Matematica e Statistica

Prova d'Esame (12/07/2010)

Università di Verona - Laurea in Biotecnologie - A.A. 2009/10

Matematica e Statistica

Prova d'Esame di $\boxed{\text{MATEMATICA}}$ (12/07/2010)

Università di Verona - Laurea in Biotecnologie - A.A. 2009/10

Cognome-Nome ______________________________ Matr. ______________
IN STAMPATELLO

(1) Il piano Π passa per il punto $P(0,1,-1)$ ed è ortogonale al vettore $\vec{v}=(2,-1,1)$, mentre la retta r passa per i punti P e $Q(1,3,0)$: determinare le forme parametrica e cartesiana di Π e di r.

(2) Studiare l'andamento di $f(x) = 2\sqrt{x+2} - \sqrt{|x|}$, e tracciarne il grafico.

(3) (a) Calcolare $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{2x}-e^x}{e^x+2}\,dx$ e $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\pi - x)\cos 2x\,dx$.

(b) Disegnare $S = \{(x,y) : |x-2|-1 \le y \le \log x\,,\ x \le 3\}$, e calcolarne l'area.

(4) (a) Data $g(x,y) = \dfrac{y}{x} - xy^2$, determinarne dominio, zeri, segno e limiti interessanti, disegnando i risultati. Trovarne i punti stazionari e eventuali punti di estremo locale.

(b) Disegnare il rettangolo $Q = \{(x,y) : 1 \le x \le 2,\ |y| \le 1\}$, e calcolare gli estremi assoluti di g su Q.

(5) Trovare tutte le soluzioni dell'equazione differenziale $y'' - y' - 2y = 2 - 2e^x$, e tutte quelle dell'equazione differenziale $(e^x-1)^2 y' = e^x y^2$, dicendo se ve ne sono in comune.

Matematica e Statistica

Prova d'Esame di $\boxed{\text{STATISTICA}}$ (12/07/2010)

Università di Verona - Laurea in Biotecnologie - A.A. 2009/10

Cognome-Nome ______________________________ Matr. ______________
IN STAMPATELLO

Per ogni calcolo effettuato scrivere anche la formula teorica da utilizzare. ▸▸▸▸ **Tabella sul retro** ▸▸▸▸

ESERCIZIO 1

Nell'ambito di una ricerca sul numero di mutazioni presenti nel *gene HFE* (responsabili dell'*emocromatosi*) in un gruppo di pazienti, sono state effettuate le seguenti misurazioni:

x	f
1	45
2	120
3	75
4	60

Sulla distribuzione di frequenze presentata in tabella, calcolare:

(a) la mediana e la moda, dandone una breve definizione;
(b) le medie potenziate di ordine $r = -1$, $r = 0$ e $r = 1$;
(c) il primo, il secondo ed il terzo quartile.

ESERCIZIO 2

Date le seguenti 3 distribuzioni di valori:

Alpha	Beta	Gamma
0	1	4
2	3	14
7	5	
	11	

(a) indicare con un opportuno indice quella che presenta la maggiore variabilità;
(b) procedere alla loro standardizzazione;
(c) verificare la media e la varianza delle distribuzioni standardizzate.

ESERCIZIO 3

Uno studio sull'efficacia di una determinata terapia fitogenetica per la resistenza agli agenti parassitari su un campione di 100 piante di *Nicotiana tabacum* coltivate nella pianura veronese (di cui 50 trattate e 50 no) ha dato i seguenti risultati:

Modalità	Resistenza	Non resistenza
Trattamento	45	5
Nessun trattamento	12	38

(a) sulla base delle risultanze, si può ritenere efficace il trattamento (ad un livello di significatività dell'1%)?
(b) dare una misura dell'eventuale connessione fra i due fenomeni.

