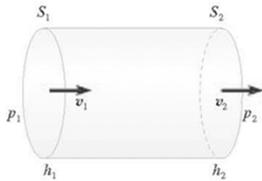


## Meccanica dei fluidi

### Legge di Hagen Poiseuille



**Figura 4.13**  
Condotto orizzontale di sezione costante, per cui  $h_1 = h_2$  e  $v_1 = v_2$ ; la conseguenza è  $p_1 = p_2$ .

$$v_1 S_1 = v_2 S_2 \rightarrow v_1 = v_2$$

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 \rightarrow p_1 = p_2$$

Un fluido ideale può attraversare un condotto orizzontale (con portata costante) senza che ci sia tra gli estremi del condotto una differenza di pressione.

Sperimentalmente si vede che questo non è vero. Occorre applicare una differenza di pressione ai capi del condotto per mantenere il fluido in movimento con portata costante:

$$\Delta P = RQ$$

$$\Delta P = \frac{8\eta l}{\pi r^4} Q$$

$$Q = \frac{\pi r^4}{8\eta l} \Delta P$$



## Fluidi nei sistemi biologici

- Stima della velocità del sangue nei vari distretti del sistema circolatori
- Stenosi ed aneurisma
- Viscosità del sangue
- Resistenza dei vasi e variazione di pressione
- Effetto della pressione idrostatica.
- Il lavoro del cuore
- Manometro e misura della pressione del sangue.



## Fluidi nei sistemi biologici

Applicazioni della meccanica dei Fluidi alla circolazione sanguigna.

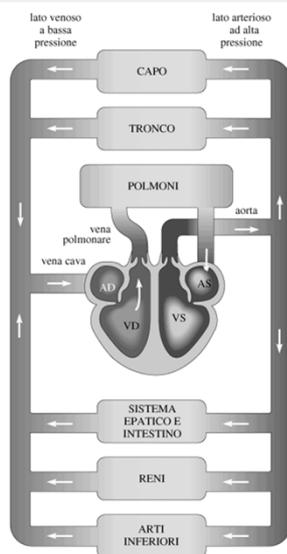
Moto stazionario di un fluido ideale in un condotto rigido

Moto stazionario di un fluido reale in un condotto rigido

In realtà i condotti non sono rigidi e il moto non è stazionario (ma pulsatile).



## Fluidi nei sistemi biologici



**Figura 6.2**

Schema del sistema circolatorio. I condotti sia nel grande circolo, sia nel circuito polmonare si diramano a partire dall'aorta (o dalla vena polmonare) in arterie di calibro sempre minore, poi in arteriole, queste in capillari, attraverso le cui pareti avvengono gli scambi di sostanze alle e dalle cellule (Capitolo 11). I capillari si riuniscono poi in venule, queste in vene che riportano il sangue al cuore (vena cava e vena polmonare).

LEGENDA: AD = atrio destro, VD = ventricolo destro, AS = atrio sinistro, VS = ventricolo sinistro.

Sistema idrodinamico chiuso, portata costante.

Portata del sangue  
 $5\text{l/min} = 83\text{ cm}^3/\text{s}$

Fluidi nei sistemi biologici

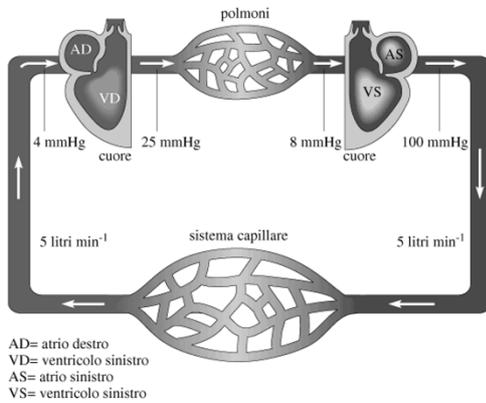


Figura 6.3

Circuito idrodinamico equivalente a quello del sistema circolatorio. Sono riportati i valori normali, mediati nel tempo, delle portate e delle pressioni in ingresso e in uscita dal cuore. La pressione indicata è relativa a quella esterna al circuito.

