3 Funzioni di una variabile reale

Il nucleo centrale del corso, che affrontiamo in questo capitolo, consiste nello studio delle funzioni reali di una variabile reale, ovvero delle regole $f : A \to \mathbb{R}$ che ad ogni elemento x del dominio $A \subset \mathbb{R}$ assegnano uno ed un ben precisato valore reale $f(x)$.

3.1 Generalità

Prima di approfondire la conoscenza "locale" delle funzioni, che richiede la precisazione del concetto di "vicinanza" (come vedremo tra breve parlando di "topologia"), possiamo dare fin da ora alcune nozioni "globali", che dipendono solo dalle proprietà già introdotte di $\mathbb{R}$.

Operazioni e ordine con le funzioni Le operazioni di somma e prodotto di $\mathbb{R}$ (che, come sappiamo, è un corpo commutativo) inducono in modo naturale delle operazioni nell'insieme $\mathbb{R}^A$ delle funzioni reali di una variabile reale con dominio un certo $A \subset \mathbb{R}$: se $f, g : A \to \mathbb{R}$ sono due funzioni, la loro *somma* $f+g : A \to \mathbb{R}$ ed il loro *prodotto* $fg : A \to \mathbb{R}$ saranno le funzioni date da $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$ e $(fg)(x) = f(x)g(x)$ per ogni $x \in A$; se g non si annulla mai si potrà anche considerare la funzione *quoziente* $\frac{f}{g} : A \to \mathbb{R}$ data da $(\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ per ogni $x \in A$. Tali operazioni fanno di $\mathbb{R}^A$ un anello (vedi pag. 27). In particolare, la funzione *opposta* di f è $-f : A \to \mathbb{R}$ data da $(-f)(x) = -f(x)$ e, se g non si annulla mai, la funzione *reciproca* di g è $\frac{1}{g} : A \to \mathbb{R}$ data da $(\frac{1}{g})(x) = \frac{1}{g(x)}$. Dal fatto che dominio e codominio sono entrambi sottoinsiemi di $\mathbb{R}$, ha anche senso "comporre" due funzioni: se $f : A \to \mathbb{R}$, $g : B \to \mathbb{R}$ e $f(A) \subset B$ si definisce la funzione *composta* $g \circ f : A \to \mathbb{R}$ come $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ per ogni $x \in A$; la scrittura "$g \circ f$" si legge "g composto f" o "g di f" o "g dopo f", e si osservi attentamente che la prima delle due funzioni ad operare è f, seguita poi da g. La composizione è associativa, cioè se $h : C \to \mathbb{R}$ con $g(B) \subset C$ allora $(h\circ g)\circ f = h\circ(g\circ f)$, e si scriverà perciò "$h\circ g\circ f$"; essa ha chiaramente elemento neutro nella funzione identità $\mathrm{id}_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da $\mathrm{id}_{\mathbb{R}}(x) = x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, ed è distributiva rispetto a somma e prodotto (ovvero $h \circ (f + g) = (h \circ f) + (h \circ g)$ e $h \circ (fg) = (h \circ f)(h \circ g)$). Se $A, B \subset \mathbb{R}$ e $f : A \to B$ è una funzione biiettiva, allora come si sa è univocamente definita la funzione *inversa* $f^{-1} : B \to A$ tale che $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_A$ e $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_B$. Dalla relazione d'ordine totale "$\leq$" di $\mathbb{R}$ si introduce inoltre una relazione d'ordine (parziale) in $\mathbb{R}^A$ ponendo $f \leq g$ se e solo se $f(x) \leq g(x)$ per ogni $x \in A$.

Esempi. **(1)** Se $f(x) = x^2$, $g(x) = |x|$ e $h(x) = \sin x$, allora $(h \circ (f + 3g))(x) = \sin(x^2 + 3|x|)$. **(2)** La funzione $\sqrt{\log(|x| - 4)}$ può essere vista come la composizione $h \circ g \circ f$, ove $f(x) = |x| - 4$, $g(x) = \log x$ e $h(x) = \sqrt{x}$. **(3)** La funzione $6 \,\mathrm{arctg}^3(\sin x - 1)$ può essere vista come la composizione $k \circ h \circ g \circ f$, ove $f(x) = \sin x - 1$, $g(x) = \mathrm{arctg}\, x$, $h(x) = x^3$ e $k(x) = 6x$. **(4)** La funzione $f : [2, 5[\to [-1, 8[$ è iniettiva (infatti,