Allegato: Tabella “Chi Quadrato”

Valori della variabile "Chi Quadrato" che sottendono una coda destra di ammontare alpha

G.d.l.	alpha %							
	99,5	**99**	**97,5**	**95**	**5**	**2,5**	**1**	**0,5**
1	0,00	0,00	0,00	0,00	3,84	5,02	6,64	7,88
2	0,01	0,02	0,05	0,10	5,99	7,38	9,21	10,60
3	0,07	0,12	0,22	0,35	7,82	9,35	11,35	12,84
4	0,21	0,30	0,48	0,71	9,49	11,14	13,28	14,86
5	0,41	0,55	0,83	1,15	11,07	12,83	15,09	16,75
6	0,68	0,87	1,24	1,64	12,59	14,45	16,81	18,55
7	0,99	1,24	1,69	2,17	14,07	16,01	18,48	20,28
8	1,34	1,65	2,18	2,73	15,51	17,54	20,09	21,96
9	1,74	2,09	2,70	3,33	16,92	19,02	21,67	23,59
10	2,16	2,56	3,25	3,94	18,31	20,48	23,21	25,19
11	2,60	3,05	3,82	4,58	19,68	21,92	24,73	26,76
12	3,07	3,57	4,40	5,23	21,03	23,34	26,22	28,30
13	3,57	4,11	5,01	5,89	22,36	24,74	27,69	29,82
14	4,08	4,66	5,63	6,57	23,69	26,12	29,14	31,32
15	4,60	5,23	6,26	7,26	25,00	27,49	30,58	32,80
16	5,14	5,81	6,91	7,96	26,30	28,85	32,00	34,27
17	5,70	6,41	7,56	8,67	27,59	30,19	33,41	35,72
18	6,27	7,02	8,23	9,39	28,87	31,53	34,81	37,16
19	6,84	7,63	8,91	10,12	30,14	32,85	36,19	38,58
20	7,43	8,26	9,59	10,85	31,41	34,17	37,57	40,00
21	8,03	8,90	10,28	11,59	32,67	35,48	38,93	41,40
22	8,64	9,54	10,98	12,34	33,92	36,78	40,29	42,80
23	9,26	10,20	11,69	13,09	35,17	38,08	41,64	44,18
24	9,89	10,86	12,40	13,85	36,42	39,36	42,98	45,56
25	10,52	11,52	13,12	14,61	37,65	40,65	44,31	46,93
26	11,16	12,20	13,84	15,38	38,89	41,92	45,64	48,29
27	11,81	12,88	14,57	16,15	40,11	43,20	46,96	49,65
28	12,46	13,57	15,31	16,93	41,34	44,46	48,28	50,99
29	13,12	14,26	16,05	17,71	42,56	45,72	49,59	52,34
30	13,79	14,95	16,79	18,49	43,77	46,98	50,89	53,67
40	20,71	22,16	24,43	26,51	55,76	59,34	63,69	66,77
50	27,99	29,71	32,36	34,76	67,51	71,42	76,15	79,49
60	35,53	37,49	40,48	43,19	79,08	83,30	88,38	91,95
70	43,28	45,44	48,76	51,74	90,53	95,02	100,43	104,22
80	51,17	53,54	57,15	60,39	101,88	106,63	112,33	116,32
90	59,20	61,75	65,65	69,13	113,15	118,14	124,12	128,30
100	67,33	70,07	74,22	77,93	124,34	129,56	135,81	140,17

Soluzioni

MATEMATICA

(1) Il piano Π, ortogonale al vettore $\vec{v} = (2, -1, 1)$, ha equazione cartesiana del tipo $2x-y+z+k = 0$, e il passaggio per il punto $P(0, 1, -1)$ dà $k = 2$; quanto a una forma parametrica, due vettori ortogonali a $\vec{v}$ (dunque paralleli a Π) e non paralleli tra loro sono ad esempio $\vec{w}_1 = (1, 2, 0)$ e $\vec{w}_2 = (0, 1, 1)$, da cui $\Sigma = \{(0, 1, -1) + s(1, 2, 0) + t(0, 1, 1) : s, t \in \mathbb{R}\} = \{(s, 1 + 2s + t, -1 + t) : s, t \in \mathbb{R}\}$. La retta r, passante per i punti P e $Q(1, 3, 0)$, sarà parallela al vettore $(1, 3, 0) - (0, 1, -1) = (1, 2, 1)$, da cui $r = \{(0, 1, -1) + t(1, 2, 1) : t \in \mathbb{R}\} = \{(t, 1 + 2t, -1 + t) : t \in \mathbb{R}\}$; mettendo poi $t = x$ nelle due equazioni $y = 1 + 2t$ e $z = -1 + t$ si ottiene la forma cartesiana come sistema delle equazioni $2x - y + 1 = 0$ e $x - z - 1 = 0$.

