

Probabilità I

Calcolo delle probabilità

- Nozioni di eventi.
- Definizioni di probabilità
- Calcolo di probabilità notevoli
- Probabilità condizionate

Concetto di probabilità

- Cos'è una probabilità?

Idea di massima: misura di quanto un evento potenzialmente incerto si possa verificare

- Perché abbia senso debbo:
 - Definire con chiarezza cosa sia un evento
 - Scegliere una misura

Definizioni di base: evento

- **Esperimento o prova:** Accadimento dall'esito incerto e non noto a priori.
- **Spazio degli eventi U :** Insieme di tutti gli esiti possibili.
- **Evento E :** Un insieme dei possibili esiti dell'esperimento.
- **Evento elementare:** Evento a cardinalità uno (esito).

- *Esempio*
 - *Esperimento:* lancio di un dado a sei facce.
 - *Evento:* esca un numero pari.
 - *Spazio degli eventi:* $U = \{1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\}$.
 - $E = \{2\ 4\ 6\}$.

Evento: considerazioni

Per la definizione data si ha che lo stesso esperimento può produrre spazi degli eventi molto diversi

- *Esempio*

- *Esperimento:* Estrazione di una carta da bridge.
- *Evento:* Si estragga una carta con un seme rosso.
- *Spazio degli eventi:* $U = \{\text{Cuori Quadri Fiori Picche}\}$.
- $E = \{\text{Cuori Quadri}\}$

- *Esempio*

- *Esperimento:* Estrazione di una carta da bridge.
- *Evento:* Si estragga una figura.
- *Spazio degli eventi:* $U = \{A 2 3 4 5 6 7 8 9 10 J D R\}$.
- $E = \{J, D, R\}$.

Probabilità: definizione classica (Laplace).

- Definizione: La probabilità di un evento E è data dal numero di esiti favorevoli (al verificarsi di E) e quello dei casi possibili giudicati egualmente possibili.

$$P(E) = \frac{\|E\|}{\|U\|}$$

- *Esempio*

- *Esperimento*: Estrazione di una carta da bridge.
- *Evento*: Si estragga una figura.
- *Spazio degli eventi*: $U = \{A 2 3 4 5 6 7 8 9 10 J D R\}$.
- $E = \{J D R\}$.

$$P(E) = \frac{\|E\|}{\|U\|} = \frac{3}{13} = 0,2308$$

Definizione classica: considerazioni.

- Definizione: La probabilità di un evento E è data dal numero di esiti favorevoli (al verificarsi di E) e quello dei casi possibili giudicati **egualmente possibili**.

Condizione limitante!

- *Esempio*

- *Esperimento*: Estrazione super enalotto.
- *Evento*: Vincere.
- *Spazio degli eventi*: $U = \{0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 5+1 \ 6\}$.
- $E = \{3 \ 4 \ 5 \ 5+1 \ 6\}$.

$$P(E) = \frac{\|E\|}{\|U\|} = \frac{5}{8} = 0,625$$

- Gli eventi elementari non sono equiprobabili $\Rightarrow P(E)$ insensata

Definizione classica: errori di modello

Esperimento: Lancio due dadi a 4 facce

Evento: Somma pari a 4

- Esempio errato: (evento elementare: somma dei 2 dadi)

- $U = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.

- $E = \{4\}$.

$$P(E) = \frac{\|E\|}{\|U\|} = \frac{1}{7}$$

Esempio corretto: (evento elementare: esito dei 2 dadi)

- $U = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (4,1), (4,2), (4,3), (4,4)\}$.

- $E = \{(1,3), (2,2), (3,1)\}$.

$$P(E) = \frac{\|E\|}{\|U\|} = \frac{3}{16}$$

Probabilità: definizione assiomatica.

- Idea: associo ad ogni evento elementare una probabilità e poi con delle regole di costruzione calcolo le probabilità di eventi più complessi.
- Ho bisogno
 - Catalogare gli eventi più complessi.
 - Trovare le regole
 - Fissare le probabilità di alcuni eventi mediante
 - Assiomi
 - Approccio classico
 - Conoscenze innate

Evento certo ed impossibile

- *Evento certo*. Evento che si verifica sicuramente. $E \equiv U$
 - Esempio
 - Esperimento: Lancio di un dado a 6 facce.
 - Evento: Totalizzare meno di 7.
 - Probabilità classica: $P(U) = 1$.
- *Evento impossibile*. Evento che non si può verificare $E = \emptyset$.
 - Esempio
 - Esperimento: Lancio di un dado a 6 facce.
 - Evento: Totalizzare più di 7.
 - Probabilità classica: $P(\emptyset) = 0$.

Eventi incompatibili

- Definizione: due eventi A e B si dicono incompatibili se non possono verificarsi contemporaneamente. $A \cap B = \emptyset$
 - Esempio
 - Esperimento: Lancio di un dado a 6 facce.
 - Evento A : rilevare un # pari.
 - Evento B : rilevare un 5.
 - A e B sono incompatibili.
 - Esempio
 - Esperimento: Lancio di un dado a 6 facce.
 - Evento A : rilevare un # pari. $A = \{2\ 4\ 6\}$
 - Evento B : rilevare un # primo. $B = \{1\ 2\ 3\ 5\}$
 - A e B NON sono incompatibili. $A \cap B = \{2\}$.
- Osservazione: gli eventi elementari fra loro sono incompatibili

Evento complementare.

