**Soluzioni Foglio 5** (15 novembre 2009).

**Esercizio 1** (Punti 8). Si decida se i seguenti enunciati sono veri o falsi (motivando la risposta):

1. Esiste un'applicazione lineare suriettiva $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ con nucleo $\ker f =< (1,0,1)^T >$.
**Sì**, basta completare $v_1 = (1,0,1)^T$ a una base $\{v_1, v_2, v_3\}$ di $\mathbb{R}^3$ e definire $f$ opportunamente sulla base, ad esempio: $f(v_1) = 0,\ f(v_2) = e_1,\ f(v_3) = e_2$, dove $\{e_1, e_2\}$ è la base canonica di $\mathbb{R}^2$.

2. Esiste un'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ con immagine Im$f =< (1,1)^T >$.
**Sì**, definiamo $f$ ad esempio sulla base canonica $\{e_1, e_2\}$ di $\mathbb{R}^2$, ponendo: $f(e_1) = f(e_2) = (1,1)^T$.

3. Esiste un'applicazione lineare iniettiva $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ con immagine Im$f =< (1,0,1)^T, (1,3,0)^T) >$.
**No**, $(1,0,1)^T, (1,3,0)^T \notin \mathbb{R}^2$.

4. Esiste una matrice non invertibile $A \in M_{3\times 3}$ con $N(A) = 0$.
**No**, se $N(A) = 0$, allora $\mathrm{rk}A = 3 - \mathrm{dim}N(A) = 3$ e quindi $A$ è invertibile.

**Esercizio 2** (Punti 8). **Soluzione:**

1. $N(A) =< \frac{5}{7}, -\frac{4}{7}, 1, 0)^T$ e $\mathrm{dim}C(A^H) = 4 - \mathrm{dim}N(A) = 3$,
quindi le tre colonne di $A^H$ formano una base di $C(A^H)$.

2. Il sistema lineare $Ax = b$ dove $b = (4,0,11)^T$ ha la soluzione $L = p + N(A)$ con $p = (-\frac{3}{7}, \frac{8}{7}, 0, 1)^T$.

**Esercizio 3** (Punti 8). Si dimostrino i seguenti enunciati:

1. Siano $V, W$ due spazi vettoriali su $\mathbb{C}$ con unapplicazione lineare $f : V \to W$ e siano $v_1, \ldots, v_n \in V$.
(a) L'insieme $\{v_1, \ldots, v_n\}$ è linearmente indipendente se lo è l'insieme $\{f(v_1), \ldots, f(v_n)\}$.
**Dimostrazione:**
Siano $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ tali che $\alpha_1 v_1 + \ldots \alpha_n v_n = 0$. Allora anche
$0 = f(\alpha_1 v_1 + \ldots \alpha_n v_n) = \alpha_1 f(v_1) + \ldots \alpha_n f(v_n)$, quindi per ipotesi $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$.
(b) 1. $\dim < v_1, \ldots, v_n >= \dim < \overline{v_1}, \ldots, \overline{v_n} >$.
**Dimostrazione:**
Sia $\dim < v_1, \ldots, v_n >= m$. Dopo aver rinumerato i vettori, possiamo supporre che $\{v_1, \ldots, v_m\}$ sia una base di $< v_1, \ldots, v_n >$. Mostriamo che $\{\overline{v_1}, \ldots, \overline{v_m}\}$ è una base di $< \overline{v_1}, \ldots, \overline{v_n} >$.
Insieme di generatori: Se $v \in< \overline{v_1}, \ldots, \overline{v_n} >$ (con coefficienti $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$), allora usando che $\overline{\overline{v_i}} = v_i$ vediamo che $\overline{v} \in< v_1, \ldots, v_n >$ (con coefficienti $\overline{\alpha_1}, \ldots, \overline{\alpha_n}$), quindi $\overline{v}$ è combinazione lineare di $v_1, \ldots, v_m$ e $v \in< \overline{v_1}, \ldots, \overline{v_m} >$.
Linearmente indipendente: Siano $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{C}$ tali che $\alpha_1 \overline{v_1} + \ldots \alpha_m \overline{v_n} = 0$. Allora usando che $\overline{\overline{v_i}} = v_i$ vediamo che $\overline{\alpha_1} v_1 + \ldots \overline{\alpha_m} v_m = \overline{0} = 0$, quindi $\overline{\alpha_1} = \ldots = \overline{\alpha_m} = 0$ e $\alpha_1 = \ldots = \alpha_m = 0$.

2. Siano $u, v \in \mathbb{C}$. L'applicazione $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto u\overline{z} + vz$ è sempre $\mathbb{R}$-lineare, ma è $\mathbb{C}$-lineare se e solo se $u = 0$.
**Dimostrazione:**
(i) $f(z_1 + z_2) = u(\overline{z_1 + z_2}) + v(z_1 + z_2) = u\overline{z_1} + vz_1 + u\overline{z_2} + vz_2 = f(z_1) + f(z_2)$
(ii) per $\lambda \in \mathbb{R}$: $f(\lambda z) = u\overline{\lambda z} + v\lambda z = u\overline{\lambda}\overline{z} + v\lambda z = u\lambda\overline{z} + v\lambda z = \lambda f(z)$.
Quindi $f$ è $\mathbb{R}$-lineare.
Se $u = 0$ si ha (ii) anche per $\lambda \in \mathbb{C}$: $f(\lambda z) = v\lambda z = \lambda vz = \lambda f(z)$, quindi $f$ è $\mathbb{C}$-lineare.
Viceversa, supponiamo che $f$ sia $\mathbb{C}$-lineare. Allora $f(i) = if(1)$, dove $f(i) = u\overline{i} + vi = u(-i) + vi = i(-u + v)$ e $if(1) = i(u + v)$, quindi $u = -u$ e $u = 0$.

**Esercizio 4** (Punti 6). ☻
Siano $V, W$ due spazi vettoriali su un campo $K$ con due applicazioni lineari $f : W \to V$ e $g : V \to W$.

1. Se $g \circ f$ è un isomorfismo, allora $V = \mathrm{Im}f \oplus \ker g$.
**Dimostrazione:**
(i) $V = \mathrm{Im}f + \ker g$: L'inclusione $\supset$ è chiara perché Im$f$ e $\ker g$ sono sottospazi di $V$. Verifichiamo $\subset$: se $v \in V$, allora $g(v) \in W$, quindi per la suriettività di $g \circ f$ esiste $w \in W$ tale che $g(v) = g(f(w))$, dunque $v - f(w) \in \ker g$ e $v = (v - f(w)) + f(w) \in \ker g + \mathrm{Im}f$.
(ii) $\mathrm{Im}f \cap \ker g = 0$: se $v \in \mathrm{Im}f \cap \ker g$, allora esiste $w \in W$ tale che $v = f(w)$ e inoltre $0 = g(v) = g(f(w))$, quindi per ipotesi segue $w \in \ker(g \circ f) = 0$, e $v = 0$.

2. **Esempio:** siano $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $x \mapsto \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$ e $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto x$.
Allora $g \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$, ma $f \circ g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$ non è né suriettivo né iniettivo.