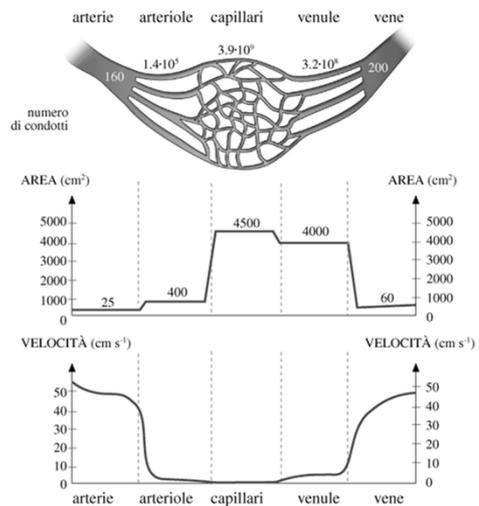
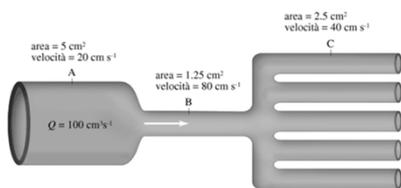
AD= atrio destro  
VD= ventricolo sinistro  
AS= atrio sinistro  
VS= ventricolo sinistro



Facciamo le seguenti ipotesi: moto stazionario, fluido ideale, pareti rigide.  
Sistema con portata costante.



Fluidi nei sistemi biologici



Velocità del sangue nei vari distretti:

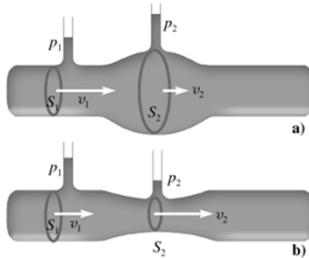
AORTA (r=0.8 cm)	$S = \pi r^2 \approx 2 \text{ cm}^2$	$v = Q/S \approx 40 \text{ cm/s}$
ARTERIOLE	$S \approx 400 \text{ cm}^2$	$v = Q/S \approx 0.2 \text{ cm/s}$
CAPILLARI	$S \approx 4000 \text{ cm}^2$	$v = Q/S \approx 0.02 \text{ cm/s}$
VENA CAVA (r=1.1 cm)	$S = \pi r^2 \approx 4 \text{ cm}^2$	$v = Q/S \approx 20 \text{ cm/s}$

La bassissima velocità del sangue nei capillari (0.2 mm/s) permette gli scambi di sostanze (reazioni chimiche) necessari alla vita.



## Fluidi nei sistemi biologici

## Stenosi ed aneurisma



Nel caso dell'aneurisma:

$$v_2 = v_1 \frac{S_1}{S_2} < v_1$$

Perché  $S_2 > S_1$ 

Dal teorema di Bernoulli

$$\frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\rho g} = \frac{v_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\rho g}$$

$$\text{Se } v_2 < v_1 \Rightarrow p_2 > p_1$$

La pressione laterale (la pressione che il sangue esercita sulla parete del vaso) è maggiore sulla parete del rigonfiamento. L'aneurisma peggiora.

Analogo ragionamento vale per la stenosi; in tal caso la pressione è minore.

Nell'arteriosclerosi avanzata troviamo il fenomeno del flutter vascolare: la sezione dell'arteria è ridotta, alta velocità e bassa pressione che può portare ad una completa occlusione dell'arteria. Interruzione momentaneo del flusso ( $v$  nulla), la pressione sale nuovamente e l'arteria si riapre. Il sangue riprende a scorrere nella zona occlusa la pressione interna cala e l'arteria si chiude nuovamente.