(2) (Figura 1) La funzione $f(x) = 2\sqrt{x + 2} - \sqrt{|x|}$ è definita per $x \geq -2$, ed è derivabile infinite volte nel suo dominio tranne che in $x = -2$ e $x = 0$ (in cui vale rispettivamente $f(-2) = -\sqrt{2}$ e $f(0) = 2\sqrt{2}$), punti nei quali essa è di certo continua ma probabilmente (a causa delle radici) non derivabile. L'unico limite interessante è $\lim_{x\to+\infty} f(x)$, che vale $+\infty$ (moltiplicare sopra e sotto per $2\sqrt{x + 2} + \sqrt{x}$, poi raccogliere x sopra e $\sqrt{x}$ sotto, quindi semplificare). Si ha $f(x) \geq 0$ quando $2\sqrt{x + 2} \geq \sqrt{|x|}$, che nel dominio equivale a $4(x + 2) \geq |x|$, con soluzione $x \geq -\frac{8}{5}$. Poiché $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$, non c'è asintoto obliquo a $+\infty$. Derivando (per $x \neq -2$ e $x \neq 0$) si ha $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x+2}} - \frac{\sigma}{2\sqrt{|x|}} = \frac{2\sqrt{|x|}-\sigma\sqrt{x+2}}{2\sqrt{|x|(x+2)}}$, ove $\sigma = \operatorname{sign} x$: pertanto vale $f'(x) \geq 0$ quando $2\sqrt{|x|} \geq \sigma\sqrt{x + 2}$; quando $x < 0$ (cioè quando $\sigma = -1$) ciò è sempre vero, mentre quando $x > 0$ (cioè quando $\sigma = 1$) ciò equivale a $4x \geq x + 2$, con soluzioni $x \geq \frac{2}{3}$. Dunque f cresce in $]-2, 0[$, quindi decresce in $]0, \frac{2}{3}[$, e cresce da $x = \frac{2}{3}$ in poi: ne ricaviamo che $x = 0$ è un punto di massimo singolare, e che $x = \frac{2}{3}$ è punto di minimo regolare (con $f(\frac{2}{3}) = 3\sqrt{\frac{2}{3}} = \sqrt{6} \sim 2{,}4$); si noti che, come previsto, si ha $\lim_{x\to-2} f'(x) = \lim_{x\to0} f'(x) = \infty$. Infine, derivando ancora si ottiene $f''(x) = -\frac{1}{2}(x + 2)^{-\frac{3}{2}} + \frac{1}{4}|x|^{-\frac{3}{2}}$, da cui $f''(x) \geq 0$ se e solo se $|x|^{-\frac{3}{2}} \geq 2(x + 2)^{-\frac{3}{2}}$, ovvero se e solo se $2|x|^{\frac{3}{2}} \leq (x + 2)^{\frac{3}{2}}$, che equivale a $\sqrt[3]{4}\,|x| \leq x + 2$: se $x < 0$ ciò dà $-\frac{2}{\sqrt[3]{4}+1} \leq x < 0$ (ove $-\frac{2}{\sqrt[3]{4}+1} \sim -0{,}8$), mentre se $x > 0$ si ottiene $0 < x < \frac{2}{\sqrt[3]{4}-1}$ (ove $\frac{2}{\sqrt[3]{4}-1} \sim 3{,}4$). Pertanto, posto $x_1 = -\frac{2}{\sqrt[3]{4}+1}$ e $x_2 = \frac{2}{\sqrt[3]{4}-1}$, si ha che f è convessa per $x_1 < x < 0$ e per $0 < x < x_2$, concava per $x < x_1$ e $x > x_2$, e ha due flessi nei punti x_1 e x_2.

