ è derivabile in x e vale
$$F'(x) = f_1'(x)f_2(x)\cdots f_n(x) + f_1(x)f_2'(x)\cdots f_n(x) + \cdots + f_1(x)f_2(x)\cdots f_n'(x).$$

(iii) (Derivata del quoziente e del reciproco) *Se $g(x) \neq 0$, allora $\frac{f}{g}$ è definita all'intorno di x e derivabile in x, e vale*
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2} \qquad \text{(in particolare, si ha } \left(\tfrac{1}{g}\right)'(x) = \tfrac{-g'(x)}{g(x)^2}\text{)}.$$

(iv) (Regola della catena per la derivata della composizione) *Se φ è una funzione derivabile in $f(x)$, allora la funzione composta $\varphi \circ f$* (ovvero $(\varphi \circ f)(x) = \varphi(f(x))$) *è derivabile in x e vale*
$$(\varphi \circ f)'(x) = \varphi'(f(x))\, f'(x).$$

Più generalmente, se $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ *sono funzioni tali che* φ_1 *è derivabile in* $f(x)$ *e* φ_j *è derivabile in* $\varphi_{j-1}(\cdots\varphi_1(f(x)))$ (per $j = 2, \dots, n$) *allora la funzione composta* $\varphi_n \circ \cdots \circ \varphi_1 \circ f$ *è derivabile in* x *e vale*

$$(\varphi_n \circ \cdots \circ \varphi_1 \circ f)'(x) = \varphi_n'(\varphi_{n-1}(\cdots\varphi_1(f(x)))) \cdots \varphi_1'(f(x))\, f'(x).$$

(v) (Derivata della funzione inversa) *Se* f *è un omeomorfismo, la funzione inversa* f^{-1} *è derivabile nel punto* $y = f(x)$ *se e solo se* $f'(x) \neq 0$, *e vale*

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}.$$

Dimostrazione. (i) Immediata conseguenza delle proprietà del limite. (ii) Basta calcolare il limite del rapporto incrementale $\frac{f(\xi)g(\xi)-f(x)g(x)}{\xi-x}$, col trucco di aggiungere e togliere al numeratore il termine $f(\xi)g(x)$: si ottiene allora $\lim_{\xi\to x}\left(f(\xi)\frac{g(\xi)-g(x)}{\xi-x} + \frac{f(\xi)-f(x)}{\xi-x}g(x)\right) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$. La stessa idea permette di mostrare il caso generale. (iii) Con lo stesso trucco, si ha $\frac{1}{\xi-x}\left(\frac{f(\xi)}{g(\xi)} - \frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{1}{g(\xi)g(x)}\frac{(f(\xi)-f(x))g(x)-(g(\xi)-g(x))f(x)}{\xi-x}$; passando al limite si ottiene quanto affermato. Ponendo poi $f \equiv 1$ (e dunque $f' \equiv 0$) si ottiene la formula per la derivata del reciproco. (iv) Usando la funzione ausiliaria $\psi(\eta) = \begin{cases} \frac{\varphi(\eta)-\varphi(f(x))}{\eta-f(x)} & \text{se } \eta \neq f(x) \\ \varphi'(f(x)) & \text{se } \eta = f(x) \end{cases}$, che per ipotesi è continua in $\eta = f(x)$, possiamo scrivere il rapporto incrementale della funzione $\varphi \circ f$ come $\frac{\varphi(f(\xi))-\varphi(f(x))}{\xi-x} = \psi(f(\xi))\frac{f(\xi)-f(x)}{\xi-x}$; basta allora passare al limite per $\xi \to x$. Il caso generale si mostra ripetendo più volte il medesimo ragionamento. (v) Usando il cambio di variabile $\eta = f(\xi)$, si ha $\lim_{\eta\to y}\frac{f^{-1}(\eta)-f^{-1}(y)}{\eta-y} = \lim_{\xi\to x}\frac{\xi-x}{f(\xi)-f(x)}$, che esiste finito (e vale $\frac{1}{f'(x)}$) se e solo se $f'(x) \neq 0$. $\square$

Esercizio. *Calcolare il dominio delle funzioni* $f(x) = \operatorname{arctg}^2(\log|\sqrt{x} - x|)$ *e* $g(x) = \frac{\operatorname{tg}(x^2-3)}{\sqrt{\sin x}}$, *dire dove esse sono derivabili e calcolare la loro derivata.*

Risoluzione. La funzione $f(x) = \operatorname{arctg}^2(\log|\sqrt{x} - x|)$ è definita e derivabile se $x \geq 0$ e $\sqrt{x} - x \neq 0$, ovvero in $\mathbb{R}_{>0} \setminus \{1\}$. La sua derivata è $f'(x) = 2\operatorname{arctg}(\log|\sqrt{x} - x|)\frac{1}{1+\log^2|\sqrt{x}-x|}\frac{1}{\sqrt{x}-x}(\frac{1}{2\sqrt{x}} - 1) = \frac{(1-2\sqrt{x})\operatorname{arctg}(\log|\sqrt{x}-x|)}{x(1-\sqrt{x})(1+\log^2|\sqrt{x}-x|)}$. La funzione $g(x) = \frac{\operatorname{tg}(x^2-3)}{\sqrt{\sin x}}$ è definita e derivabile se $x^2 - 3 \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ (con $k \in \mathbb{Z}$) e $\sin x > 0$, ovvero se $x \neq \pm\sqrt{3 + \frac{\pi}{2} + k\pi}$ e $2k\pi < x < \pi + 2k\pi$ (con $k \in \mathbb{Z}$) con derivata $g'(x) = \frac{\frac{2x}{\cos^2(x^2-3)}\sqrt{\sin x}-\operatorname{tg}(x^2-3)\frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}}{(\sqrt{\sin x})^2} = \frac{4x\sin x-\sin(x^2-3)\cos(x^2-3)\cos x}{2\sin x\sqrt{\sin x}\cos^2(x^2-3)}$.

Retta tangente e retta perpendicolare al grafico Se una funzione $f : A \to \mathbb{R}$ è derivabile in $c \in A$, la retta tangente (risp. perpendicolare) al grafico di f nel punto di ascissa c dovrà passare per il punto $(c, f(c))$ con coefficiente angolare $f'(c)$ (risp. $-\frac{1}{f'(c)}$): si avrà pertanto

$$y - f(c) = f'(c)(x - c) \qquad \text{(retta tangente al grafico di } f \text{ in } c\text{);}$$
$$y - f(c) = -\frac{1}{f'(c)}(x - c) \qquad \text{(retta perpendicolare al grafico di } f \text{ in } c\text{).}$$

Esercizio. **(1)** *Data la funzione* $f(x) = e^{x-1} + 1$*, calcolare le equazioni cartesiane delle rette tangente e perpendicolare al grafico di* f *nel punto di ascissa* 2. **(2)** *Data la funzione* $g(x) = x^2 - x + 2$*, si dica per quali* $c \in \mathbb{R}$ *le rette tangenti o perpendicolari al grafico di* g *nel punto di ascissa* c *passano per l'origine.* **(3)** *In quali punti del dominio di* $h(x) = \frac{1+\sqrt{x}}{3-\sqrt{x}}$ *la retta tangente al grafico di* h *è parallela alla retta* $x - 2y + 7 = 0$*?*

