Foglio di esercizi su applicazioni lineari e matrici, cambiamenti di base

Sansonetto Nicola*

Esercizio 1 (Punti 8).

1. In uno spazio vettoriale metrico V con norma $||\cdot||$ si verifichi che per $x, y \in V$ si ha

$$\| x+y \|^2 + \| x-y \|^2 = 2\| x \|^2 + 2\| y \|^2 \quad (uguaglianza\ del\ parallelogramma).$$

2. Si verifichi che la seguente applicazione $< \cdot,\cdot >$: $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ è un prodotto scalare definito positivo:

$$< x, y >= 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$$

Esercizio 2 (Punti 8). Si consideri la seguente matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

1. Si determinino il polinomio caratteristico e gli autovalori di A.
2. Per ogni autovalore λ di A si determini una base dell'autospazio E_λ.
3. Si diagonalizzi A, cioè si trovino una matrice $P \in Gl(3,\mathbb{R})$ e una matrice diagonale $D \in M_{3\times 3}(\mathbb{R}^)$ tali che $P^{-1}AP = D$.
4. Si calcoli $\det A$.

Esercizio 3 (Punti 8).

1. Dire per quali valori di $\beta \in \mathbb{R}$ la matrice

$$B_\beta = \begin{bmatrix} 0 & \beta & 0 & 0 \\ \beta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

è diagonalizzabile.

2. Esiste una base di $\mathbb{R}^4$ formata da autovettori di B_β per qualche β? (Giustificare la risposta).
3. Per $\beta = 0$ determinare un insieme ortonormale di autovettori di B_1 e completarlo ad una base ortonormale di $\mathbb{R}^4$.

Esercizio 4 (Punti 6). ☻ Sia V un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale euclideo di dimensione 3. Si consideri l'applicazione lineare $P : V \longrightarrow V$, la cui matrice associata rispetto alla basse canonica è

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

1. Determinare una base ortonormale di $U = \ker\ P$.

*e-mail: nicola.sansonetto@gmail.com

2. Determinare una base ortonormale di $W = \mathrm{Im}\, P$.
3. È vero che $V = U \oplus W$? Giustificare la risposta.
4. Verificare che $P(\underline{v}) = \underline{v}$ per ogni $\underline{v} \in W$ e che $\underline{v} - P(\underline{v}) \in W^{\perp}$.
5. P è diagonalizzabile? Giustificare la risposta. (*2 punti per la risposta senza effettuare la procedura di diagonalizzazione.)*

N.B.
Il simbolo ☻ denota esercizi giudicati **difficile**.