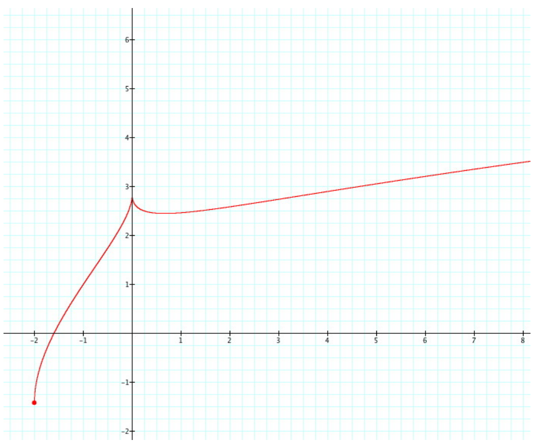
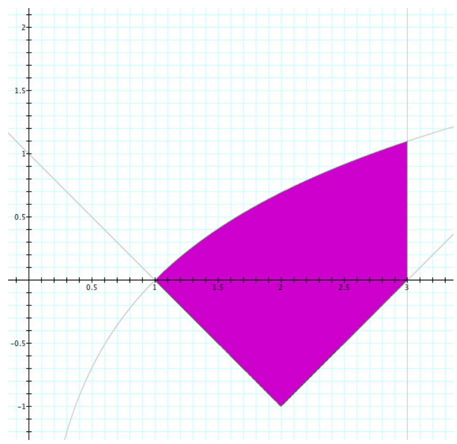
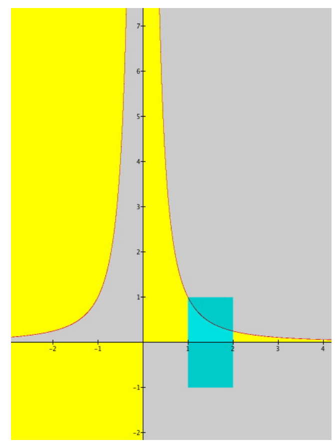
(3) (a) Posto $e^x = t$ (da cui $x = \log t$ e $dx = \frac{1}{t}\,dt$) si ottiene $\int_0^1 \frac{e^{2x}-e^x}{e^x+2}\,dx = \int_1^e \frac{t-1}{t+2}\,dt = \int_1^e (1 - \frac{3}{t+2})\,dt = (t - 3\log(t + 2)]_1^e = (e - 3\log(e + 2)) - (1 - 3\log 3) = e - 1 - 3\log\frac{e+2}{3} \sim 0{,}4$. • Integrando per parti si ha $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\pi - x)\cos 2x\,dx = ((\pi - x)\frac{1}{2}\sin 2x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-1)\frac{1}{2}\sin 2x\,dx = 0 + (-\frac{1}{4}\cos 2x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}$.

(b) (Figura 2) L'insieme $S = \{(x, y) : |x - 2| - 1 \leq y \leq \log x,\ x \leq 3\}$ è rappresentato in figura; l'area risulta pertanto $\int_1^3 \log x\,dx + \int_3^2 (x - 3)\,dx + \int_2^1 (1 - x)\,dx = (x(\log x - 1)]_1^3 + (\frac{1}{2}x^2 - 3x]_3^2 + (x - \frac{1}{2}x^2]_2^1 = (3(\log 3 - 1)) - (-1) + (-4) - (-\frac{9}{2}) + (\frac{1}{2}) - (0) = 3\log 3 - 1 \sim 2{,}3$.