Risoluzione. **(1)** Essendo $f'(x) = e^{x-1}$, da cui $f'(2) = e$, la retta tangente (risp. perpendicolare) al grafico di f nel punto di ascissa 2 avrà equazione cartesiana $y - (e+1) = e(x-2)$, ovvero $y = ex - e + 1$ (risp. $y - (e+1) = -\frac{1}{e}(x-2)$, ovvero $y = -\frac{1}{e}x + \frac{2}{e} + e + 1$). **(2)** Nel generico punto c l'equazione della retta tangente è $y - g(c) = g'(c)(x-c)$, ovvero $y = g'(c)\,x + g(c) - c\,g'(c)$, e dunque questa passa per l'origine se e solo se $g(c) - c\,g'(c) = 0$, ovvero $(c^2 - c + 2) - c(2c-1) = 0$, ovvero $-c^2 + 2 = 0$, ovvero $c = \pm\sqrt{2}$: in questi due punti le tangenti hanno equazioni $y = (\pm 2\sqrt{2} - 1)x$. Quanto alla perpendicolare $y - g(c) = -\frac{1}{g'(c)}(x-c)$, questa passa per l'origine se e solo se $\frac{c}{g'(c)} + g(c) = 0$, ovvero $g(c)g'(c) + c = 0$, ovvero $(c^2 - c + 2)(2c-1) + c = 0$, da cui $2c^3 - 3c^2 + 6c - 2 = 0$. Il trinomio $P(c)$ al primo membro è strettamente crescente (infatti $P'(c) = 6(c^2 - c + 1) > 0$ per ogni c), e inoltre $P(0) = -2 < 0$ e $P(1) = 3 > 0$: ne ricaviamo che $P(c) = 0$ ha una sola soluzione reale $0 < c_0 < 1$. In tale punto, la retta perpendicolare al grafico ha equazione $y = -\frac{1}{2c_0 - 1}x$. **(3)** Il dominio di h è $\{x \geq 0 : x \neq 9\}$. Per $x \neq 0$ si calcola $h'(x) = \frac{2}{\sqrt{x}(3-\sqrt{x})^2}$ (si noti che $\lim_{x\to 0^+} h'(x) = +\infty$, e dunque h non ha derivata destra in 0). La condizione da imporre è $h'(c) = \frac{1}{2}$, ovvero $\frac{2}{\sqrt{c}(3-\sqrt{c})^2} = \frac{1}{2}$: ponendo $\sqrt{c} = t$ si ricava $t^3 - 6t^2 + 9t - 4 = 0$. C'è un'evidente soluzione $t = 1$; dividendo con Ruffini per $t - 1$ si ottiene $t^2 - 5t + 4 = 0$, con soluzioni $t = 1$ (nuovamente) e $t = 4$. I punti cercati sono dunque $c = 1$ e $c = 16$ (in cui le rette tangenti sono rispettivamente $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ e $y = \frac{1}{2}x - 13$).

Diffeomorfismo Il raffinamento della nozione di *omeomorfismo* (ovvero, come si è visto, una funzione biiettiva e continua con inversa pure continua) è quello di *diffeomorfismo*: per definizione, si tratta di una funzione biiettiva e derivabile con inversa pure derivabile. Come appena visto, un omeomorfismo è un diffeomorfismo se e solo se esso è ovunque derivabile con derivata mai nulla.

Esempi. **(1)** La funzione $h(x) = \frac{2x^2-x+5}{x-1}$ è definita in $A = \mathbb{R}\setminus\{1\}$, ed è ivi derivabile. Se $f(x) = 2x^2 - x + 5$ e $g(x) = x - 1$, si ha $f'(x) = 2 \cdot 2x - 1 + 0 = 4x - 1$ e $g'(x) = 1 - 0 = 1$, ed applicando la derivata di un quoziente si ricava $h'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2} = \frac{(4x-1)(x-1)-(2x^2-x+5)}{(x-1)^2} = 2\frac{x^2-2x-2}{(x-1)^2}$. **(2)** Essendo $f(x) = \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$, si ritrova $f'(x) = \frac{\cos x\,\cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$. **(3)** Se $f(x) = x^3 e^x \sin x$, si ha $f'(x) = (x^3)'e^x \sin x + x^3(e^x)'\sin x + x^3 e^x (\sin x)' = 3x^2 e^x \sin x + x^3 e^x \sin x + x^3 e^x \cos x = x^2 e^x\big((x+3)\sin x + x\cos x\big)$. **(4)** Si ricava subito che $\sinh'(x) = \cosh x$ e $\cosh'(x) = \sinh x$. **(5)** La funzione $g(x) = \log|x|$ è definita per $A = \mathbb{R}\setminus\{0\}$ ed è ivi derivabile. Essa è la composta di $\varphi(y) = \log y$ con $f(x) = |x|$, e dunque la regola della catena dà $g'(x) = \varphi'(f(x))f'(x) = \frac{1}{|x|}\frac{|x|}{x} = \frac{1}{x}$. **(6)** La funzione $g(x) = \operatorname{tg}(e^x)$ è la composta di $\varphi(y) = \operatorname{tg} y$ con $f(x) = e^x$, e dunque $g'(x) = \frac{1}{\cos^2(e^x)}e^x = \frac{x}{\cos^2(e^x)}$. **(7)** La funzione $g(x) = e^{\sin^2(3x-5)}$ è la composta di $\varphi_3(t) = e^t$ con $\varphi_2(z) = z^2$, $\varphi_1(y) = \sin y$ e $f(x) = 3x - 5$; dunque si ha $g'(x) = \varphi_3'(\varphi_2(\varphi_1(f(x)))) \cdot \varphi_2'(\varphi_1(f(x))) \cdot \varphi_1'(f(x)) \cdot f'(x) = e^{\sin^2(3x-5)} \cdot 2\sin(3x-5) \cdot \cos(3x-5) \cdot 3 = 3e^{\sin^2(3x-5)}\sin\big(2(3x-5)\big)$. **(8)** e^x è un diffeomorfismo tra $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}_{>0}$: infatti esso è un omeomorfismo ovunque derivabile, e la sua derivata (ancora e^x) non si annulla mai. La sua inversa è il logaritmo: se $y > 0$, ritroviamo perciò $\log'(y) = \frac{1}{e^x} = \frac{1}{e^{\log y}} = \frac{1}{y}$. **(9)** $\sin|_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]} : [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}] \to [-1,1]$ è un omeomorfismo; poiché $\sin'(x) = \cos x$, esso induce un diffeomorfismo tra $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ e $]-1,1[$, con inversa $\arcsin y$. Ritroviamo dunque $\arcsin'(y) = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\cos(\arcsin y)} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$, come già calcolato in precedenza. Analogamente, $\operatorname{tg} x$

induce un diffeomorfismo tra $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ e $\mathbb{R}$, con inversa $\operatorname{arctg} y$, e $\operatorname{tg}' x = \frac{1}{\cos^2 x} \neq 0$ per ogni $x \in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$: pertanto, se $y \in \mathbb{R}$ si ha $\operatorname{arctg}'(y) = \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2(\operatorname{arctg}(y))} = \frac{1}{1+y^2}$. **(10)** La funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da $f(x) = x^3$ è un omeomorfismo, ma non un diffeomorfismo: infatti essa è ovunque derivabile, ma $f'(0) = 0$.

Il Teorema di de l'Hôpital per il calcolo dei limiti Il risultato che segue, di cui non riportiamo la dimostrazione, semplifica moltissimo il calcolo dei limiti in parecchi casi.