## Fluidi nei sistemi biologici

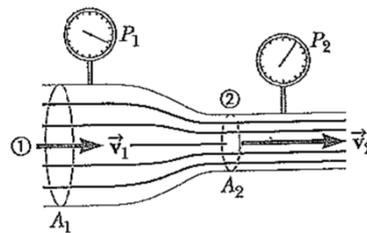
Misura di flusso: il tubo di Venturi consente di misurare la velocità di un fluido misurando la pressione nel condotto

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2$$

$$v_1 = \frac{A_2}{A_1} v_2$$

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho \left( \frac{A_2}{A_1} v_2 \right)^2 = p_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2$$

$$v_2 = A_1 \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho(A_1^2 - A_2^2)}}$$



Note le caratteristiche geometriche del dispositivo ( $A_1$  e  $A_2$ ) e la densità del fluido riusciamo a misurare  $v_2$ . Un tale tubicino potrebbe essere incannulato in una arteria per misurare il flusso.



## Fluidi nei sistemi biologici

**VISCOSITA'** del SANGUE: Sangue: una sospensione di cellule in una soluzione acquosa di sali e molecole organiche (plasma).

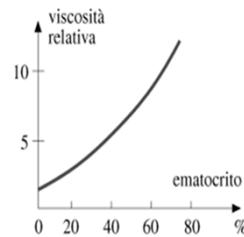
Frazione cellulare costituita per la maggior parte da globuli rossi (eritrociti)

Il plasma ha una viscosità circa 1.5 volte quella dell'acqua e si comporta come un liquido viscoso normale (segue la legge di Poiseuille).

Anche il sangue intero in condotti non troppo piccoli (>100 micron) segue la legge di Poiseuille. In tali condizioni si può misurare  $\Delta p$  e  $Q$  e ricavare il coefficiente di viscosità dalla legge di Poiseuille.

La viscosità dipende fortemente dal valore dell'ematocrito. Per un valore normale=40% la viscosità del sangue è circa 5 volte quella dell'acqua.

In condizioni patologiche la viscosità può cambiare come ad esempio nell'anemia. In tali condizioni la portata tende ad aumentare (la differenza di pressione  $\Delta p$ , pressione aortica media) rimane costante.



Ematocrito= volume percentuale di sangue occupato dagli eritrociti

EdiSES

## Fluidi nei sistemi biologici

### Resistenza dei vasi e variazione di pressione nel sistema circolatorio

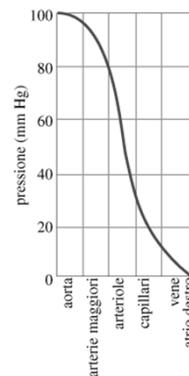
Dato sperimentale: la pressione diminuisce lungo il percorso del sangue. Passa da circa 100 mmHg (pressione impressa dal ventricolo sinistro espressa come media tra pressione sistolica e diastolica) a pochi mmHg quando arriva all'atrio destro.

Nel moto laminare, vale la legge di Hagen-Poiseuille:

$$R = \frac{\Delta P}{Q} = \frac{8\eta l}{\pi r^4}$$

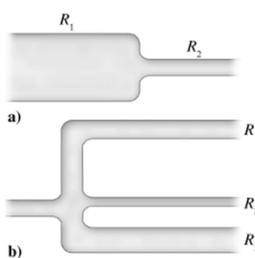
Legge analoga alla legge di Ohm; differenza di pressione analoga alla ddp;  $Q$  analoga alla intensità corrente;  $R$  (resistenza idrodinamica) analoga alla resistenza elettrica.

Anche nella legge di Ohm, nella resistenza compaiono le caratteristiche geometriche del conduttore, lunghezza e raggio) e le caratteristiche del mezzo (resistività):  $R=\rho L/S$



EdiSES

Fluidi nei sistemi biologici



a)

b)

Condotti in serie (attraversati dallo stesso flusso di liquido)

$$R = R_1 + R_2$$

Condotti in parallelo (stessa differenza di pressione agli estremi)

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

**Figura 6.16**

(a) Due condotti in serie:  
 $R = R_1 + R_2$ .

(b) Tre condotti in parallelo:  
 $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$ .

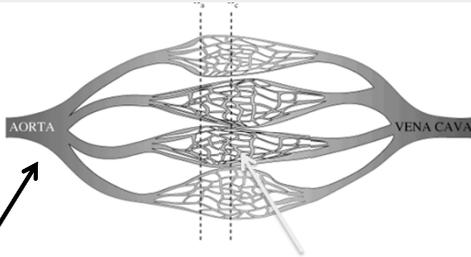


Scannicchio  
**Fisica Biomedica**  
EdiSES



Fluidi nei sistemi biologici

Rappresentazione schematica dell'arborizzazione dei vasi nella circolazione sistemica, con l'indicazione della sezione complessiva  $S_a$  del distretto arteriale e di quella  $S_c$  del distretto capillare.