$f(x_1) = f(x_2)$ equivale a $x_1^2 - x^2 = 4(x_1 - x_2)$, e se $x_1 \neq x_2$ ciò equivale a $x_1 + x_2 = 4$, ma ciò è impossibile se $x_1, x_2 \in [2,5[$ perché ciò forzerebbe $x_1 = x_2 = 2$) e suriettiva (se $y \in [-1,8[$, cercando le soluzioni $x \in [2,5[$ di $f(x) = y$ si trovano i numeri *reali* $x = 2 \pm \sqrt{1+y}$, ed essendo $2 - \sqrt{1+y} \leq 2 \leq 2 + \sqrt{1+y} < 5$ si trova una ed una sola soluzione $2 + \sqrt{1+y} \in [2,5[$), e dunque biiettiva. Il conto appena fatto ci permette inoltre di scrivere esplicitamente l'inversa $f^{-1} : [-1,8[\to [2,5[$: essa sarà $f^{-1}(x) = 2 + \sqrt{1+x}$.

$\boxed{\textbf{Dominio naturale}}$ Molte funzioni sono date semplicemente esibendo l'espressione algebrica che permette, dato un certo x, di calcolare subito il valore $f(x)$, senza specificare chi sia il dominio $A \subset \mathbb{R}$ di f. In questo caso, si assume tacitamente che quest'ultimo sia il *dominio naturale* di f, ovvero il più grande sottoinsieme A_f di $\mathbb{R}$ per il quale tale espressione ha senso: bisognerà dunque essere in grado di determinare tale dominio naturale.

Esempi. (0) Se $f(x) = \sin(x^2 - 3|x|)$ oppure $f(x) = e^{5x - \cos x}$, nessuna condizione è richiesta per dare senso alle espressioni: dunque $A_f = \mathbb{R}$. **(1)** Sia $f(x) = \sqrt{(x+2)(3-x)}$. Per la realtà della radice bisognerà che sia $(x+2)(3-x) \geq 0$, e dunque $A_f = [-2,3]$. **(2)** Sia $f(x) = \sqrt{\log(|x|-4)} - \mathrm{tg}(x-2)$. Per la realtà del logaritmo va richiesto che $|x| - 4 > 0$, per la radice che $\log(|x|-4) \geq 0$, e per la tangente che $x - 2 \neq \frac{\pi}{2} + \mathbb{Z}\pi$. Si ottiene dunque il sistema $\begin{cases} |x| - 4 > 0 \\ \log(|x|-4) \geq 0 \\ x - 2 \neq \frac{\pi}{2} + \mathbb{Z}\pi \end{cases}$, ovvero $\begin{cases} |x| > 4 \\ |x| - 4 \geq 1 \\ x \neq 2 + \frac{\pi}{2} + \mathbb{Z}\pi \end{cases}$, e perciò $A_f = (\mathbb{R}_{\leq -5} \cup \mathbb{R}_{\geq 5}) \setminus \{2 + \frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$. **(3)** Sia $f(x) = \log|x^2 - 1| - \arcsin(\frac{|x| + |x-2|}{3})$. Si noti che l'argomento del logaritmo è $|x^2 - 1| \geq 0$: dunque, per l'esistenza del logaritmo basta richiedere che tale argomento sia non nullo, ovvero che $x \neq \pm 1$. Per l'esistenza dell'arco-seno, invece, va richiesto che il suo argomento $\frac{|x|+|x-2|}{3}$ stia in $[-1,1]$ e perciò, poiché $\frac{|x|+|x-2|}{3}$ é ovviamente ≥ 0, la condizione diventa $\frac{|x|+|x-2|}{3} \leq 1$, ovvero $|x| + |x-2| \leq 3$: dunque se $x \leq 0$ si ha $-x - (x-2) \leq 3$, che dà $x \geq -\frac{1}{2}$ (da cui le soluzioni $[-\frac{1}{2}, 0]$); se $0 \leq x \leq 2$ si ha $x - (x-2) \leq 3$, che dà $2 \leq 3$, sempre vero (da cui le soluzioni $[0,2]$); infine, se $x \geq 2$ si ha $x + (x-2) \leq 3$ che dà $x \leq \frac{5}{2}$ (da cui le soluzioni $[2, \frac{5}{2}]$). Riassumendo, $\log|x^2 - 1|$ ha senso per $x \neq \pm 1$, mentre $\arcsin(\frac{|x|+|x-2|}{3})$ ha senso per $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{5}{2}]$: pertanto si ha $A_f = [-\frac{1}{2}, \frac{5}{2}] \setminus \{1\}$.