Teorema 3.3.5. (Regola di de l'Hôpital) *Sia $A \subset \mathbb{R}$ un intervallo, e sia $c \in \widetilde{\mathbb{R}}$ un punto di accumulazione per A. Siano $f, g : A \setminus \{c\} \to \mathbb{R}$ due funzioni derivabili con $g'(x) \neq 0$ per ogni $x \in A \setminus \{c\}$, e si assuma che esista $\lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.*
Allora, se (1) f e g sono entrambe infinitesime in c, oppure se (2) g è infinita in c, esiste anche $\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)}$ e vale

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Esempi. Lasciamo allo studente di rivedere tutti gli esercizi fatti sui limiti cercando di applicare, quando possibile, la regola di de l'Hôpital per ritrovare i risultati già noti. Ad esempio, in $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$, le funzioni $f(x) = \sin x$ e $g(x) = x$ soddisfano alle ipotesi nel caso (1) (il $\lim_{x\to 0} \frac{(\sin)'(x)}{(x)'(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1}$ esiste e vale 1, e si ha una forma "$\frac{0}{0}$"), e dunque il limite vale 1; in $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$ la regola si può applicare arrivando a $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{2x}$, quindi applicare di nuovo arrivando a $\lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{2} = \frac{1}{2}$ come noto; in $\lim_{x\to +\infty} \frac{e^{\alpha x}}{x^\beta}$ (con $\alpha, \beta > 0$) basta applicare la regola M volte (ove $M = [\beta]$ se $\beta \in \mathbb{N}$, e $M = [\beta] + 1$ se $\beta \in \mathbb{R}_{>0} \setminus \mathbb{N}$: in entrambi i casi vale $0 \leq M - \beta = \operatorname{frac} \beta < 1$) per arrivare a $\lim_{x\to +\infty} \frac{\alpha^M e^{\alpha x}}{\beta(\beta-1)\cdots(\beta-M+1)x^{\beta-M}} = +\infty$.

Nel calcolo dei limiti, la regola di de l'Hôpital è indubbiamente comoda perché non richiede pressoché alcuno sforzo concettuale, e per questo motivo gli studenti tendono a ricorrervi automaticamente ogniqualvolta si presenti una forma indeterminata del tipo "$\frac{0}{0}$" oppure "$\frac{\infty}{\infty}$". Tuttavia, è il caso di mettere in guardia da un suo uso "troppo automatico", perché potrebbe capitare che la regola non sia applicabile (se il limite non ne soddisfa le ipotesi), oppure che la sua applicazione porti a complicare le cose anziché a semplificarle: non va scordato che abbiamo studiato molte maniere di calcolare i limiti, maniere che spesso risultano più convenienti (oltre a dimostrare una ben maggiore padronanza degli strumenti di calcolo da parte di chi le adopera). Ad esempio, nel limite $\lim_{x\to +\infty} \frac{x+\sin x}{3x-\cos x}$ (del tipo "$\frac{\infty}{\infty}$") non si può applicare la regola di de l'Hôpital, perché il limite delle derivate $\lim_{x\to +\infty} \frac{1+\cos x}{3-\sin x}$ non esiste; d'altra parte, essendo $\sin x = o_{+\infty}(x)$ e $\cos x = o_{+\infty}(3x) = o_{+\infty}(x)$, si ricava subito che il limite di partenza è uguale a $\lim_{x\to +\infty} \frac{x}{3x} = \frac{1}{3}$. Invece, nel limite $\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{2x}$ (del tipo "$\frac{0}{0}$") la regola si può applicare, ma porta al limite $\lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}}}{2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{2x^2}$, più complicato di quello di partenza; in questo caso basta invece usare il cambio di variabile $x = \frac{1}{t}$ per arrivare a $\lim_{t\to +\infty} \frac{e^{-t}}{2/t} = \frac{1}{2} \lim_{t\to +\infty} \frac{t}{e^t} = 0$.

Derivate successive, funzioni di classe $\mathcal{C}^k$ e $\mathcal{C}^\infty$ Con le funzioni derivabili abbiamo selezionato, all'interno delle funzioni continue, una famiglia di funzioni "più regolari" delle altre. D'altra parte, dovremmo aver già intuito che l'azione di derivare porta, se non ad un peggioramento, certamente non ad un miglioramento della regolarità delle funzioni: non è affatto detto che la derivata di una funzione derivabile sia anch'essa derivabile.[34] Anzi: *se una funzione* $f : A \to \mathbb{R}$ *è derivabile* (diciamo, in $A' \subset A$) *possiamo almeno sperare che la sua derivata* $f' : A' \to \mathbb{R}$ *sia sempre una funzione continua?* Addirittura a questo livello più modesto la risposta è, in generale, no.[35] Tuttavia, abbiamo

Proposizione 3.3.6. *Sia A un intervallo, $c \in A$ di accumulazione per A ed $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione continua in A e derivabile in $A \setminus \{c\}$. Se $\lim_{x \to c^-} f'(x)$ esiste finito, allora f è derivabile anche in c con valore $f'(c) = \lim_{x \to c} f'(x)$, e la funzione derivata $f' : A \to \mathbb{R}$ è continua in A; se invece tali limite esiste finito a sinistra e a destra ma con valori diversi, oppure se esiste a sinistra o/e a destra ma infinito, allora f non è derivabile in c.*

Dimostrazione. Per la regola di de l'Hôpital si ha $\lim_{x \to c^\mp} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} = \lim_{x \to c^\mp} \frac{f'(x)}{1} = \lim_{x \to c^\mp} f'(x)$, e le conclusioni sono allora chiare. □

Diremo allora che $f : A \to \mathbb{R}$ è *di classe* $\mathcal{C}^1$ in A se essa è derivabile in A con derivata continua in A: come visto, non tutte le funzioni derivabili in A sono di classe $\mathcal{C}^1$ in A.[36] Per una tale funzione ci possiamo chiedere se la derivata, che è continua, sia per caso anch'essa una funzione derivabile: diremo allora che $f : A \to \mathbb{R}$ è *di classe* $\mathcal{C}^2$ in A se la sua derivata $f' : A \to \mathbb{R}$ è derivabile in A e la "derivata seconda" (ovvero, la derivata della derivata) $f'' : A \to \mathbb{R}$ è una funzione continua.

Esempio. Sia $x(t)$ la funzione che descrive, al variare del tempo t, la posizione x di un punto che si muove sull'asse cartesiano x. Come visto, la funzione derivata prima $x'(t)$ rappresenta la *velocità* (rapidità di variazione della posizione) *istantanea* del punto; analogamente, la funzione derivata seconda $x''(t)$ rappresenta l'*accelerazione* (rapidità di variazione della velocità) *istantanea* del punto.

Continuando allo stesso modo, preso un qualsiasi $k \in \mathbb{N}$ diremo che $f : A \to \mathbb{R}$ è *di classe* $\mathcal{C}^k$ in A se essa è derivabile k volte in A (ovvero, se esistono le derivate $f', f'', \dots, f^{(k-1)}, f^{(k)} : A \to \mathbb{R}$) e la derivata k-esima $f^{(k)} : A \to \mathbb{R}$ è continua. Se una funzione $f : A \to \mathbb{R}$ è di classe $\mathcal{C}^k$ per ogni $k \in \mathbb{N}$, si dirà che f è *di classe* $\mathcal{C}^\infty$: si tratta delle funzioni che "più liscie non si può".[37] È d'uso denotare con $\mathcal{C}^k(A)$ l'insieme delle funzioni $f : A \to \mathbb{R}$ di classe $\mathcal{C}^k$, con $k = 0, 1, \dots, +\infty$, intendendo che $\mathcal{C}^0(A)$ sia semplicemente l'insieme delle funzioni continue: è semplice verificare che tutti i $\mathcal{C}^k(A)$ sono sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^A$

[34] Per esempio, si vede subito che la funzione $f(x) = x^2 \operatorname{sign} x$ ha derivata $f'(x) = |x|$ (infatti, essendo $f(x) = \pm x^2$ per $x \gtrless 0$ si ricava subito $f'(x) = \pm x$ per $x \gtrless 0$, ovvero $f(x) = |x|$ per $x \neq 0$, mentre in 0 il rapporto incrementale $\frac{f(\xi)-f(0)}{x\xi-0} = \xi \operatorname{sign} \xi = |\xi|$ tende a 0 e dunque $f'(0) = 0$), ed il modulo è una funzione continua ma non derivabile.