(4) (a) (Figura 3) Il dominio di $g(x, y) = \frac{y}{x} - xy^2$ è dato da $x \neq 0$ (vanno esclusi i punti dell'asse y). Si ha $g(x, y) = \frac{y(1-x^2y)}{x} = 0$ quando $y = 0$ (cioè sull'asse x) o quando $y = \frac{1}{x^2}$ (punti del grafico di $\varphi(x) = \frac{1}{x^2}$); per il segno, si ha $y > 0$ a destra dell'asse x, $1 - x^2y > 0$ sotto il grafico di φ e $x > 0$ sopra l'asse y, e il segno di g ne segue per prodotto. Nei punti dell'asse y diversi dall'origine il limite vale $\mp\infty$ (il segno dipende dal fatto che ci si tenda da destra o da sinistra); invece nell'origine e in ∞_2 il limite di g non esiste, perché tendendovi lungo l'asse x la funzione è nulla, mentre, ad esempio, stando sulla curva $y = \sqrt{x}$ la funzione tende in entrambi i casi a ∞. Le derivate parziali sono $\frac{\partial g}{\partial x} = -\frac{y}{x^2} - y^2$ e $\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{1}{x} - 2xy$, e il sistema $\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial y} = 0$ non dà alcuna soluzione: dunque non vi sono punti stazionari, e in particolare nemmeno punti di estremo locale.

(b) (Figura 3) Il rettangolo $Q = \{(x, y) : 1 \leq x \leq 2, |y| \leq 1\}$ è un sottoinsieme chiuso e limitato interamente contenuto nel dominio di g, che è continua: dunque gli estremi assoluti di g su Q esistono grazie a Weierstrass. Nei punti interni di Q tali valori non possono essere assunti, perché nessuno di essi è stazionario; dunque massimo e minimo di g dovranno essere assunti in punti del bordo di Q. Nei quattro vertici $A(1, -1)$, $B(1, 1)$, $C(2, 1)$ e $D(2, -1)$ di Q la funzione vale rispettivamente $g(A) = -2$, $g(B) = 0$, $g(C) = -\frac{3}{2}$ e $g(D) = -\frac{5}{2}$; studiamo ora i quattro lati senza gli estremi. Sul lato AD la funzione vale $g(x, -1) = -\frac{1}{x} - x$ con $1 < x < 2$, ma la derivata $\frac{1}{x^2} - 1$ non si annulla lì e dunque non spuntano altri punti interessanti; lo stesso vale sul lato BC, in cui la funzione vale $g(x, 1) = \frac{1}{x} - x$ con $1 < x < 2$. Sul lato AB la funzione vale $g(1, y) = y - y^2$ con $|y| < 1$, e la derivata $1 - 2y$ si annulla per $y = \frac{1}{2}$: si trova dunque il punto $E(1, \frac{1}{2})$, in cui vale $g(E) = \frac{1}{4}$. Infine, sul lato CD la funzione vale $g(2,y)=\frac{y}{2}-2y^2$ con $|y|<1$, e la derivata $\frac{1}{2}-4y$ si annulla per $y=\frac{1}{8}$, da cui il punto $F(2,\frac{1}{8})$, in cui vale $g(F)=\frac{1}{32}$. Pertanto la questione degli estremi di g su Q è ristretta ai punti A, B, C, D, E e F: confrontando i valori in essi di g si ricava che il massimo assoluto di g su Q è $\frac{1}{4}$ (assunto in E) e il minimo assoluto è $-\frac{5}{2}$ (assunto in D).

(5) L'equazione differenziale $y''-y'-2y=2-2e^x$ è lineare del secondo ordine a coefficienti costanti. L'equazione caratteristica $t^2-t-2=0$ ha soluzioni -1 e 2, dunque le soluzioni dell'equazione omogenea associata sono del tipo $Ae^{-x}+Be^{2x}$ con $A,B\in\mathbb{R}$. Una soluzione particolare per $b_1(x)=2$ sarà una costante $\tilde{y}_1(x)=a$, e imponendo che $\tilde{y}_1''-\tilde{y}_1'-2\tilde{y}_1=2$ si ottiene subito $a=-1$. Una soluzione particolare per $b_2(x)=-2e^x$ sarà del tipo $\tilde{y}_2(x)=ae^x$, e imponendo che $\tilde{y}_2''-\tilde{y}_2'-2\tilde{y}_2=-2e^x$ si ottiene $-2ae^x=-2e^x$, ovvero $a=1$, da cui $\tilde{y}_2(x)=e^x$. Pertanto tutte le soluzioni della prima equazione differenziale sono $y(x)=Ae^{-x}+Be^{2x}+e^x-1$, con $A,B\in\mathbb{R}$. • L'equazione differenziale $(e^x-1)^2y'=e^xy^2$ è del primo ordine a variabili separabili. Separando le variabili essa diventa $y^{-2}\,dy=\frac{e^x}{(e^x-1)^2}\,dx$, da cui integrando si ottiene $-\frac{1}{y}=-\frac{1}{e^x-1}+k=-\frac{1+k(e^x-1)}{e^x-1}$ al variare di $k\in\mathbb{R}$, da cui infine $y=\frac{e^x-1}{1+k(e^x-1)}$ al variare di $k\in\mathbb{R}$. • Confrontando i due insiemi di soluzioni, è chiaro che l'unica in comune tra le due equazioni differenziali è $y(x)=e^x-1$, ottenuta per $A=B=k=0$.

