Matematica – Autoverifica n. 2

Funzioni di una variabile reale - Limiti - Derivazione

Università di Verona - Laurea in Biotecnologie - A.A. 2009/10

venerdì 6 novembre 2009

Istruzioni generali. **(1)** Risolvere i quesiti senza guardare lo svolgimento che sarà fornito mercoledì 11/11. **(2)** Al termine, autovalutare la propria risoluzione con l'ausilio dello svolgimento indicato. **(3)** Una volta terminata l'autovalutazione, collegandosi via web al sito `http://docenti.math.unipd.it/maraston/FormValut_0910/compito12.php` a partire dal pomeriggio di mercoledì 11/11 e fino al venerdì seguente 13/11 sarà possibile comunicare via web in forma anonima i risultati dell'autovalutazione esercizio per esercizio, assieme ad eventuali commenti: queste informazioni serviranno al docente come riscontro del grado di comprensione generale delle nozioni insegnate.
Istruzioni per l'autovalutazione. Ex. 1: 18 pt (3×6 pt). **Ex. 2:** 36 pt (3×12 pt). **Ex. 3:** 30 pt (3×10 pt). **Ex. 4:** 16 pt (9+7 pt). **Totale:** 100 pt. Lo studente valuti da sè quanto assegnarsi per una risoluzione parziale dei quesiti.
Consigli. Questa verifica vuole aiutare lo studente a capire il proprio grado di comprensione degli argomenti trattati a lezione, dunque andrebbe svolta individualmente con impegno, usando lo svolgimento fornito solo per l'autovalutazione e per rendersi conto delle difficoltà incontrate nel lavoro solitario. Inoltre, per provare l'impegno di un esame, la verifica andrebbe affrontata col minor numero possibile di interruzioni (ad es. in una seduta da 3 ore, o in due sedute da 2 ore).

---

(1) Calcolare i seguenti limiti per $\alpha = -1$ e $\alpha = 1$. (Facoltativo: anche nel caso generale $\alpha \in \mathbb{R}$.)

$$\text{(a)}\ \lim_{x\to 0} \frac{x^3}{x+1} e^{\alpha/x}\,; \qquad \text{(b)}\ \lim_{x\to -\infty} (\sin x + \operatorname{arctg}(\alpha x))\,; \qquad \text{(c)}\ \lim_{x\to 1} \frac{\alpha - \cos(x^2-1)}{\log x}\,.$$

(2) Per ognuna delle seguenti funzioni $f(x)$ determinare il *dominio naturale* A_f, gli *zeri* (ovvero gli $x \in A_f$ tali che $f(x) = 0$), il *segno* (ovvero gli $x \in A_f$ tali che $f(x) > 0$), i *limiti notevoli* (ovvero $\lim_{x\to c} f(x)$ ove $c \in \widetilde{\mathbb{R}}$ è di accumulazione per il dominio A_f); dire infine dove f è *continua*, dove è *derivabile*, calcolare la *derivata* e determinare la *retta tangente al grafico in* $x = 3$:

$$\text{(a)}\ f(x) = x - \sqrt{x^2 - x - 2}\,; \qquad \text{(b)}\ f(x) = \operatorname{arctg}(1 + \sin \pi x)\,; \qquad \text{(c)}\ f(x) = \frac{\log(|x| - 2)}{x+3}\,.$$

(3) Derivare le seguenti funzioni; dire poi in quali punti del loro dominio sono crescenti e decrescenti, determinandone di conseguenza i punti di massimo e minimo locale:

$$\text{(a)}\ f(x) = (x+1)^3 e^x\,; \qquad \text{(b)}\ f(x) = 2\log(x^2 + |x| + 1) - x; \qquad \text{(c)}\ f(x) = x + \sin 2x\,.$$

(4) Risolvere i seguenti problemi di minimo.

(a) Tra tutti i coni circoscritti a una sfera di raggio R, quant'è alto quello di volume minimo?

(b) Qual'è il punto del grafico di $f(x) = \sqrt{\log(x+2)}$ più vicino all'origine?

Soluzioni.