[35] Il classico controesempio è dato dalla funzione $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $g(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$ (se $x \neq 0$) e $g(0) = 0$, che è derivabile ovunque (per $x \neq 0$ è ovvio con derivata $g'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$, mentre per $x = 0$ il rapporto incrementale $\frac{g(\xi)-g(0)}{x\xi-0} = \xi \sin \frac{1}{\xi}$ tende a 0, e dunque $g'(0) = 0$) ma g' non è continua in 0 (perché $\lim_{x \to 0} g'(x) = \lim_{x \to 0} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$ non esiste).

[36] Tornando agli esempi appena visti $f(x) = x^2 \operatorname{sign} x$ è di classe $\mathcal{C}^1$ in $\mathbb{R}$, mentre $g(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$ (se $x \neq 0$) e $g(0) = 0$ è derivabile ma non di classe $\mathcal{C}^1$ in $\mathbb{R}$.

[37] In realtà si può chiedere ancora di più: anche se noi non ce ne occuperemo, menzioniamo che c'è una classe di regolarità, delle funzioni dette *analitiche*, ancora più ristretta delle funzioni $\mathcal{C}^\infty$.

(lo spazio di tutte le funzioni $f : A \to \mathbb{R}$), e abbiamo perciò le inclusioni di regolarità $\mathcal{C}^\infty(A) \subset \cdots \subset \mathcal{C}^k(A) \subset \mathcal{C}^{k-1}(A) \subset \cdots \subset \mathcal{C}^2(A) \subset \mathcal{C}^1(A) \subset \mathcal{C}^0(A) \subset \mathbb{R}^A$.
Sottolineiamo ancora una volta che lo spazio delle funzioni di classe $\mathcal{C}^k$ è *strettamente più piccolo* dello spazio delle funzioni $\mathcal{C}^{k-1}$ tali che la derivata $(k-1)$-esima $f^{(k-1)}$ sia anch'essa derivabile, perché non è detto che la derivata k-esima $f^{(k)} = (f^{(k-1)})'$ sia continua.

Esempi. **(1)** $f(x) = x^2 \operatorname{sign} x$ è di classe $\mathcal{C}^1$ ma non $\mathcal{C}^2$ in $\mathbb{R}$. **(2)** $g(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$ (se $x \neq 0$) e $g(0) = 0$ è continua (ovvero di classe $\mathcal{C}^0$) e derivabile ma non di classe $\mathcal{C}^1$ in $\mathbb{R}$. **(3)** Fissato un qualsiasi $\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$, la funzione $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da $h(x) = 0$ (per $x \leq 0$) e $h(x) = x^\alpha$ (per $x > 0$) è di classe $\mathcal{C}^{[\alpha]-1}$ (se $\alpha \in \mathbb{N}$) o $\mathcal{C}^{[\alpha]}$ (se $\alpha \notin \mathbb{N}$) ma non di classe superiore: infatti, se $\alpha = n \in \mathbb{N}$ la derivata $(n-1)$-esima esiste ed è continua ma non è derivabile (vale $f^{(n-1)}(x) = 0$ per $x \leq 0$ e$f^{(n-1)}(x) = n(n-1)\cdots 2x$ per $x > 0$), e lo stesso se $\alpha \notin \mathbb{N}$ per la derivata $[\alpha]$-esima (che vale $f^{([\alpha])}(x) = 0$ per $x \leq 0$ e $f^{([\alpha])}(x) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-[\alpha]+1)x^{\alpha-[\alpha]}$ per $x > 0$). **(4)** La funzione $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da $u(x) = 0$ (per $x \leq 0$) e $u(x) = e^{-\frac{1}{x}}$ (per $x > 0$) è di classe $\mathcal{C}^\infty$: ad esempio, se $x > 0$ la derivata prima è $f'(x) = \frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}$ che tende a 0 quando $x \to 0^+$; la derivata seconda è $f''(x) = -(\frac{2}{x^3} + \frac{1}{x^4})e^{-\frac{1}{x}}$ che pure tende a 0 quando $x \to 0^+$; e così via (varrà $f^{(k)}(0) = 0$ per ogni $k \in \mathbb{N}$).

Formula di Taylor L'interesse della formula di Taylor è di dare una facile espressione dell'approssimazione polinomiale di una funzione più volte derivabile $f(x)$ mediante i valori delle derivate di f in un prefissato punto base del suo dominio, lasciando in evidenza un resto il cui comportamento andrà valutato a seconda della sua espressione. Nel teorema che segue daremo due forme di questo resto, utili rispettivamente nel calcolo locale (attorno al punto base) e globale (nel dominio di f): si invita a porre attenzione alla diversità delle ipotesi nei due casi.

Teorema 3.3.7. *Sia A un intervallo, $c \in A$ ed $f : A \to \mathbb{R}$ di classe $\mathcal{C}^{k-1}$ in A.*

(i) (Formula di Taylor con resto nella forma di Peano) *Si assuma che f sia derivabile k volte in c. Allora*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{k} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n + o_c((x-c)^k).$$

(ii) (Formula di Taylor con resto nella forma di Lagrange) *Si assuma che f sia derivabile k volte in $A \setminus \{c\}$. Allora per ogni $x \in A \setminus \{c\}$ esiste qualche ξ interno all'intervallo di estremi x e c tale che*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{k-1} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n + \frac{f^{(k)}(\xi)}{k!}(x-c)^k.$$

Esempi. **(1)** Scriviamo lo sviluppo asintotico di $f(x) = \log(x+2)$ in $c = 1$ fino all'ordine $k = 3$. Si ha $f'(x) = \frac{1}{x+2}$, $f''(x) = -\frac{1}{(x+2)^2}$ e $f'''(x) = \frac{2}{(x+2)^3}$, da cui lo sviluppo con resto di Peano è $f(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2}(x-1)^2 + \frac{f'''(1)}{6}(x-1)^3 + o_1((x-1)^3)$ ovvero $\log(x+2) = \log 3 + \frac{1}{3}(x-1) - \frac{1}{18}(x-1)^2 + \frac{1}{81}(x-1)^3 + o_1((x-1)^3)$, mentre lo sviluppo con resto di Lagrange è $\log(x+2) =$

$\log 3 + \frac{1}{3}(x-1) - \frac{1}{18}(x-1)^2 + \frac{1}{3(\xi+2)^3}(x-1)^3$ per qualche ξ interno all'intervallo di estremi x e 1. **(2)** Scriviamo lo sviluppo asintotico di $g(x) = e^x$ in $c = -3$ fino all'ordine $k = 2$. Si ha $g'(x) = g''(x) = e^x$, da cui lo sviluppo con resto di Peano è $g(x) = g(-3) + g'(-3)(x+3) + \frac{g''(-3)}{2}(x+3)^2 + o_1((x+3)^2)$ ovvero $e^x = e^{-3}(1 + (x+3) + \frac{1}{2}(x+3)^2) + o_1((x+3)^2)$, mentre lo sviluppo con resto di Lagrange è $e^x = e^{-3}(1 + (x+3)) + \frac{e^\xi}{2}(x+3)^2$ per qualche ξ interno all'intervallo di estremi x e -3.