Scannicchio  
**Fisica Biomedica**  
EdiSES

Raggio grande, piccola resistenza

Raggio piccolo, grande resistenza.

Consideriamo il sistema delle arteriole; Supponiamo di avere  $N_a$  arteriole ciascuna con una resistenza media  $R_a$ .

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_a} + \frac{1}{R_a} + \dots = \frac{N_a}{R_a} \quad R = \frac{R_a}{N_a}$$

Stesso discorso si può fare per il sistema dei capillari:  $R = \frac{R_c}{N_c}$

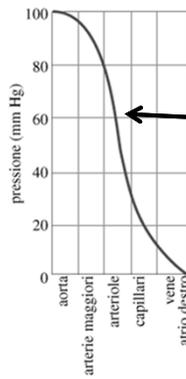
In generale  $R_c > R_a$ , ma  $N_c \gg N_a$ , per cui risulta:

$$\frac{R_c}{N_c} < \frac{R_a}{N_a}$$



## Fluidi nei sistemi biologici

La resistenza globale del sistema arteriolare è > di quella del sistema capillare.



Massima caduta di pressione la troviamo a livello del sistema arteriolare



## Fluidi nei sistemi biologici

Considerazioni sulla resistenza complessiva del sistema circolatorio

In condizioni normali:  $\Delta p = 100 \text{ mmHg}$  e  $Q = 80 \text{ cm}^3/\text{s}$ .

$$R = \frac{\Delta P}{Q} = \frac{100}{760} \cdot 1 \cdot 10^6 \cdot \frac{1}{80} = 1,6 \cdot 10^3 \text{ (unità c.g.s.)}$$

In condizioni di sforzo  $\Delta p = 140 \text{ mmHg}$  e  $Q = 150 \text{ cm}^3/\text{s}$ ;

$$R = \frac{\Delta P}{Q} = \frac{140}{760} \cdot 1 \cdot 10^6 \cdot \frac{1}{150} = 1,2 \cdot 10^3 \text{ (unità c.g.s.)}$$

La resistenza complessiva del sistema circolatorio diminuisce sotto sforzo.

Evidentemente in qualche distretto del sistema circolatorio, i vasi aumentano di diametro (si sa che sono le arteriole).

Importante perché permette di aumentare la portata del sangue senza eccessivo aumento della potenza cardiaca.



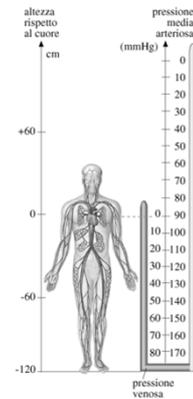
## Fluidi nei sistemi biologici

## Effetto della pressione idrostatica

Soggetto in posizione eretta: la pressione del sangue nei vari distretti è alterata dalla pressione idrostatica.

**Aumento di pressione a livello dei piedi:** *Es.*  
**distanza cuore-piedi  $\sim 1$  m;  $d_{\text{sangue}} \sim d_{\text{acqua}}$**   
 $P = dgh = (10^3 \text{ kg/m}^3) \cdot (9.8 \text{ m/s}^2) \cdot (1 \text{ m})$   
 $= 9800 \text{ Pa} = 9800 \cdot (760/101200) \text{ mmHg}$   
 $= 74 \text{ mmHg (non trascurabile!)}$

Le pareti dei vasi arteriosi sono in grado di sopportare pressioni di 100-200 mmHg.  
 Le pareti dei vasi venosi sono sottili e tendono a dilatarsi sotto l'azione di questa pressione idrostatica.



**Figura 6.20**

Valori della pressione media arteriosa e venosa in un soggetto in posizione eretta.