$\boxed{\textbf{Grafico}}$ Abbiamo visto che, in generale, se X, Y sono due insiemi e $f : X \to Y$ una funzione, il grafico di f è il sottoinsieme $\Gamma_f = \{(x,y) \in X \times Y : y = f(x)\}$ del prodotto cartesiano $X \times Y$. Pertanto, il grafico di una funzione $f : A \to \mathbb{R}$ con $A \subset \mathbb{R}$ sarà un sottoinsieme di $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, visualizzabile dunque come sottoinsieme del piano cartesiano (solitamente si identifica il dominio A con un sottoinsieme dell'asse delle ascisse, mentre l'asse delle ordinate funge da codominio). Per definizione di funzione, per ogni $x \in A$ esisterà allora *uno ed un solo* $y = f(x)$ tale che $(x,y) \in \Gamma_f$.
Appare allora chiaro che, data una funzione $f : A \to \mathbb{R}$:

- il grafico della funzione *opposta* $-f : A \to \mathbb{R}$, data da $(-f)(x) = -f(x)$, si ottiene riflettendo quello di f rispetto all'asse x;
- il grafico della funzione *speculare* $\varphi : -A = \{x \in \mathbb{R} : -x \in A\} \to \mathbb{R}$ data da $\varphi(x) = f(-x)$ si ottiene riflettendo quello di f rispetto all'asse y;
- se $f : A \to B$ è biiettiva, il grafico della funzione *inversa* $f^{-1} : B \to A$ si ottiene riflettendo quello di f rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante $y = x$: infatti, $(a,b) \in \Gamma_f$ se e solo se $b = f(a)$, cioè se e solo se $a = f^{-1}(b)$, cioè se e solo se $(b,a) \in \Gamma_{f^{-1}}$.

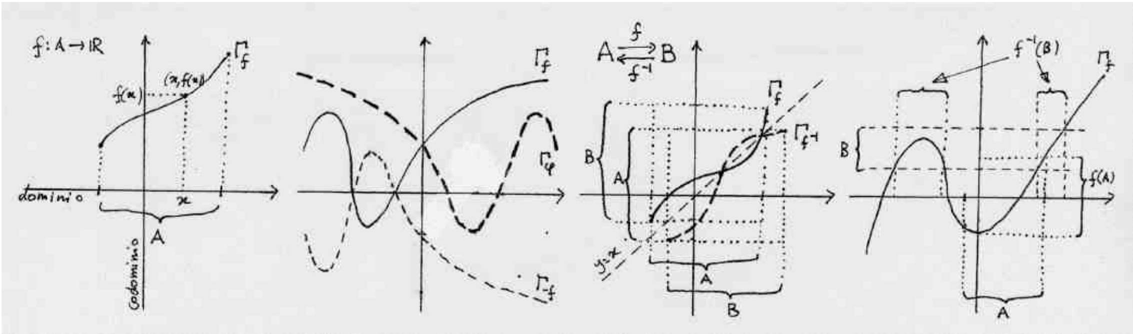

Figura 3.1: *Grafico di una funzione; grafici della funzione opposta e speculare; grafico della funzione inversa; immagine e antiimmagine sul grafico.*

$\boxed{\textbf{Immagine e antiimmagine}}$ Se $A \subset \mathbb{R}$ e $f : A \to \mathbb{R}$ è una funzione, l'*immagine* di $A' \subset A$ è $f(A') = \{f(x) : x \in A'\} \subset \mathbb{R}$, l'insieme delle immagini degli elementi di A' (è dunque un sottoinsieme del codominio, visualizzabile sull'asse delle ordinate nella rappresentazione cartesiana). Invece l'*antiimmagine* di $B \subset \mathbb{R}$ è $f^{-1}(B) = \{x \in A : f(x) \in B\} \subset \mathbb{R}$, l'insieme dei punti del dominio A la cui immagine sta in B (si tratta dunque un sottoinsieme del dominio, visualizzabile sull'asse delle ascisse nella rappresentazione cartesiana). In generale è più "meccanico" calcolare un'antiimmagine che un'immagine: infatti, per l'antiimmagine $f^{-1}(B)$ va studiata la condizione $f(x) \in B$ (che si riduce di solito alla risoluzione diretta di sistemi di equazioni e/o disequazioni nell'incognita x), mentre per l'immagine $f(A')$ bisogna essere in grado di calcolare, per ogni y nel codominio, quali sono le sue antiimmagini (ovvero, chi è la "fibra" $f^{-1}(y)$) e poi controllare per quali y accade che almeno una di esse stia in A'. In generale, e specialmente per il calcolo dell'immagine, è utile avere un'idea abbastanza precisa dell'andamento della funzione (sapere se cresce o decresce, se "fa salti" o no...): in particolare, se si dispone del grafico della funzione ci si può rendere subito conto visivamente di che cosa siano immagini o antiimmagini.