3.3.2 Derivabilità, crescenza ed estremi locali

Abbiamo già spiegato (vedi pag. 51) che cosa significa crescenza, decrescenza, estremi ed estremanti assoluti. Dopo aver introdotto una topologia su $\mathbb{R}$ (ovvero, dopo aver precisato la nozione di "vicinanza" in $\mathbb{R}$), siamo in grado di dare una definizione "locale" di tali proprietà. Così, se $f : A \to \mathbb{R}$ è una funzione e $c \in A$, diremo che f è *crescente in* c (risp. *strettamente crescente in* c) se esiste $\delta > 0$ tale che $f|_{A\cap B_c(\delta)}$ sia crescente (risp. strettamente crescente), e diremo che c è un *punto di massimo locale* (o *relativo*) per f in A se esiste $\delta > 0$ tale che c sia un punto di massimo assoluto per $f|_{A\cap B_c(\delta)}$; idem per "f decrescente in c" e "c punto di minimo locale"). Tali nozioni sono ovviamente più deboli delle analoghe nozioni assolute: ad esempio, un punto di massimo assoluto è anche un punto di massimo relativo, mentre il viceversa è in generale falso. Il legame, ovvio, tra estremi locali e crescenza è il seguente:

Proposizione 3.3.8. *Se esiste $\delta > 0$ tale che $f|_{A\cap B_c^-(\delta)}$ è crescente* (risp. *decrescente*) *e $f|_{A\cap B_c^+(\delta)}$ decrescente* (risp. *crescente*), *allora c è un punto di massimo* (risp. *minimo*) *relativo, e se crescenza e decrescenza sono strette allora c è un punto di massimo* (risp. *minimo*) *relativo stretto.*

Va osservato che, contrariamente a quanto potrebbe sembrare, il viceversa è falso: ad esempio, la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da $f(x) = x^2(2 + \sin\frac{1}{x})$ se $x \neq 0$ e $f(0) = 0$ (che, tendendo x a zero, oscilla in continuazione tra x^2 e $3x^2$) ha in 0 un punto di minimo assoluto stretto, ma non esiste alcun $\delta > 0$ tale che f sia decrescente in $]-\delta, 0]$ e crescente in $[0, \delta[$.

Esempi. Per meglio visualizzare gli esempi seguenti, provare a tracciare il grafico delle funzioni descritte. **(1)** La funzione : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -x^3$ è strettamente decrescente (e dunque è strettamente decrescente in tutti i punti di $\mathbb{R}$). **(2)** La funzione $f(x) = \sin(\pi x)$ ha massimo assoluto 1, e punti di massimo assoluto (e dunque anche relativo) in $\frac{1}{2} + 2\mathbb{Z}$, ed ha minimo assoluto -1 con punti di minimo assoluto (e dunque anche relativo) in $-\frac{1}{2} + 2\mathbb{Z}$. **(3)** La funzione $f(x) = \begin{cases} -x^2 - x & \text{se } x \leq 0 \\ x^2 - 2x & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$ non ammette massimo e minimo assoluti su $\mathbb{R}$, ma ha un punto di massimo (risp. minimo) relativo stretto in $x = -\frac{1}{2}$ (risp. in $x = 1$), con valore $\frac{1}{4}$ (risp. con valore -1). **(4)** La funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x + 1$ (se $x < 0$), 0 (se $0 < x \leq 1$) e 1 (se $x \geq 1$) non ha minimo assoluto, mentre ha massimo assoluto 1 assunto nei punti $x \geq 1$ (che dunque sono tutti punti di massimo assoluto, e in particolare relativo, non stretto); essa è crescente in tutti i punti di $\mathbb{R}$, strettamente per $x < 0$. **(5)** La funzione $f(x) = x + 2\sin x$ non ha estremi assoluti, ma ha punti di massimo locale in $c_k = \frac{2\pi}{3} + 2\mathbb{Z}\pi$ e punti di minimo locale in $c_k' = -\frac{2\pi}{3} + 2\mathbb{Z}\pi$. (L'esame del grafico, ottenuto sommando x e $2\sin x$, dovrebbe giustificare la conclusione in modo "qualitativo"; per la conferma "quantitativa" dei risultati basterà attendere un po', quando avremo ben descritto il legame tra gli estremi locali di una funzione e la sua derivata.)

Se $A \subset \mathbb{R}$ è un intervallo e $f : A \to \mathbb{R}$ è una funzione, si vede immediatamente che f è crescente (risp. decrescente) se e solo se tutti i rapporti incrementali sono ≥ 0 (risp. ≤ 0): ciò fa apparire naturale che ci debba essere un legame tra la derivata di f e le zone del dominio dove essa è crescente o decrescente. Andiamo a studiare questi legami nella seguente

Proposizione 3.3.9. *Siano $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione e $c \in A$ di accumulazione per A.*

(i) (Derivata ed estremi locali) *Se c è un punto di massimo locale, allora* (se esistono) $f'_-(c) \geq 0$ *e* $f'_+(c) \leq 0$*; analogamente, se c è un punto di minimo locale, allora* (se esistono) $f'_-(c) \leq 0$ *e* $f'_+(c) \geq 0$.
Pertanto, se c è un estremante locale allora (se esiste) $f'(c) = 0$.

Corollari:

(Teorema di Rolle) *Sia* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ (con $a, b \in \mathbb{R}$) *una funzione continua, e derivabile in* $]a, b[$*. Se $f(a) = f(b)$, allora esiste $\xi \in]a, b[$ tale che $f'(\xi) = 0$.*

Più generalmente:

(Teorema "del valor medio" di Lagrange) *Sia* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ (con $a, b \in \mathbb{R}$) *una funzione continua, e derivabile in $]a, b[$. Allora esiste $\xi \in]a, b[$ tale che* $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi)$.

Ancora più generalmente:

(Teorema "degli incrementi finiti" di Cauchy) *Siano* $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ (con $a, b \in \mathbb{R}$) *due funzione continue, e derivabili in $]a, b[$; sia inoltre $g'(x) \neq 0$ per ogni $x \in]a, b[$. Allora esiste $\xi \in]a, b[$ tale che* $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$.

(ii) (Derivata e costanza) *f è derivabile con derivata identicamente nulla in A se e solo se f è* localmente costante*, ovvero costante su ogni intervallo contenuto in A. In particolare, se A è un intervallo e $f, g : A \to \mathbb{R}$ sono due funzioni derivabili con $f' = g'$, allora f e g differiscono per una costante additiva* (ovvero esiste $k \in \mathbb{R}$ tale che $f(x) = g(x) + k$ per ogni $x \in A$).

(iii) (Derivata e monotonìa locale) *Sia f derivabile in c. Se f è crescente* (risp. *decrescente*) *in c, allora $f'(c) \geq 0$* (risp. $f'(c) \leq 0$)*. D'altra parte, se $f'(c) > 0$* (risp. $f'(c) < 0$) *allora f è strettamente crescente* (risp. *strettamente decrescente*) *in c.*

(iv) (Derivata e monotonìa globale) *Sia A un intervallo* aperto*, e sia f derivabile in A. f è crescente* (risp. *decrescente*) *se e solo se $f'(x) \geq 0$* (risp. $f'(x) \leq 0$) *per ogni $x \in A$. In particolare, f è strettamente crescente* (risp. *strettamente decrescente*) *se e solo se $f'(x) \geq 0$* (risp. $f'(x) \leq 0$) *per ogni $x \in A$ ed il sottoinsieme $\{x \in A : f'(x) = 0\}$ di A è privo di punti interni.*