Scannicchio  
 Fisica Biomedica  
 EdiSES

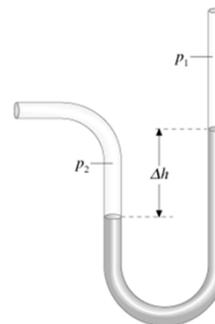
## Fluidi nei sistemi biologici

## Misura della pressione arteriosa

Manometro

$$p_2 = p_1 + dg\Delta h$$

L'altezza misura la pressione  $p_2$ .



**Figura 6.25**

Manometro a liquido: sul ramo di sinistra grava una sovrappressione  $\Delta p = d g \Delta h$ .

Scannicchio  
 Fisica Biomedica  
 EdiSES

EdiSES

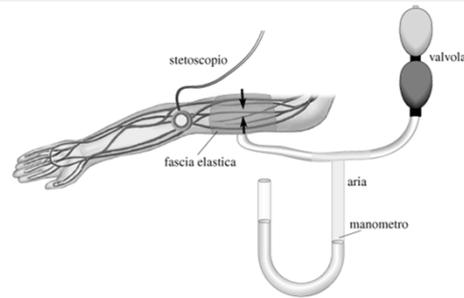
## Fluidi nei sistemi biologici

## Misura della pressione arteriosa

Pressione del sangue è detta pressione intramurale e misura la differenza di pressione tra l'interno del vaso e l'esterno.

Gonfiando la camera d'aria sottostante (arteria brachiale) viene compressa bloccando il flusso di sangue; non si sente il battito.

Si lascia uscire lentamente l'aria, continuando a misurare la pressione fino alla ripresa del battito (pressione sistolica o massima). Il battito si sente perché alta velocità e quindi moto turbolento. Continuando a sgonfiare il manicotto, diminuisce la pressione sull'arteria (che si espande), la velocità del sangue diminuisce e si ha moto laminare (silenzioso), per cui si perde nuovamente il battito (pressione diastolica o minima).



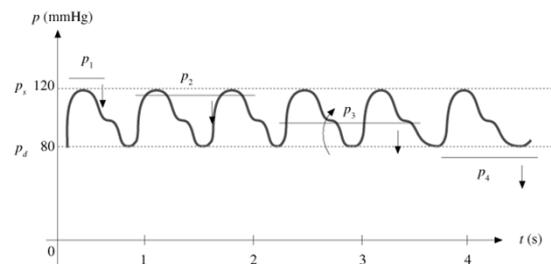
Sfigmomanometro



## Scannicchio – Fisica biomedica

Figura 6.28

La curva a tratto pieno indica la variazione della pressione in una grossa arteria. Abbassando la pressione nella fascia elastica dello sfigmomanometro, a partire da pressioni  $p_1$ , maggiori della pressione sistolica  $p_s$ , si misura prima  $p_1$  e poi  $p_2$ , auscultando con lo stetoscopio la transizione da silenzio a rumore pulsato ( $p_2$  e  $p_3$ ) e da questo di nuovo a silenzio ( $p_4$ ) in regime laminare. Il rumore pulsato è determinato dalla successiva apertura e chiusura dell'arteria.



Scannicchio  
Fisica Biomedica  
EdiSES



## Meccanica dei fluidi

Resistenza idrodinamica e regime di moto (laminare o turbolento) nei vari distretti del sistema circolatorio.

Avevamo visto che per velocità di flusso  $>$  della velocità critica il moto diventa turbolento:

$$v_c = Re \frac{\eta}{d r}$$

Il numero di Reynolds  $Re$  vale circa 1000-1200 per condotti rettilinei e uniformi.

Consideriamo l'aorta con raggio circa 0.8 cm, densità=1g/cm<sup>3</sup>, viscosità=4\*10<sup>-3</sup>Pa.s=4\*10<sup>-2</sup> poise);

Otteniamo  $v_c=50$  cm/s

Per lo stesso vaso dall'equazione di continuità la velocità media vale 41.5 cm/s.

(se utilizziamo  $r=1$  cm otteniamo  $v_c=40$  cm/s e  $v_m=27.5$  cm/s).

Quindi abbiamo un moto laminare (in media).