Esempio. Si consideri $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dato da $f(x) = x^2 - 2x - 3$ (il grafico è pertanto una parabola con asse parallelo all'asse delle ordinate, concavità rivolta verso l'alto, intersezioni con l'asse delle ascisse in -1 e 3 e vertice in $(1, -4)$). L'immagine di un intervallo $[a, b]$ del dominio non è facile da trovare senza dare un'occhiata al grafico, ed è una grave ingenuità dire che essa è sempre l'intervallo compreso tra $f(a)$ e $f(b)$: ad esempio, se $[a, b] = [-1, 4]$ si ha $f(-1) = 0$ e $f(5) = 12$ ma $f([-1, 5]) = [-4, 12]$, come verifichiamo ora. Dato $y \in \mathbb{R}$, per trovare la fibra $f^{-1}(y)$ bisogna risolvere $f(x) = x^2 - 2x - 3 = y$, e ciò è possibile solo per $y \geq -4$ con soluzioni $x_1 = 1 - \sqrt{y+4}$ e $x_2 = 1 + \sqrt{y+4}$; la condizione $x_1 \in [-1, 5]$ diventa $-1 \leq 1 - \sqrt{y+4} \leq 5$, cioè $-2 \leq -\sqrt{y+4} \leq 4$, cioè $-2 \leq -\sqrt{y+4}$, cioè $\sqrt{y+4} \geq 5$, cioè $y \leq 0$, mentre la condizione $x_2 \in [-1, 5]$ diventa $-1 \leq 1 + \sqrt{y+4} \leq 5$, cioè $-2 \leq \sqrt{y+4} \leq 4$, cioè $\sqrt{y+4} \leq 4$, cioè $y \leq 12$. Ne deduciamo che quando $y \leq 12$ almeno uno tra x_1 e x_2 sta in $[-1, 5]$: questo, combinato con la succitata $y \geq 4$, dà quanto detto. Per calcolare l'antiimmagine diciamo dell'intervallo $]c, d]$ del codominio basta invece risolvere la disequazione $c < f(x) \leq d$ nell'incognita x: così, se si vuole l'antiimmagine di $[-3, 5]$ si deve risolvere $-3 \leq f(x) \leq 5$, ovvero il sistema $\begin{cases} x^2 - 2x - 3 \geq -3 \\ x^2 - 2x - 3 \leq 5 \end{cases}$, cioè $\begin{cases} x^2 - 2x \geq 0 \\ x^2 - 2x - 8 \leq 0 \end{cases}$, che dà le soluzioni $[-2,0] \cup [2,4]$.

Parità Se il dominio A di una funzione è simmetrico rispetto a 0 (ovvero se $-A = A$, cioè $x \in A$ se e solo se $-x \in A$), ha senso parlare di funzione "pari" o "dispari". La funzione $f : A \to \mathbb{R}$ si dirà *pari* se per ogni $x \in A$ vale $f(-x) = f(x)$, e *dispari* se per ogni $x \in A$ vale $f(-x) = -f(x)$: in termini di grafico, ciò si nota dal fatto che quest'ultimo è simmetrico rispettivamente rispetto l'asse delle ordinate o rispetto l'origine. L'interesse del determinare la parità di una funzione f è evidente: se individuata, ciò permette di limitare lo studio di f a $A \cap \mathbb{R}_{\geq 0}$.