Dimostrazione. (i) Se ad esempio c è un punto di massimo locale, per definizione esiste un intorno U di c in $\mathbb{R}$ tale che il rapporto incrementale $\frac{f(\xi)-f(c)}{x-c}$ è ≥ 0 (risp. ≤ 0) per ogni $x \in U \cap A$ con $x < c$ (risp. $x > c$): per il teorema del confronto si ha allora $f'_-(c) = \lim_{\xi \to c^-} \frac{f(\xi)-f(c)}{x-c} \geq 0$ e $f'_+(c) = \lim_{\xi \to c^+} \frac{f(\xi)-f(c)}{x-c} \leq 0$. Nelle ipotesi del Teorema di Rolle, grazie al Teorema di Weierstrass (vedi pag. 63) f ammette estremi assoluti in $[a,b]$. Ci sono allora due possibilità: almeno uno tra massimo e minimo assoluto viene assunto in qualche $\xi \in]a,b[$, oppure sia massimo che minimo assoluto sono assunti negli estremi a e b. Nel primo caso, come appena visto, vale $f'(\xi) = 0$; nel secondo, la funzione è necessariamente costante in $[a,b]$, e dunque $f'(\xi) = 0$ per ogni $\xi \in]a,b[$. Per dimostrare ora il teorema di Cauchy (quello di Lagrange è solo il caso particolare $g(x) = x$), basta osservare che la funzione $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ data da $h(x) = (f(b)-f(a))(g(x)-g(a)) - (g(b)-g(a))(f(x)-f(a))$ soddisfa le ipotesi del Teorema di Rolle, e dunque esiste $\xi \in]a,b[$ tale che $h'(\xi) = (f(b)-f(a))g'(\xi) - (g(b)-g(a))f'(\xi) = 0$. (ii) Sia $f' \equiv 0$ su A; preso un intervallo $B \subset A$ ed $a,b \in B$ con $a < b$, per il teorema della media di Lagrange esiste $\xi \in]a,b[$ tale che $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi) = 0$, da cui $f(a) = f(b)$, ovvero $f|_B$ è costante; il viceversa è ovvio, perché A è l'unione degli intervalli in lui contenuti. Infine, se A è un intervallo e $f' = g'$ in A, allora $h = f - g : A \to \mathbb{R}$ (essendo $h' = f' - g' \equiv 0$) è costante su A. (iii) Se f è crescente in c, per definizione esiste un intorno U di c in $\mathbb{R}$ tale che $\frac{f(\xi)-f(c)}{\xi-c} \geq 0$ per ogni $\xi \in (U \cap A) \setminus \{c\}$: per il teorema del confronto si ha allora $f'(c) = \lim_{\xi \to c} \frac{f(\xi)-f(c)}{\xi-c} \geq 0$. D'altra parte, se $f'(c) = \lim_{\xi \to c} \frac{f(\xi)-f(c)}{\xi-c} > 0$ allora, per il teorema della permanenza del segno esiste un intorno U di c in $\mathbb{R}$ tale che $\frac{f(\xi)-f(c)}{\xi-c} > 0$ per ogni $\xi \in (U \cap A) \setminus \{c\}$, e dunque f è strettamente crescente in c. Dimostrazioni analoghe per la decrescenza. (iv) Come appena visto, se f è crescente in A allora $f'(x) \geq 0$ per ogni $x \in A$; viceversa, supponendo che valga $f'(x) \geq 0$ per ogni $x \in A$, presi due qualsiasi $a,b \in A$ con $a < b$, per il teorema della media di Lagrange esiste $\xi \in]a,b[$ tale che $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi) \geq 0$, da cui $f(b) \geq f(a)$, e ciò mostra che f è crescente in A. Ora, se f è crescente in A, essa è strettamente crescente se e solo se essa non ha tratti in cui è costante, ovvero se e solo se non esistono $a,b \in A$ con $a < b$ tali che $f|_{[a,b]}$ sia costante, ovvero (per (ii)) tali che $f'|_{]a,b[} \equiv 0$: ma ciò equivale precisamente al fatto che $\{x \in A : f'(x) = 0\}$ non ha punti interni. □

È opportuno fare alcuni commenti sugli enunciati appena visti (ogni capoverso si riferisce al corrispondente punto dell'enunciato).

(i) Si è visto che in un estremante locale la derivata, se esiste, è nulla; pertanto, per funzioni derivabili l'insieme degli estremanti locali è contenuto nell'insieme dei punti *stazionari* o *critici*, ovvero quelli in cui la derivata è nulla (dal punto di visto geometrico, i punti in cui la retta tangente al grafico è orizzontale, vedi Figura 3.12(a)), e ciò semplifica notevolmente la loro ricerca. Va notato che non tutti i punti stazionari sono estremanti locali (si pensi ad esempio al punto $c = 0$ per la funzione $f(x) = x^3$): ne riparleremo più tardi. Il significato geometrico del teorema di Rolle è allora chiaro (vedi Figura 3.12(b)), mentre quello del teorema della media di Lagrange è che esiste un punto interno ad $[a,b]$ in cui la pendenza della tangente al grafico é uguale alla pendenza della retta che congiunge $(a, f(a))$ con

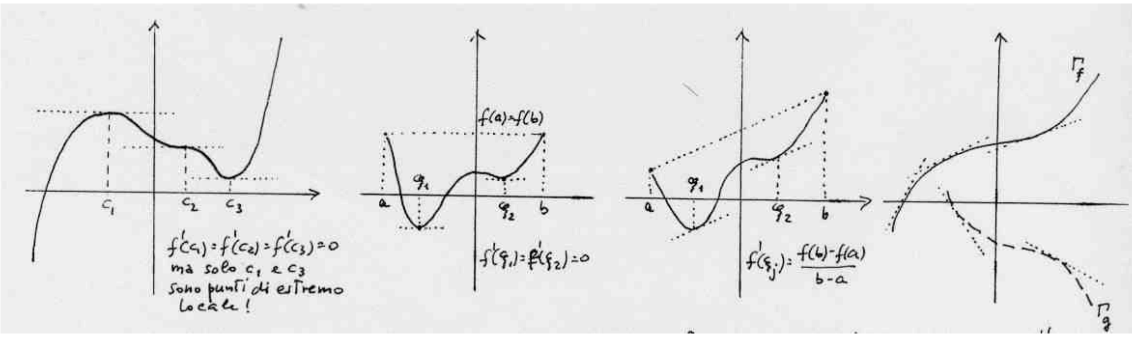

Figura 3.12: *Punti stazionari ed estremi locali; il teorema di Rolle; il teorema di Lagrange; crescenza e segno della derivata.*

$(b, f(b))$ (vedi Figura 3.12(c)).

(ii) Se A non è un intervallo e $f' \equiv 0$ in A, non è detto che f sia costante su *tutto* A: si pensi, ad esempio, a $A = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ed alla funzione $f(x) = \operatorname{sign} x$ (ovvero $f(x) = \pm 1$ per $x \gtrless 0$), oppure a $A = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ e $f(x) = [x]$ (la "parte intera" di x, vedi pag. 33). Come appare chiaramente da questi esempi, come detto si può solo concludere che f ha un valore costante (possibilmente diverso) per ogni "componente connessa" di A.

(iii) I viceversa delle due affermazioni fatte sono (in generale) falsi: come visto, se $f'(c) = 0$ (e dunque $f'(c) \geq 0$), ovvero se c è un punto stazionario, può accadere di tutto; e $f(x) = x^3$ è strettamente crescente in 0 anche se $f'(0) = 0$.

(iv) Come dovrebbe apparire evidente, questo fatto è di grandissima utilità pratica, perché dà una descrizione immediatamente calcolabile della monotonìa delle funzioni derivabili, che rappresentano la grande maggioranza dei casi. Tra l'altro, anche molte delle funzioni non derivabili sono in realtà *derivabili a tratti*, ovvero lo sono tranne che negli estremi o in alcuni punti isolati, e dunque anche per esse il risultato vale in ognuno dei tratti di derivabilità, con la riserva di completare poi lo studio nei punti di non derivabilità con l'esame concreto, uno per uno. Facciamo un paio di semplici esempi. (1) La funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$ è derivabile in $A' = \mathbb{R}^\times$ con derivata $f'(x) = \pm 1$ per $x \gtrless 0$: non essendoci punti stazionari (e dunque estremi locali) in $\mathbb{R}^\times$, si è tentati di chiudere la questione dicendo che non vi sono estremanti locali per f. Tuttavia ciò è palesemente falso, perché è chiaro che 0 è un punto di minimo assoluto stretto per f: ma ciò si deve dire con un discorso specifico per 0, e non si può ricavare dallo studio della derivata (che perde completamente di vista il punto 0). (2) La funzione $g : [1, 2] \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^2$, è derivabile in $]1, 2[$ con derivata $g'(x) = 2x$ (negli estremi -2 e 1 a rigore non possiamo dire che la funzione è "derivabile", perché lo è solo da un lato: non a caso l'enunciato richiede che l'intervallo A sia *aperto*): essendo $g'(x) \neq 0$ per ogni $x \in]1, 2[$, nessuno dei punti interni è un estremo locale, ma anche qui è chiaro che 1 (risp. 2) è un punto di minimo (risp. massimo) assoluto stretto per g: ancora una volta, ciò va verificato direttamente in ciascuno dei due punti, e la derivata non dà alcuna informazione su di essi.