Se consideriamo che la velocità istantanea è maggiore nel momento in cui si apre la valvola aortica, in questo momento supera la velocità critica e quindi c'è un breve periodo di moto turbolento, mentre nel resto del periodo il moto è laminare.

Per i vasi di minor calibro,  $v_c$  aumenta, mentre la  $v_m$  diminuisce (come visto in precedenza sulla base dell'equazione di continuità). Quindi il flusso è laminare per il resto del sistema circolatorio



## Fluidi nei sistemi biologici

Consideriamo adesso un vaso con stenosi:

Per l'equazione di continuità  $v_m \propto \frac{1}{r_c^2}$

Mentre la velocità critica  $v_c \propto \frac{1}{r_c}$

Il loro rapporto  $\frac{v_m}{v_c} \propto \frac{1}{r_c}$

$v_m/v_c$  può superare il valore 1 (cioè la  $v_m$  può superare  $v_c$ ); in corrispondenza della stenosi il flusso può diventare turbolento.

Nel moto turbolento la resistenza aumenta con la portata

$$R = \frac{\Delta P}{Q} = k Q$$

➔  $Q \propto \sqrt{\Delta P}$

Transizione da regime laminare a turbolento



Figura 6.18

Curva che rappresenta la dipendenza della portata  $Q$  dalla differenza di pressione  $\Delta P$  in un condotto rigido. La transizione tra il flusso laminare e il flusso turbolento è segnata da una variazione di pendenza della curva che riflette una corrispondente variazione di resistenza del condotto. Il coefficiente angolare della retta che rappresenta il regime laminare è dato da  $1/R$ .

Per raddoppiare la portata occorre quadruplicare la pressione (mentre nel moto laminare basta raddoppiarla)



## Fluidi nei sistemi biologici

Figura 6.19

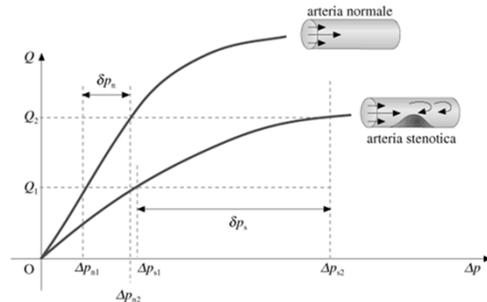
La pressione che fornisce una data portata, per esempio  $Q_2$ , è maggiore nel caso di un'arteria stenotica, rispetto ad un'arteria normale. Inoltre, se il cuore viene sollecitato ad aumentare la portata di sangue nel circolo da  $Q_1$  a  $Q_2$ , la turbolenza prodotta nell'arteria ostruita richiede un aumento decisamente maggiore di pressione e quindi uno sforzo maggiore da parte del cuore:

$$\delta p_s > \delta p_n$$

essendo:

$$\delta p_n = \Delta p_{s2} - \Delta p_{s1}$$

$$\delta p_s = \Delta p_{s2} - \Delta p_{s1}$$



Se il cuore viene sollecitato ad aumentare la portata da  $Q_1$  a  $Q_2$ , la  $\Delta p$  richiesta in regime laminare è minore di quella richiesta in regime turbolento.



## Fluidi nei sistemi biologici

## Lavoro e potenza cardiaca

Gittata pulsatoria = volume di sangue che il ventricolo sinistro immette nell'aorta ( $60 \text{ cm}^3$ ).

Frequenza cardiaca  $\nu$  = numero di contrazioni per unità di tempo ( $\text{s}^{-1}$ )

Periodo  $T = 1/\nu$

Se il sangue non fosse viscoso (ideale) basterebbe una piccola differenza di pressione iniziale per farlo circolare.

Nella contrazione il volume del ventricolo sinistro varia da  $V_2$  a  $V_1$ ; La quantità  $(V_2 - V_1)$  rappresenta la gittata pulsatoria.

Principalmente il lavoro del cuore è dovuto alla contrazione del ventricolo sinistro (fase sistolica). Nelle altre fasi cardiache il lavoro è minore.