(1) (a) $\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{x^3}{x+1} e^{\alpha/x}}$ Nel caso $\alpha = -1$ si ha $\lim_{x\to 0} \frac{x^3}{x+1} e^{-\frac{1}{x}}$. Quando $x \to 0^+$ il limite è determinato, e vale 0^+. Invece quando $x \to 0^-$ si ha la forma indeterminata $0 \cdot \infty$: col cambio di variabile $t = -\frac{1}{x}$ si ottiene $-\lim_{t\to+\infty} \frac{e^t}{t^2(t-1)} = -\lim_{t\to+\infty} \frac{e^t}{t^3} \frac{t^3}{t^2(t-1)} = -\infty$. Nel caso $\alpha = 1$, ragionando in modo analogo, il limite vale $+\infty$ quando $x \to 0^+$ e vale 0^- quando $x \to 0^-$. In generale, i casi $\alpha \gtrless 0$ sono rispettivamente come i casi $\alpha = \pm 1$, mentre nel caso $\alpha = 0$ si ottiene $\lim_{x\to 0^\pm} \frac{x^3}{x+1} = 0^\pm$.

(b) $\boxed{\lim_{x\to-\infty} (\sin x + \operatorname{arctg}(\alpha x))}$ Se $\alpha = -1$ (più in generale, se $\alpha < 0$) si ha $\operatorname{arctg}(\alpha x) \to \frac{\pi}{2}$; se $\alpha = 1$ (più in generale, per $\alpha > 0$) si ha $\operatorname{arctg}(\alpha x) \to -\frac{\pi}{2}$; infine, se $\alpha = 0$ si ha $\operatorname{arctg}(0) = 0$: in ogni caso, quando x tende a $-\infty$ la funzione $\operatorname{arctg}(\alpha x)$ tende ad un limite finito. D'altra parte, però, $\lim_{x\to-\infty} \sin x$ non esiste (infatti il seno oscilla tra -1 e 1): dunque il limite proposto non esiste mai.

(c) $\boxed{\lim_{x\to 1} \frac{\alpha - \cos(x^2-1)}{\log x}}$ Il denominatore $\log x$ tende a 0, mentre il numeratore $\alpha - \cos(x^2 - 1)$ tende al numero finito $\alpha - 1$: pertanto, se $\alpha - 1 \neq 0$ (ovvero se $\alpha \neq 1$) il limite è determinato e vale $\pm\infty$ (il segno dipende sia dal segno di $\alpha - 1$ che dal lato da cui si tende a 1; più precisamente, distinguendo i due lati, il limite vale $\lim_{x\to 1^\pm} \frac{\alpha-\cos(x^2-1)}{\log x} = \pm(\operatorname{sign}(\alpha - 1))\infty$). Se invece $\alpha = 1$ siamo in forma determinata $\frac{0}{0}$: applicando de l'Hôpital si ottiene $\lim_{x\to 1} \frac{1-\cos(x^2-1)}{\log x} = \lim_{x\to 1} \frac{2x \sin(x^2-1)}{1/x} = \lim_{x\to 1} 2x^2 \sin(x^2 - 1) = 0$. Allo stesso risultato si arriva anche in questo modo: ricordando i limiti notevoli $\lim_{t\to 0} \frac{1-\cos t}{t^2} = \frac{1}{2}$ e $\lim_{t\to 0} \frac{\log(1+t)}{t} = 1$ converrà fare il cambio $u = x - 1$ ottenendo $\lim_{x\to 1} \frac{1-\cos(x^2-1)}{\log x} = \lim_{u\to 0} \frac{1-\cos(u^2+2u)}{\log(1+u)} = \lim_{u\to 0} \frac{1-\cos(u^2+2u)}{(u^2+2u)^2} \frac{(u^2+2u)^2}{u} \frac{u}{\log(1+u)} = 0$.

(2) I risultati di questo esercizio si comprenderanno visivamente osservando i grafici delle funzioni, riportati in figura.