Esercizio. *Studiare la crescenza e gli estremi relativi delle funzioni*

$$f(x) = (x-1)\log|x-1| - (x-3)\log|x-3| - (\log 2)x, \qquad g(x) = -\log|\cos\frac{x}{2}| - x.$$

Risoluzione. Le funzioni sono derivabili nel loro dominio, dunque è sufficiente studiare il segno della loro derivata. La funzione $f(x) = (x-1)\log|x-1| - (x-3)\log|x-3| - (\log 2)x$ è definita per $x \neq 1$ e $x \neq 3$,[38] e si ricava $f'(x) = \log|x-1| + (x-1)\frac{1}{x-1} - \log|x-3| - (x-3)\frac{1}{x-3} - \log 2 = \log\left|\frac{x-1}{x-3}\right| - \log 2$, da cui $f'(x) = 0$ se e solo se $\left|\frac{x-1}{x-3}\right| = 2$, ovvero $\frac{x-1}{x-3} = 2$ oppure $\frac{x-1}{x-3} = -2$, che ha soluzioni $x = 5$ e $x = \frac{7}{3}$; si ha poi $f'(x) > 0$ se e solo se $\left|\frac{x-1}{x-3}\right| > 2$, ovvero $\frac{x-1}{x-3} > 2$ oppure $\frac{x-1}{x-3} < -2$: nel primo caso si ottiene $\frac{x-1}{x-3} - 2 = \frac{5-x}{x-3} > 0$, che dà $3 < x < 5$, e nel secondo $\frac{x-1}{x-3} + 2 = \frac{3x-7}{x-3} < 0$, che dà $\frac{7}{3} < x < 3$. Dunque f è crescente per $\frac{7}{3} < x < 3$ e $3 < x < 5$ e decrescente per $x < 1$, $1 < x < \frac{7}{3}$ e $x > 5$, e ne deduciamo che $x = \frac{7}{3}$ è un punto di minimo relativo stretto (con $f(\frac{7}{3}) = \frac{4}{3}\log\frac{4}{3} - (-\frac{2}{3}\log\frac{2}{3}) - \frac{7}{3}\log 2 = \frac{4}{3}(2\log 2 - \log 3) + \frac{2}{3}(\log 2 - \log 3) - \frac{7}{3}\log 2 = -\log\frac{9}{2} \sim -1,5$) e $x = 5$ è un punto di massimo relativo stretto (con $f(5) = 4\log 4 - 2\log 2 - 5\log 2 = \log 2 \sim 0,7$). Invece, la funzione $g(x) = -\log|\cos\frac{x}{2}| - x$ è definita per $\cos\frac{x}{2} \neq 0$, ovvero per $\frac{x}{2} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ (con $k \in \mathbb{Z}$), ovvero per $x \neq \pi + 2k\pi$ (con $k \in \mathbb{Z}$) e si ricava $g'(x) = -\frac{-\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}} - 1 = \frac{1}{2}\mathrm{tg}\,\frac{x}{2} - 1$, da cui $g'(x) = 0$ se e solo se $\frac{1}{2}\mathrm{tg}\,\frac{x}{2} = 1$, ovvero $\mathrm{tg}\,\frac{x}{2} = 2$, ovvero $\frac{x}{2} = \mathrm{arctg}\,2 + k\pi$ (con $k \in \mathbb{Z}$), ovvero $x = 2\,\mathrm{arctg}\,2 + 2k\pi$ (con $k \in \mathbb{Z}$); si ha poi $g'(x) > 0$ (cioè, g crescente) se e solo se $\frac{1}{2}\mathrm{tg}\,\frac{x}{2} > 1$, ovvero $\mathrm{tg}\,\frac{x}{2} > 2$, ovvero $\mathrm{arctg}\,2 + k\pi < \frac{x}{2} < \frac{\pi}{2} + k\pi$ (con $k \in \mathbb{Z}$), ovvero $2\,\mathrm{arctg}\,2 + 2k\pi < x < \pi + 2k\pi$ (con $k \in \mathbb{Z}$). Ne deduciamo che i punti $x_k = 2\,\mathrm{arctg}\,2 + 2k\pi$ (con $k \in \mathbb{Z}$) sono di minimo relativo stretto, con valori (ricordando che in generale $\cos\theta = \pm\frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\theta}}$) $g(x_k) = \frac{1}{2}\log 5 - 2\,\mathrm{arctg}\,2 - 2k\pi$ (con $k \in \mathbb{Z}$).

Un altro criterio molto utile per stabilire la natura di un punto stazionario di funzioni derivabili più volte è il seguente.

Proposizione 3.3.10. *Siano $A \subset \mathbb{R}$ un intervallo, $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile k volte* (con $k \geq 1$) *e $c \in A$ tale che $f'(c) = \cdots = f^{(k-1)}(c) = 0$ e $f^{(k)}(c) \neq 0$.*

(i) *Se k è pari e $f^{(k)}(c) > 0$* (risp. $f^{(k)}(c) < 0$) *allora c è un punto di minimo* (risp. massimo) *locale stretto per f.*

(ii) *Se k è dispari allora c non è un estremante locale per f.*

Dimostrazione. Dalla formula di Taylor (Teorema 3.3.7) si ricava che $f(x) - f(c) = \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k + o_c((x-c)^k)$: essendo $f^{(k)}(c) \neq 0$, per il teorema della permanenza del segno ne discende che esiste un intorno U di c in cui il segno di $f(x) - f(c)$ coincide con quello del polinomio $p(x) = \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k$; inoltre, a meno di restringere tale intorno, si può supporre che in U l'unico zero di $p(x)$ sia c. Se k è pari allora per ogni $x \in U \setminus \{c\}$ vale $f(x) - f(c) = p(x) \gtrless 0$ a seconda che $f^{(k)}(c) \gtrless 0$, da cui l'affermazione (i). Se invece k è dispari e $f^{(k)}(c) > 0$ (risp. $f^{(k)}(c) < 0$) allora si ha $f(x) - f(c) = p(x) > 0$ se $x > c$ (risp. se $x < c$) e $f(x) - f(c) = p(x) < 0$ se $x < c$ (risp. se $x > c$), da cui (ii). □

Esempi. **(1)** Sia $f(x) = x^k$: si ha $f'(0) = \cdots = f^{(k-1)}(0) = 0$ e $f^{(k)}(0) = k! > 0$. Per la Proposizione 3.3.10, 0 è un punto di minimo locale stretto se k è pari, e non è un estremante locale se k è dispari

[38] Si noti comunque che $\lim_{x\to 1} f(x) = 0 - (-2)\log 2 - \log 2 = \log 2$ e $\lim_{x\to 3} f(x) = 2\log 2 - 0 - 3\log 2 = -\log 2$, e dunque si potrebbe prolungare f per continuità a tutto $\mathbb{R}$ ponendo $f(1) = \log 2$ e $f(3) = -\log 2$.