Esempi. (0) Se $0 \in A$ e $f : A \to \mathbb{R}$, si noti che allora $f(0) = 0$ (infatti $f(0) = f(-0) = -f(0)$). La sola funzione sia pari che dispari è la funzione nulla (infatti per ogni $x \in A$ dovrebbe essere $f(x) = f(-x) = -f(x)$). **(1)** La funzione potenza intera $f(x) = x^n$ (con $n \in \mathbb{Z}$) è pari per n pari e dispari per n dispari. **(2)** $\cos x$, $\cosh x$, $|x|$, $x^2 - x^4$, e^{x^2}, $\log|\sin x|$ sono esempi di funzioni pari; $\sin x$, $\operatorname{tg} x$ $\sinh x$, $\arcsin x$, $\operatorname{arctg}(x - x^3)$ sono esempi di funzioni dispari. **(3)** e^x, $x^2 - x$, $\log|x^2 + x + 1|$ non sono né pari né dispari.

Periodicità Una funzione periodica è una funzione che "si ripete inalterata ad intervalli regolari". Più precisamente, $f : A \to \mathbb{R}$ si dirà *periodica* se esiste $\tau > 0$ tale che (i) $A = n\tau + A$ per ogni $n \in \mathbb{Z}$ (ovvero, "A non cambia se lo si trasla a destra o sinistra di multipli interi di τ"), e (ii) per ogni $x \in A$ vale $f(x + \tau) = f(x)$. In tal caso, il più piccolo numero positivo τ_f con queste proprietà si dirà *periodo* di f, e tutti gli altri τ saranno suoi multipli interi. Anche qui, l'interesse del determinare la periodicità di una funzione f è evidente perché, se individuata, essa permette di limitare lo studio di f al tratto di A contenuto in un segmento $[n\tau_f, (n+1)\tau_f]$ per un qualsiasi $n \in \mathbb{Z}$.

Esempi. (1) Come visto, $\sin x$ e $\cos x$ sono funzioni periodiche di periodo 2π, mentre $\operatorname{tg} x$ e $\operatorname{cotg} x$ sono periodiche di periodo π. **(2)** Se $a, b \in \mathbb{R}$, la funzione $f(x) = \sin(ax + b)$ è periodica di periodo $\frac{2\pi}{|a|}$: infatti $f(x + \frac{2\pi}{|a|}) = \sin(a(x + \frac{2\pi}{|a|}) + b) = \sin(ax + b \pm 2\pi) = \sin(ax + b) = f(x)$. **(3)** La funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da $f(x) = \operatorname{frac}(x) - \frac{1}{2}$ (ove $\operatorname{frac}(x)$ rappresenta la "parte frazionaria" di x, vedi pag. 33) è dispari e periodica di periodo 1. **(4)** Le funzioni $e^{\sin x}$, $\sin^4(2x)$ e $\log(\cos 2x) + \sqrt{1 - \operatorname{tg} x}$ sono tutte periodiche (di periodi rispettivamente 2π, $\frac{\pi}{2}$ e π): in effetti, in esse la variabile x è "trattata per prima" da funzioni periodiche. Ciò non accade in $\sin e^x$ e $\operatorname{tg}\sqrt{1 + x^2}$, che infatti non sono periodiche.

Crescenza e decrescenza, massimi e minimi Una funzione $f : A \to \mathbb{R}$ si dirà *crescente* (risp. *decrescente*) se per ogni $x_1, x_2 \in A$ tali che $x_1 \leq x_2$ si ha $f(x_1) \leq f(x_2)$ (risp. $f(x_1) \geq f(x_2)$); *strettamente crescente* (risp. *strettamente decrescente*) se tali disuguaglianze sono strette, ovvero se per ogni $x_1, x_2 \in A$ tali che $x_1 < x_2$ si ha $f(x_1) < f(x_2)$ (risp. $f(x_1) > f(x_2)$); il termine *monotòna* significa "crescente oppure decrescente". Se $f(A) \subset \mathbb{R}$ ha il massimo (risp. il minimo), si dirà che f *ammette/assume massimo* (risp. minimo) *assoluto* (o *globale*) *in* A; tali valori, se esistono, vengono detti entrambi *estremi* (assoluti) di f in A. Invece, i punti del dominio in cui tale massimo (risp. minimo) assoluto viene assunto si diranno *punti di massimo* (risp. di minimo) *assoluto* per f in A, ed un punto di massimo (risp. minimo) assoluto si dirà *stretto* se è l'unico punto in cui tale massimo (risp. minimo) assoluto viene assunto. I punti di massimo e minimo assoluto si