1. Il grafico della funzione dell'ex. 2. **2.** L'insieme dell'ex. (3.b). **3.** Ex. 4: zeri (rosso), segno positivo (giallo) e negativo (grigio) della funzione g; il rettangolo Q (azzurro).

ESERCIZIO 1

Nell'ambito di una ricerca sul numero di mutazioni presenti nel gene HFE (responsabili dell'emocromatosi) in un gruppo di pazienti, sono state effettuate le seguenti misurazioni.
Sulla distribuzione di frequenze presentata in tabella, calcolare:
a) la mediana e la moda, dandone una breve definizione;
b) le medie potenziate di ordine r = -1, r = 0 e r = 1;
c) il primo, il secondo e il terzo quartile.

x	f	x*f	f/x	ln(x)	ln(x)*f
1	45	45	45	0	0
2	120	240	60	0,6931	83,1777
3	75	225	25	1,0986	82,3959
4	60	240	15	1,3863	83,1777
	300	**750**	**145**	**3,1781**	**248,7512**

a) Calcolo della mediana e della moda:

x50 =< mediana =< x51 : **me** = **2**   E' il valore che si trova a metà della distribuzione ordinata dei valori.

moda = **2**   E' il valore che presenta la frequenza maggiore.

b) Calcolo delle medie potenziate di ordine r = -1, r = 0 e r = 1:
La media potenziata di ordine r = -1 è la media armonica.
La media potenziata di ordine r = 0 corrisponde alla media geometrica.
La media potenziata di ordine r = 1 è la media aritmetica.

$$\mathbf{Ma(X)} = \frac{\Sigma f}{\Sigma f/x} = \frac{300}{145} = \mathbf{2,069} \qquad r = -1$$

$$\ln(Mg(X)) = \frac{\Sigma \ln(x) * f}{\Sigma f} = \frac{248,7512}{300} = \mathbf{0,829} \qquad \mathbf{Mg(X)} = e^{0,829} = \mathbf{2,291} \qquad r = 0$$

$$\mathbf{M(X)} = \frac{\Sigma x * f}{\Sigma f} = \frac{750}{300} = \mathbf{2,5} \qquad r = 1$$

c) Calcolo del primo, del secondo e del terzo quartile:

Q1 = X 75° = **2**

Q2 = X 150° = **2 = mediana**

Q3 = X 225° = **3**

ESERCIZIO 2

Date le seguenti 3 distribuzioni di valori:
a) indicare con un opportuno indice quella che presenta la maggiore variabilità;
b) procedere alla loro standardizzazione;
c) verificare la media e la varianza delle distribuzioni standardizzate.