- *Evento complementare di un evento.* Dato un evento E il suo complementare [indicato con \bar{E}] è dato dall'insieme di tutti gli eventi elementari non compresi in E .

– Esempio

- Esperimento: Lancio di un dado a 6 facce.
- Evento: Totalizzare meno di 3.
- Evento complementare: totalizzare 3 o più.

– Probabilità classica:

$$P(\bar{E}) = \frac{\|\bar{E}\|}{\|U\|} = \frac{\|U - E\|}{\|U\|} = \frac{\|U\| - \|E\|}{\|U\|} = \frac{\|U\|}{\|U\|} - \frac{\|E\|}{\|U\|} = 1 - P(E)$$

Evento intersezione

Definizione: Dati due eventi A e B l'evento intersezione $A \cap B$ è l'evento che si verifica quando entrambi gli eventi si verificano.

– Esempio

- Esperimento: Lancio di un dado a 6 facce.
- A : estrarre un # pari $A = \{2, 4, 6\}$.
- B : estrarre un # primo $B = \{1, 2, 3, 5\}$.
- $A \cap B$: estrarre un # primo e pari. $A \cap B = \{2\}$.

Osservazione: l'evento intersezione di due eventi incompatibili è sempre l'evento impossibile.

– Esempio

- Esperimento: Lancio di un dado a 6 facce.
- A : estrarre un # pari $A = \{2, 4, 6\}$.
- B : estrarre un 3 $B = \{3\}$.
- Evento intersezione: impossibile!

Evento unione

Definizione: Dati due eventi A e B definisco l'evento unione quando almeno uno dei due si verifica. $E = A \cup B$.

– Esempio

- Esperimento: Lancio di un dado a 6 facce.
- Evento A : estrarre un # perfetto $A = \{1, 6\}$.
- Evento B : estrarre un # primo $B = \{1, 2, 3, 5\}$.
- Evento unione: estrarre un # primo o perfetto.

$$E = A \cup B = \{1, 2, 3, 5, 6\}.$$

– Probabilità classica:

$$P(A \cup B) = \frac{\|A \cup B\|}{\|U\|} = \frac{\|A\| + \|B\| - \|A \cap B\|}{\|U\|}$$

$$P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{2}{6} + \frac{4}{6} - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}.$$

- Se gli eventi sono incompatibili $P(E) = P(A) + P(B)$.

Definizione assiomatica di Probabilità.

Definizione: Dato uno spazio degli eventi U , la probabilità è una funzione $P(\cdot)$ che associa ad ogni possibile evento E un numero reale $P(E)$, rispettando i seguenti assiomi

– Assiomi

- $P(E) \geq 0$.
- $P(U) = 1$.
- Se A e B sono incompatibili $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

– Si ricavano le seguenti proprietà:

- $P(\emptyset) = 0$.
- $0 \leq P(E) \leq 1$.
- $P(\bar{E}) = 1 - P(E)$.
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Definizione assiomatica: esempio

- *Esempio*
 - *Esperimento*: Estrazione super enalotto.
 - *Evento*: Vincere.
 - *Spazio degli eventi*: $U = \{0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 5+1 \ 6\}$
 - $E = \{3 \ 4 \ 5 \ 5+1 \ 6\}$.

- *Supponiamo di avere le probabilità degli eventi elementari (incompatibili)*

$$P(E) = P(E_3) + P(E_4) + P(E_5) + P(E_{5+1}) + P(E_6) = 0,3145\%$$

oppure

$$P(E) = 1 - P(\bar{E}) = 1 - (P(E_0) + P(E_1) + P(E_2)) =$$

$$P(E) = 0,3145\%$$

E_i	n_i	$P(E_i)$
0	406.481.544	65,28621790%
1	185.232.096	29,75068157%
2	28.942.515	4,64854400%
3	1.905.680	0,30607697%
4	52.290	0,00839845%
5	498	0,00007999%
5+1	6	0,00000096%
6	1	0,00000016%
	622.614.630	100,00000000%

Definizione assiomatica: considerazioni

- Nessuna metodologia di calcolo viene fornita per l'evento elementare.
- Si forniscono solo regole di derivazione.
- Se si aggiunge l'ipotesi che tutti gli eventi sono equiprobabili si riottiene la definizione classica.

Probabilità condizionata: motivazioni.

- *Osservazione:* A volte ho delle informazioni parziali sull'esito dell'esperimento.
 - Esempio:
 - Esperimento: estrazione di uno studente del corso.
 - Evento: altezza superiore a 185 cm.
 - Informazione aggiuntiva: l'estratto è maschio
 - Esempio 2:
 - Esperimento: Lancio di un dado.
 $U = \{1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\}$
 - Evento: esca un # pari.
 $A = \{2\ 4\ 6\}$
 - Informazione aggiuntiva: l'estratto è un # primo.
 $B = \{1\ 2\ 3\ 5\}$

Probabilità condizionata.