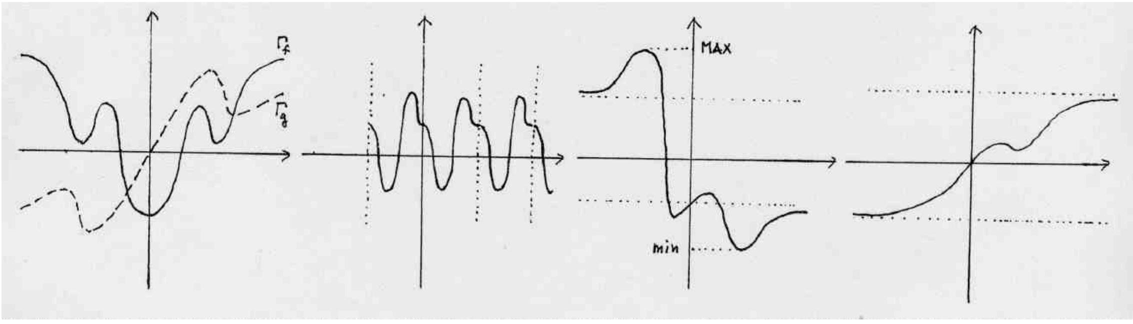

Figura 3.2: *Grafico di una funzione pari f e dispari g; grafico di una funzione periodica; grafico di una funzione limitata con massimo e minimo; grafico di una funzione limitata priva sia di massimo che di minimo.*

dicono anche *estremanti* (assoluti) di f in A.

Esempi. (0) Se una funzione è costante, tutti i punti del suo dominio sono punti di massimo o minimo assoluto (ovviamente, non stretto). **(1)** Sia $A = \mathbb{R}$ e $f : A \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$: tale funzione non ammette massimo assoluto ma ammette minimo assoluto 0, e $x = 0$ è l'unico punto di minimo assoluto (stretto). **(2)** La funzione $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è strettamente crescente per $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \le x \le \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ e strettamente decrescente per $\frac{\pi}{2} + 2k\pi \le x \le \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$ (con $k \in \mathbb{Z}$); essa ammette massimo e minimo assoluti (1 e -1), assunti rispettivamente in $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ e $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ (con $k \in \mathbb{Z}$).

Limitatezza Una funzione $f : A \to \mathbb{R}$ si dirà *superiormente limitata* su A (risp. *inferiormente limitata* su A) se la sua immagine $f(A)$ è un sottoinsieme superiormente (risp. inferiormente) limitato di $\mathbb{R}$; è chiaro che questa nozione si può riformulare dicendo che esiste $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che $f(x) \le \alpha$ (risp. $f(x) \ge \alpha$) per ogni $x \in A$. La funzione f si dirà *limitata* se è sia superiormente che inferiormente limitata, e ciò equivale a dire che esiste $M \ge 0$ tale che $|f(x)| \le M$ per ogni $X \in A$. Si ponga attenzione al dominio sul quale si considera la funzione: una funzione $f : A \to \mathbb{R}$ illimitata può certamente essere limitata se ristretta ad un sottoinsieme di A.

Esempi. (0) Una funzione è costante $f(x) \equiv k$ è ovviamente limitata. **(1)** L'esponenziale $f(x) = e^x$ (con $x \in \mathbb{R}$) è inferiormente limitata, (perché $e^x > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$) ma non superiormente limitata. Il logaritmo $g(x) = \log x$ (con $x > 0$ è illimitato sia inferiormente che superiormente. **(2)** Le funzioni $f : A \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin \varphi(x)$ (ove $\varphi : A \to \mathbb{R}$ è una qualsiasi funzione) e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{1}{1+x^2}$, sono limitate (entrambe sono, in modulo, ≤ 1). **(3)** La funzione $f(x) = x^2$ è inferiormente limitata (da 0) ma superiormente illimitata sul suo dominio naturale $A = \mathbb{R}$; tuttavia, essa diventa limitata se il suo dominio viene ristretto ad un qualsiasi intervallo limitato di $\mathbb{R}$. (Naturalmente, questa proprietà non è caratteristica solo di x^2, come vedremo.)

Funzioni composte con riflessioni, traslazioni, omotetie Se è data una funzione $f : A \to \mathbb{R}$, per ogni $x \in A$ siamo in grado di calcolare il valore $f(x)$. L'effetto del comporre f con la funzione *riflessione* $m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $m(t) = -t$, ovvero la biiezione che "cambia il segno", l'abbiamo già discusso parlando di funzioni pari e dispari: *la funzione* $-f(x) : A \to \mathbb{R}$ *ha come grafico quello di* f *riflesso rispetto all'asse* x, mentre *la funzione* $f(-x) : -A \to \mathbb{R}$ *ha come grafico quello di* f *riflesso rispetto all'asse* y.