## Fluidi nei sistemi biologici

Modello per calcolare il lavoro del cuore. Il cuore può essere modellato come una pompa a forza; lo stantuffo spinge il liquido nel cilindro e compie un lavoro dato da:

$$L = F \ell = p S \ell = p V$$

$$L = p_v (V_2 - V_1) \quad p_v = \text{pressione media ventricolare}$$

$$p_v \approx 100 \text{ mm Hg}$$

$$V_2 - V_1 = 60 \text{ cm}^3$$

$$L = p_v (V_2 - V_1) = \frac{100}{760} \cdot 10^6 \cdot 60 = 8.6 \cdot 10^6 \frac{\text{erg}}{\text{ciclo}} = 0.8 \frac{\text{J}}{\text{ciclo}}$$

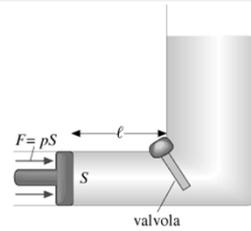


Figura 6.23

Schema di pompa che permette di descrivere il lavoro cardiaco.



Scannicchio  
Fisica Biomedica  
EdiSES



## Fluidi nei sistemi biologici

La potenza può essere espressa in diversi modi:

$$W = \frac{L}{\Delta t} = p_v \frac{(V_2 - V_1)}{T} = p_v (V_2 - V_1) \nu = p_v Q$$

$$W = \frac{0.8 \text{ J}}{1 \text{ s}} = 0.8 \text{ Watt}$$

(Il valore 0.8 Watt si ottiene assumendo un battito al secondo; tale valore diventa 0.96 Watt se assumiamo 72 battiti al min).

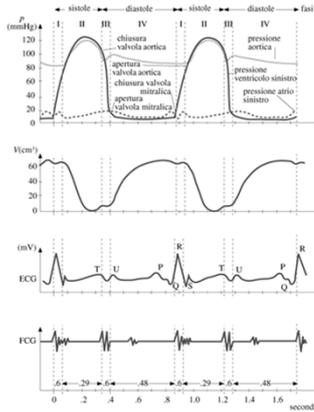


## Fluidi nei sistemi biologici

Il lavoro del cuore si può esprimere anche in termini della pressione arteriosa.

**Figura 6.22**

Correlazione tra la pressione intra-ventricolare (curva superiore) e il volume ventricolare (curva inferiore). In basso sono indicati i tracciati elettrocardiografici e fonocardiografici. Sull'asse delle ordinate sono rappresentati i tempi. L'asse delle ordinate rappresenta la pressione per la curva superiore, il volume per quella inferiore e il potenziale elettrico in mV e l'ampiezza di vibrazione in unità arbitrarie per i due tracciati in basso. Le curve punteggiate nel grafico della pressione rappresentano gli andamenti della pressione aortica e della pressione atriale. Le varie fasi della contrazione cardiaca sono delimitate da rette verticali tratteggiate. Il volume ventricolare riportato nel grafico si riferisce solo al volume di sangue che entra ed esce dal ventricolo. Infatti il volume effettivo della cavità ventricolare non diventa mai nullo, bensì varia tra 80 cm<sup>3</sup> e 140 cm<sup>3</sup>.



Scienze della  
Fisica Biomedica  
EdiSES

EdiSES

## Fluidi nei sistemi biologici

La pressione nell'aorta, durante la fase di eiezione, si mantiene a livelli leggermente inferiori rispetto alla pressione nel ventricolo (intraventricolare); perché nel ventricolo il sangue è praticamente fermo, mentre nell'aorta si muove con una certa velocità  $v$ . Il teorema di Bernoulli si scrive:

$$p_v = p_a + \frac{1}{2} \rho v^2$$

Dove  $p_v$  e  $p_a$  sono rispettivamente le pressioni nel ventricolo e nell'aorta e  $v$  la velocità del sangue nell'aorta.

$$L = p_v (V_2 - V_1) = p_a (V_2 - V_1) + \frac{1}{2} \rho (V_2 - V_1) v^2$$

Il secondo termine nell'espressione si chiama fattore cinetico e rappresenta il lavoro fatto dal cuore per imprimere al sangue la velocità  $v$ .

EdiSES