- *Definizione:* Dati due eventi A e B che insistono sullo stesso spazio degli eventi U , definisco $P(A | B)$ [leggasi: “probabilità di A condizionata B ”] come la probabilità che si verifichi A sapendo che si è già verificato B .

- Probabilità classica

$$P(A|B) = \frac{\|A \cap B\|}{\|B\|}$$

- Probabilità assiomatica

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

- *Osservazione:* se B non si verifica, $P(A|B)$ non ha senso.

Probabilità condizionata: calcolo.

- Esempio: lancio di un dado. $U = \{1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\}$
 - A : esca un # pari. $A = \{2\ 4\ 6\} \Rightarrow P(A) = 0.500$
 - B : l'estratto è un # primo. $B = \{1\ 2\ 3\ 5\} \Rightarrow P(B) = 0.666$
 - $A \cap B = \{2\} \Rightarrow P(A \cap B) = 0.166$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.166}{0.6666} = 0.25 < P(A)$$

- Esempio: estrazione di un biotecnologo.
 - A : altezza superiore a 185 cm. $\Rightarrow P(A) = 0.10$
 - B : l'estratto è uomo. $\Rightarrow P(B) = 0.35$
 - $A \cap B$: uomini più alti di 185 cm. $\Rightarrow P(A \cap B) = 0.07$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.07}{0.35} = 0.2 > P(A)$$

Probabilità assiomatica: evento intersezione

- Teorema: Dati due eventi generici A e B vale

$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A) = P(B)P(A|B)$$

Dim:

$$P(A)P(B|A) = P(A) \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = P(A \cap B)$$

$$P(B)P(A|B) = P(B) \frac{P(B \cap A)}{P(B)} = P(A \cap B)$$

- Esercizio: Calcolare la probabilità che esca un # pari e primo lanciando un dado a 6 facce.
 - $P(B) = 4/6$
 - $P(A|B) = 1/4$.
 - $P(A \cap B) = P(A)P(B|A) = 1/6$.

Eventi Indipendenti

- *Concetto (nella realtà)*: due eventi si dicono indipendenti se non si influenzano. Ovvero il verificarsi di uno non influenza l'altro.
- *Idea (statistica)*: due eventi sono indipendenti se il verificarsi di uno non modifica la probabilità di verificarsi dell'altro.
- *Definizione (statistica)*: due eventi A e B si dicono indipendenti se
$$P(A|B) = P(A) \quad P(B|A) = P(B)$$
- *Osservazione*: se voglio verificare l'indipendenza (statistica) di due eventi A e B devo controllare se le due relazioni valgono.

Eventi Indipendenti: verifica

Esperimento: di due dadi a 4 facce

- evento elementare: esito dei 2 dadi
- Spazio degli eventi: $U = \{(1,1) (1,2) (1,3) (1,4) (2,1) (2,2) (2,3) (2,4) (3,1) (3,2) (3,3) (3,4) (4,1) (4,2) (4,3) (4,4)\}$.
- **Evento A:** fare 4 con il primo dado $\Rightarrow P(A) = \frac{4}{16} = 0.25$
- **Evento B:** fare 4 con il secondo dado $\Rightarrow P(B) = \frac{4}{16} = 0.25$
- **Evento intersezione:** fare 4 con ambo i dadi $\Rightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{16}$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1/16}{1/4} = \frac{1}{4} = P(A)$$

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{1/16}{1/4} = \frac{1}{4} = P(B)$$

L'esito di un lancio di un dado non influenza il successivo!

Probabilità assiomatica: eventi indipendenti

- Teorema: Se due eventi sono indipendenti vale

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

- Esercizio
 - Esperimento: lancio contemporaneamente un dado a 6 facce ed una moneta
 - Calcolare la probabilità di ottenere una testa ed un numero maggiore di 4.
- Svolgimento:
 - A: Ottenere testa lanciando una moneta $\Rightarrow P(A) = 1/2$.
 - B: Ottenere un $\# > 4$ lanciando un dado $\Rightarrow P(B) = 1/3$.
 - Eventi indipendenti $\Rightarrow P(A \cap B) = P(A)P(B) = 1/6$.
- Osservazione: la definizione assiomatica non richiede di definire U !

Ricapitolando

- Definizione classica di probabilità: $P(E) = \frac{\|E\|}{\|U\|}$
- Definizione assiomatica di probabilità:
 - Evento certo $E = U$ $P(U) = 1$
 - Evento impossibile $E = \emptyset$ $P(\emptyset) = 0$
 - Evento complementare $P(\bar{E}) = 1 - P(E)$
 - Eventi indipendenti $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$
 - Probabilità condizionata $P(A|B) = P(A); P(B|A) = P(B)$
 - Eventi unione $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
 - Eventi incompatibili $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
 - Evento intersezione $P(A \cap B) = P(A)P(B|A)$
 - Eventi indipendenti $P(A \cap B) = P(A)P(B)$