A	A^2
0	0
2	4
7	49
9	**53**

B	B^2
1	1
3	9
5	25
11	121
20	**156**

C	C^2
4	16
14	196
18	**212**

a) Per confrontare la variabilità di diverse distribuzioni, occorre calcolare il coefficiente di variazione Cv.
Si calcolano quindi la media e lo scarto quadratico medio delle tre distribuzioni:

$$M(A) = \frac{9}{3} = \mathbf{3} \qquad V(A) = \frac{53}{3} - 3^2 = \mathbf{8{,}6667}$$

$$M(B) = \frac{20}{4} = \mathbf{5} \qquad V(B) = \frac{156}{4} - 5^2 = \mathbf{14}$$

$$M(C) = \frac{18}{2} = \mathbf{9} \qquad V(C) = \frac{212}{2} - 9^2 = \mathbf{25}$$

sqm(A) = **2,9439** sqm(B) = **3,7417** sqm(C) = **5**

I coefficienti di variazione saranno quindi dati dal rapporto espresso dalla seguente formula: $Cv = \frac{sqm}{M}$

Cv(A) = **0,9813** Cv(B) = **0,7483** Cv(C) = **0,5556**

La distribuzione più variabile è la A.

b) Standardizzazione delle distribuzioni.
La standardizzazione si effettua trasformando ciascun valore con la formula: $u = \frac{x - M}{sqm}$

u(A)
-1,0190
-0,3397
1,3587

u(B)
-1,0690
-0,5345
0,0000
1,6036

u(C)
-1
1

c) Calcolo della media e della varianza delle distribuzioni standardizzate.

u(A)	$u(A)^2$
-1,0190	1,0385
-0,3397	0,1154
1,3587	1,8462
0	**3**

u(B)	$u(B)^2$
-1,0690	1,1429
-0,5345	0,2857
0	0,0
1,6036	2,5714
0	**4**

u(C)	$u(C)^2$
-1	1
1	1
0	**2**

M(u(A)) = 0 $\quad$ **V(u(A)) =** $\frac{3}{3} - 0^2 =$ **1**

M(u(B)) = 0 $\quad$ **V(u(B)) =** $\frac{4}{4} - 0^2 =$ **1**

M(u(C)) = 0 $\quad$ **V(u(C)) =** $\frac{2}{2} - 0^2 =$ **1**

Si verifica così che nelle distribuzioni standardizzate la media è nulla, mentre la varianza è pari a 1.

ESERCIZIO 3

Uno studio sull'efficacia di una determinata terapia fitogenetica per la resistenza agli agenti parassitari su un campione di 100 piante di *Nicotiana tabacum* coltivate nella pianura veronese (di cui 50 trattate e 50 no) ha dato i seguenti risultati:

Modalità	**Resistenza**	**Non resistenza**
Trattamento	45	5
Nessun trattamento	12	38

a) Sulla base dei risultati, si può ritenere efficace il trattamento (ad un livello di significatività dell'1%)?
b) Dare una misura dell'eventuale connessione fra i due fenomeni.

a) Si effettua il test di indipendenza sui risultati della tabella a doppia entrata:

Frequenze osservate f:

f	**Resistenza**	**Non resistenza**	
Trattamento	45	5	**50**
Nessun trattamento	12	38	**50**
	57	**43**	**100**

Calcolo delle frequenze teoriche f* sulla base delle frequenze marginali (somme di riga * colonna divise per il totale):

f*	**Resistenza**	**Non resistenza**	
Trattamento	28,5	21,5	**50**
Nessun trattamento	28,5	21,5	**50**
	57	**43**	**100**

f	**f***	**$(f-f^*)^2/f^*$**
45	28,5	9,5526
5	21,5	12,6628
12	28,5	9,5526
38	21,5	12,6628
		44,4308

Chi quadrato calcolato = 44,4308

Calcolo del Chi quadrato teorico con ν = (r-1)*(c-1) = (2-1)*(2-1) = 1 g.d.l.

Dalla tabella del Chi quadrato, a livello di significatività alpha dell'1% e con 1 g.d.l., risulta un valore teorico di **6,63**

Poiché il Chi quadrato calcolato è maggiore del Chi quadrato teorico, si rifiuta l'ipotesi di indipendenza e si conferma la presenza di una connessione fra trattamento e resistenza.

b) Misurazione del grado di connessione tramite il Coefficiente di Contingenza:

C = RADQ(ChiQ/(ChiQ+N) * k/(k-1))= **0,7844** **Elevata connessione fra i 2 fenomeni**

dove k è il minore fra il n. di righe e il n. di colonne.