(a) $\boxed{f(x) = x - \sqrt{x^2 - x - 2}}$ Il dominio è dato da $x^2 - x - 2 \geq 0$, ovvero $x \leq -1$ oppure $x \geq 2$. Si ha $f(x) = 0$ quando $x = \sqrt{x^2 - x - 2}$; ponendo $x \geq 0$, ciò equivale a $x^2 = x^2 - x - 2$, ovvero $x = -2$ (non accettabile, perché come detto deve essere $x \geq 0$): dunque f non ha zeri. Si ha poi $f(x) > 0$ quando $x > \sqrt{x^2 - x - 2}$, che per $x \geq 0$ equivale a $x^2 > x^2 - x - 2$, ovvero $x > -2$ (sempre vero quando $x \geq 0$): dunque, limitandosi al dominio, si ha $f(x) > 0$ se e solo se $x \geq 2$. Nei punti -1 e 2 la funzione è continua, e vale $f(-1) = -1$ e $f(2) = 2$; i limiti notevoli sono dunque $\lim_{x\to\mp\infty} f(x)$. Il limite $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ è determinato e vale $-\infty$, mentre $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ è in forma indeterminata $+\infty - \infty$ e richiede più attenzione. Moltiplicando e dividendo per $x + \sqrt{x^2 - x - 2}$ il limite diventa $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-(x^2-x-2)}{x+\sqrt{x^2-x-2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x+2}{x+\sqrt{x^2-x-2}}$, in forma indeterminata $\frac{0}{0}$: purtroppo in questo caso de l'Hôpital non aiuta molto (provare), e conviene procedere piuttosto raccogliendo x sopra e sotto, ottenendo $\lim_{x\to+\infty} \frac{x(1+\frac{2}{x})}{x(1+\sqrt{1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}})} = \frac{1}{2}$. La funzione f è continua in ogni punto del dominio, e derivabile tranne che in $x = -1$ e $x = 2$ (a causa della radice quadrata); la derivata è $f'(x) = 1 - \frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x-2}}$, e la retta tangente al grafico in $x = 3$ è $y - f(3) = f'(3)(x - 3)$, ovvero $y - 1 = -\frac{1}{4}(x - 3)$, ovvero $y = -\frac{1}{4}x + \frac{7}{4}$.

(b) $\boxed{f(x) = \operatorname{arctg}(1 + \sin \pi x)}$ La funzione è definita su tutto $\mathbb{R}$, si annulla quando $1 + \sin \pi x = 0$ (ovvero per $\sin \pi x = -1$, cioè per $\pi x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, cioè per $x = -\frac{1}{2} + 2k$ con $k \in \mathbb{Z}$, dunque nei punti $x = \dots, -\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots$) ed è > 0 quando $\sin \pi x > -1$, il che accade sempre tranne nei punti precedenti in cui si annulla. I limiti notevoli sono per $x \to \mp\infty$ ma non esistono (perché non esistono i limiti di $\sin \pi x$). La funzione è derivabile ovunque, con $f'(x) = \frac{1}{1+(1+\sin \pi x)^2}(\pi \cos \pi x)$; da $f(3) = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$ e $f'(3) = -\frac{\pi}{2}$ si trova la retta tangente $y - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2}(x - 3)$, ovvero $y = -\frac{\pi}{2}x + \frac{7\pi}{4}$.

(c) $\boxed{f(x) = \frac{\log(|x|-2)}{x+3}}$ Il dominio è dato da $|x| > 2$ e $x \neq -3$, cioè $x < -2$ (ma $x \neq -3$) oppure $x > 2$. Si ha $f(x) = 0$ quando $\log(|x| - 2) = 0$, ovvero $|x| - 2 = 1$, il che accade per $x = -3$ (non accettabile) oppure $x = 3$ (accettabile). Il numeratore è > 0 quando $|x| - 2 > 1$, ovvero $|x| > 3$, ovvero $x < -3$ oppure $x > 3$, mentre il denominatore è > 0 per $x > -3$: ne risulta che $f(x) > 0$ per $x > 3$. I limiti notevoli sono in $-\infty$, -3^-, -3^+, -2^-, 2^+, $+\infty$. Il $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\log(x-2)}{x+3}$ è in forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$, e de l'Hôpital porge $\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x-2}}{1} = 0^+$ (alternativamente, ricordando che $\lim_{t\to+\infty} \frac{\log t}{t} = 0$, si ritrova $\lim_{x\to+\infty} \frac{\log(|x|-2)}{x+3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\log(x-2)}{x+3} =$