(già si sapeva). **(2)** Sia $f(x) = 3(x + \sin x \cos x) - 4\cos^3 x$. Si ha $f'(x) = 3 + 3\cos 2x + 12\sin x \cos^2 x = 6\cos^2 x(1 + 2\sin x)$, da cui $f'(x) = 0$ per $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ e $x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$ (con $k \in \mathbb{Z}$). Si ha $f''(x) = 2\cos x(1 - \sin x - 3\sin^2 x)$; essendo $f''(-\frac{\pi}{6} + 2k\pi) = \frac{3\sqrt{3}}{4} > 0$ e $f''(\frac{7\pi}{6} + 2k\pi) = -\frac{3\sqrt{3}}{4} < 0$, possiamo dire che i punti $-\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ (risp. $\frac{7\pi}{6} + 2k\pi$) sono di minimo (risp. massimo) locale stretto; invece $f''(\frac{\pi}{2}+k\pi) = 0$, dunque ancora non si può dire nulla sulla natura di tali punti stazionari. Un ulteriore conto dà $f'''(x) = 2(3\sin^3 x+8\sin^2 x-7\sin x-1)$, ed essendo $f'''(\frac{\pi}{2}+2k\pi) = 6 \neq 0$ e $f'''(\frac{\pi}{2}+(2k+1)\pi) = 22 \neq 0$, concludiamo che i punti $\frac{\pi}{2} + k\pi$ non sono estremanti locali.

3.3.3 Problemi di massimo e minimo

Una classica applicazione pratica delle relazioni tra derivate e crescenza sono i *problemi di massimo e minimo*, in cui si richiede di determinare gli estremi di una certa quantità, diciamo y, che cambia al cambiare di un'altra, diciamo x. Si tratta dunque di studiare gli estremi di una funzione $y = f(x)$, e quando tale funzione è derivabile possiamo applicare i risultati appena trovati.

Diamo qui nel seguito alcuni esempi.

Esercizio. *Risolvere i seguenti problemi di massimo e minimo.* **(1)** *Tra tutti i triangoli isosceli di dato perimetro $2p$, trovare quello con l'area massima.* **(2)** *Tra tutte le pentole cilindriche di dato volume interno V, qual'è il diametro interno di quella con la superficie interna (parete più fondo) minima?* **(3)** *Tra tutte le scatole senza coperchio a forma di parallelepipedo a base quadrata di data area totale esterna A, trovare il lato di base di quella che ha il volume massimo.* **(4)** *Un agricoltore deve scavare nel terreno una vasca, a forma di piramide retta con base quadrata e la punta in giù, che possa contenere esattamente un volume V di acqua. Per impermeabilizzare i lati della vasca, egli userà dei teli di linoleum, che pagherà al negoziante in base alla superficie acquistata. Quale sarebbe la lunghezza del lato di base della vasca che gli permetterebbe di risparmiare al massimo sull'acquisto di linoleum?* **(5)** *In un quadrato Q di lato ℓ, giacente sul piano orizzontale, si considerino due vertici opposti A e A'. Dato $0 \leq x \leq \ell$, dentro Q si inscriva un triangolo T avente due vertici a distanza x da A ed il terzo vertice alla medesima distanza x da A'; infine, considerato il punto V posto verticalmente ad altezza x sopra il centro di Q e la piramide di base T e vertice V, si dica per quale valore di x tale piramide ha volume massimo.*

Risoluzione. **(1)** Sia x la lunghezza della base del triangolo (dunque $0 \leq x \leq p$): allora i lati obliqui sono lunghi $p - \frac{x}{2}$, e per il teorema di Pitagora l'altezza risulta $\sqrt{(p - \frac{x}{2})^2 - (\frac{x}{2})^2} = \sqrt{p(p-x)}$: l'area è allora pari a $A(x) = \frac{\sqrt{p}}{2}x\sqrt{p-x}$. Da $A'(x) = \frac{\sqrt{p}}{2}(\sqrt{p-x} + x\frac{-1}{2\sqrt{p-x}}) = \frac{\sqrt{p}}{4}\frac{2p-3x}{\sqrt{p-x}}$ si ricava $A'(x) = 0$ se e solo se $x = \frac{2p}{3}$ e $A'(x) > 0$ se e solo se $x < \frac{2p}{3}$. In altre parole: se si allarga la base del triangolo da 0 a p mantenendo però inalterato il perimetro totale $2p$, l'area del triangolo aumenta fino a quando la base diventa lunga $\frac{2p}{3}$ e diminuisce da tale valore in poi. Dunque l'area è massima quando la base è lunga $\frac{2p}{3}$, ovvero quando il triangolo è equilatero. **(2)** Sia x il raggio interno della pentola. Se h è la sua profondità interna, vale $V = x^2\pi h$ da cui $h = \frac{V}{\pi x^2}$. La superficie interna è dunque $y = S(x) = x^2\pi + 2\pi x h = \frac{2V}{x} + \pi x^2$. Da $S'(x) = -\frac{2V}{x^2} + 2\pi x$ si ricava $S'(x) = 0$ se e solo se $x = \sqrt[3]{V/\pi}$, e $S'(x) > 0$ se e solo se $x > \sqrt[3]{V/\pi}$. Il valore minimo si ha allora quando il diametro interno è $2\sqrt[3]{V/\pi}$, e vale $S(\sqrt[3]{V/\pi}) = 3\sqrt[3]{V^2\pi}$. **(3)** Sia x il lato di base: allora l'altezza h deve soddisfare $A = 4hx + 2x^2$, da cui $h = \frac{A-2x^2}{4x}$, e il volume è $V(x) = hx^2 = \frac{x(A-2x^2)}{4}$. Si ha $V'(x) = \frac{A-6x^2}{4}$, da cui $V'(x) \geq 0$ per $x \leq \sqrt[2]{A/6}$: pertanto $V(x)$ cresce prima di $x = \sqrt[2]{A/6}$ e decresce dopo. Dunque la scatola cercata ha il lato di base lungo $\sqrt[2]{A/6}$, ed il volume massimo è $V(\sqrt[2]{A/6}) = (A/6)^{\frac{3}{2}}$. **(4)** Si tratta di vedere quando l'area laterale della piramide (ovvero, la superficie da rivestire di linoleum) è minima. Sia x la lunghezza del lato di base della vasca: l'altezza h della piramide (profondità centrale della vasca) soddisfa $V = \frac{hx^2}{3}$, da cui $h = \frac{3V}{x^2}$. L'apotema della piramide (altezza delle quattro facce triangolari laterali) è dato da $a = \sqrt{h^2 + (\frac{x}{2})^2} = \frac{\sqrt{x^6+36V^2}}{2x^2}$: dunque l'area laterale della piramide è data da $S(x) = 4\frac{ax}{2} = \frac{\sqrt{x^6+36V^2}}{x}$, definita per $x > 0$. La derivata è $S'(x) = \frac{\frac{6x^5}{2\sqrt{x^6+36V^2}}x - \sqrt{x^6+36V^2}}{x^2} = \frac{2(x^6-18V^2)}{x^2\sqrt{x^6+36V^2}}$, e si ha $S'(x) = 0$ per $x = \sqrt[6]{18V^2}$ e $S'(x) > 0$ per $x > \sqrt[6]{18V^2}$. Dunque il massimo risparmio si ottiene quando il lato della vasca è lungo $\sqrt[6]{18V^2}$. **(5)** Levando all'area del quadrato Q i pezzi che non stanno in T, si ha che l'area di T è $\ell^2 - \frac{x^2}{2} - \frac{(\ell-x)^2}{2} - \frac{(\ell-x+x)x}{2} = x(\ell - x)$, dunque la piramide ha volume $y = f(x) = \frac{x}{3}x(\ell - x) = \frac{x^2(\ell-x)}{3}$. Derivando, si ottiene $f'(x) = \frac{1}{3}(2x(\ell - x) - x^2) = \frac{1}{3}x(2\ell - 3x)$. Vale $f'(x) = 0$ per $x = \frac{2}{3}\ell$, e $f'(x) > 0$ se e solo se $0 < x < \frac{2}{3}\ell$. Pertanto il valore massimo del volume della piramide si ottiene quando $x = \frac{2}{3}\ell$.