$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log(x-2)}{x-2}\frac{x-2}{x+3} = 0 \cdot 1 = 0^+$), e similmente si dimostra che $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0^-$. I limiti in -2^- e 2^+ sono determinati, e valgono entrambi $-\infty$. Infine, il $\lim_{x\to-3} f(x) = \lim_{x\to-3} \frac{\log(-x-2)}{x+3}$ è in forma indeterminata $\frac{0}{0}$: con de l'Hôpital si ha $\lim_{x\to-3} \frac{-\frac{1}{-x-2}}{1} = -1$ (alternativamente, ricordando che $\lim_{t\to0} \frac{\log(1+t)}{t} = 1$, posto $x + 3 = t$ si ottiene $\lim_{x\to-3} f(x) = \lim_{x\to-3} \frac{\log(-x-2)}{x+3} = \lim_{t\to0} \frac{\log(1-t)}{t} = -\lim_{t\to0} \frac{\log(1-t)}{-t} = -1$). La funzione è derivabile in ogni punto del dominio, con $f'(x) = \frac{\frac{\mathrm{sign}\,x}{|x|-2}(x+3)-\log(|x|-2)}{(x+3)^2}$; essendo $f(3) = 0$ e $f'(3) = \frac{1}{6}$, la retta tangente cercata è $y - 0 = \frac{1}{6}(x - 3)$, ovvero $y = \frac{1}{6}x - \frac{1}{2}$.

(3) I risultati di questo esercizio si comprenderanno visivamente osservando i grafici delle funzioni, riportati in figura.

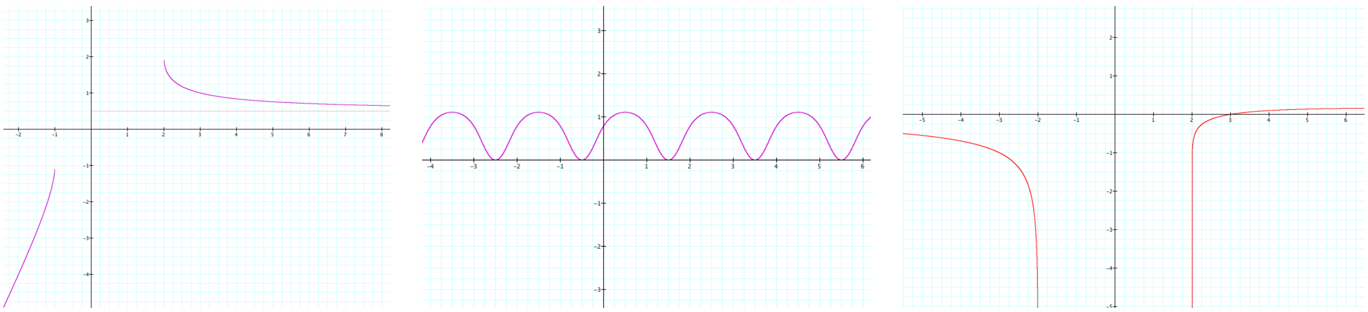
(a) $\boxed{f(x) = (x + 1)^3 e^x}$ La funzione è definita e derivabile in tutto $\mathbb{R}$. La derivata è $f'(x) = 3(x+1)^2e^x+(x+1)^3e^x = (x+1)^2(x+4)e^x$, dunque si hanno punti stazionari in $x = -1$ e in $x = -4$; essendo $f'(x) > 0$ per $x > -4$, notiamo che f decresce in $]-\infty, -4[$ e cresce poi, pertanto $x = -4$ è un punto di minimo locale (in questo caso addirittura di minimo assoluto); invece $x = -1$ è solo un punto di flesso orizzontale.

(b) $\boxed{f(x) = 2\log(x^2 + |x| + 1) - x}$ La funzione è definita e continua in tutto $\mathbb{R}$ (si noti che $x^2+|x|+1 > 0$ per ogni x), ed è derivabile ovunque tranne che in $x = 0$ (dove, a causa del modulo, è probabile che vi sia un punto angoloso). La derivata è $f'(x) = \frac{2(2x+\mathrm{sign}\,x)}{x^2+|x|+1} - 1$. Quando $x > 0$ si ha $\mathrm{sign}\,x = 1$, dunque $f'(x) = \frac{2(2x+1)}{x^2+x+1} - 1 = -\frac{x^2-3x-1}{x^2+x+1}$: in questo caso si ha $f'(x) = 0$ per $x = x_0 := \frac{1}{2}(3 + \sqrt{13})$ e $f'(x) > 0$ per $0 < x < x_0$, dunque la funzione cresce in $]0, x_0[$ e decresce per $x > x_0$, che dunque risulta di massimo locale. Quando invece $x < 0$ si ha $\mathrm{sign}\,x = -1$, dunque $f'(x) = \frac{2(2x-1)}{x^2-x+1} - 1 = -\frac{x^2-5x+3}{x^2-x+1}$: in questo caso si ha sempre $f'(x) < 0$ (si ricordi che ora stiamo supponendo che $x < 0$), dunque la funzione decresce in tutto $]-\infty, 0[$. Il punto $x = 0$ è effettivamente angoloso, perché $f'_-(0) = -3 \neq f'_+(0) = 1$; inoltre, poiché f decresce subito prima e cresce subito dopo di esso, tale punto è di minimo locale (con $f(0) = 0$).

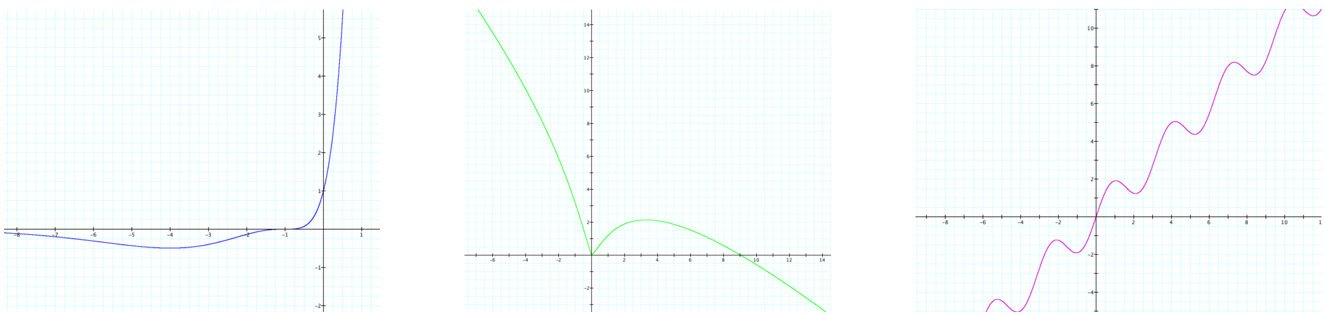
(c) $\boxed{f(x) = x + \sin 2x}$ La funzione è derivabile ovunque con $f'(x) = 1 + 2\cos 2x$. I punti stazionari sono dati da $f'(x) = 1+2\cos 2x = 0$, ovvero $\cos 2x = -\frac{1}{2}$, ovvero $2x = \pm\frac{2}{\pi}3+2k\pi$, ovvero $x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$; la funzione è crescente dove $f'(x) > 0$, ovvero $\cos 2x > -\frac{1}{2}$, ovvero $-\frac{2\pi}{3}+2k\pi < 2x < \frac{2\pi}{3}+2k\pi$, ovvero $-\frac{\pi}{3}+k\pi < x < \frac{\pi}{3}+k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$, e decrescente altrove: ad esempio, per $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ la funzione decresce in $[-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{3}[$, poi cresce in $[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}[$ e poi torna a decrescere in $[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}]$. Ne ricaviamo che i punti $x = -\frac{\pi}{3} + k\pi$ sono di minimo locale, e i punti $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$ sono di massimo locale.

(4) (a) Sia x l'altezza di un cono circoscritto alla sfera di raggio R: è chiaro che x determina il cono e, affinché il problema abbia senso, dovrà essere $x > 2R$. Un disegno della sezione verticale di cono e sfera mostra facilmente che, in base al Teorema di Pitagora, i segmenti tangenti alla sfera partenti dal vertice del cono devono essere lunghi $\sqrt{(x-R)^2 - R^2} = \sqrt{x(x-2R)}$; detta y la lunghezza di metà della base del cono, sempre per Pitagora deve accadere che $x^2 + y^2 = (\sqrt{x(x-2R)} + y)^2$, da cui si ricava che $y = R\sqrt{\frac{x}{x-2R}}$. Il volume del cono è allora $V(x) = \frac{1}{3}xy^2\pi = \frac{R^2\pi}{3}\frac{x^2}{x-2R}$: essendo $V'(x) = \frac{R^2\pi}{3}\frac{x(x-4R)}{(x-2R)^2}$, per $x > 2R$ si ha $V'(x) \geq 0$ quando $x \geq 4R$, in altre parole il volume del cono decresce mentre l'altezza passa da $2R$ a $4R$ e cresce dopo $4R$. Pertanto il cono di volume minimo è alto $4R$ (il doppio del diametro della sfera inscritta), e tale volume minimo è $V(4R) = \frac{8R^3\pi}{3}$.

(b) (Vedi la figura) La funzione $f(x) = \sqrt{\log(x + 2)}$ è definita per $\log(x+2) \geq 0$, ovvero per $x+2 \geq 1$, cioè $x \geq -1$, e la distanza del punto del grafico $(x, f(x))$ dall'origine $(0, 0)$ è, come noto, $d(x) = \sqrt{x^2 + f(x)^2} = \sqrt{x^2 + \log(x + 2)}$ (con $x \geq -1$). Da $d'(x) = \frac{2x+\frac{1}{x+2}}{2\sqrt{x^2+\log(x+2)}}$ si ricava $d'(x) \geq 0$ per $2x + \frac{1}{x+2} \geq 0$, ovvero (ricordando che $x \geq -1$) quando $x \geq x_0 := -1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \sim -0{,}3$: in altre parole, andando da -1 a x_0 il punto del grafico si sta avvicinando all'origine, e da x_0 in poi si allontana. Il punto cercato è dunque $(x_0, f(x_0))$.



Grafici delle funzioni dell'ex. 2: **(a)** $f(x) = x - \sqrt{x^2 - x - 2}$; **(b)** $f(x) = \operatorname{arctg}(1 + \sin \pi x)$; **(c)** $f(x) = \frac{\log(|x|-2)}{x+3}$.



Grafici delle funzioni dell'ex. 3: **(a)** $f(x) = (x+1)^3 e^x$; **(b)** $f(x) = 2\log(x^2 + |x| + 1) - x$; **(c)** $f(x) = x + \sin 2x$.

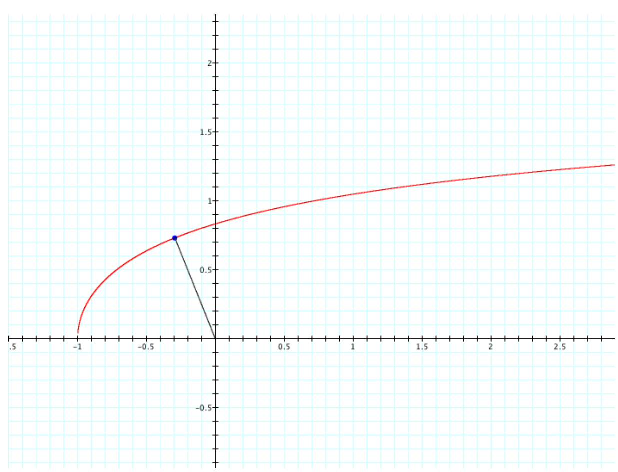


Grafico della funzione $f(x) = \sqrt{\log(x+2)}$ dell'ex. 4(b), e punto di minima distanza dall'origine.