Sia ora $c \in \mathbb{R}$, e consideriamo la funzione *traslazione* $\tau_c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\tau_c(t) = t + c$, ovvero la biiezione che "sposta di c". Si ha allora $(\tau_c \circ f)(x) = f(x) + c$: dunque *il grafico della funzione* $f(x) + c : A \to \mathbb{R}$ *è ottenuto da quello di* f *muovendolo verticalmente verso l'alto di* c (se $c \geq 0$) *o verso il basso di* $-c$ (se $c < 0$). D'altra parte si ha $(f \circ \tau_c)(x) = f(x+c)$: se il dominio di f è A, per poter calcolare $f(x + c)$ il dominio di $f(x + c)$ dovrà essere $A - c = \{x \in \mathbb{R} : x + c \in A\}$, ovvero ciò che si ottiene muovendo A orizzontalmente verso sinistra di c (se $c \geq 0$) o verso destra di $-c$ (se $c < 0$). Sul dominio $A - c$, il comportamento di $f(x + c)$ sarà poi identico a quello di f su A: dunque *il grafico della funzione* $f(x+c) : A-c \to \mathbb{R}$ *è ottenuto da quello di* f *muovendolo orizzontalmente verso sinistra di* c (se $c \geq 0$) *o verso destra di* $-c$ (se $c < 0$).

Sia infine $k > 0$, e consideriamo la funzione *omotetìa* $\ell_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\ell_k(t) = kt$, ovvero la biiezione che "dilata di k" (se $k > 1$) o "contrae di k" (se $0 < k < 1$). Si ha allora $(\ell_k \circ f)(x) = k\, f(x)$: dunque *il grafico della funzione* $k\, f(x) : A \to \mathbb{R}$ *è ottenuto da quello di* f *mantenendone inalterata la dimensione orizzontale e dilatandone* (se $k > 1$) *o contraendone* (se $0 < k < 1$) *la verticale del fattore* k. D'altra parte si ha $(f \circ \ell_k)(x) = f(kx)$: anche qui, se il dominio di f è A, per poter calcolare $f(kx)$ il dominio di $f(kx)$ dovrà essere $A/k = \{x/k : x \in A\}$, ovvero ciò che si ottiene dividendo tutti i punti di A per k. L'effetto sul grafico sarà inalterato in verticale, e di restringimento (se $k > 1$) o dilatazione (se $0 < k < 1$) in orizzontale.

3.2 Limiti, continuità e confronto locale

Finora ci siamo occupati principalmente delle proprietà *algebriche* di $\mathbb{R}$, ovvero delle sue proprietà di corpo commutativo. In questo capitolo iniziamo invece a studiare $\mathbb{R}$ dal punto di vista *topologico*: l'idea è quella di rendere precise delle nozioni come "approssimare arbitrariamente", o "tendere", che abbiamo più volte usato in modo intuitivo e non rigoroso. Insomma: dobbiamo definire con precisione il concetto di "vicinanza", "prossimità" ad un punto di $\mathbb{R}$; anzi, visto che ciò è assai utile per rendere più chiara la fondamentale nozione di *limite*, lo faremo fin da subito per l'estensione $\widetilde{\mathbb{R}}$ di $\mathbb{R}$, ottenuta da $\mathbb{R}$ aggiungendo i due "punti all'infinito" $\pm\infty$.

3.2.1 Retta reale estesa, intorni e punti di accumulazione

Come preannunciato, definiamo la *retta reale estesa* $\widetilde{\mathbb{R}}$ come l'insieme ottenuto aggiungendo ad $\mathbb{R}$ due nuovi punti $-\infty$ e $+\infty$, chiamati rispettivamente "meno infinito" e "più infinito": nella nostra immaginazione, converrà pensare a questi due punti rispettivamente come "incollati alla lontanissima sinistra e destra della retta reale": l'ordine totale $\leq$ di $\mathbb{R}$ potrà essere esteso anche a $\widetilde{\mathbb{R}}$, ponendo $-\infty < a < +\infty$ per ogni $a \in \mathbb{R}$.

Il prossimo passo consiste nel definire la nozione di *intorno* di un punto di $\widetilde{\mathbb{R}}$: iniziamo dai punti di $\mathbb{R}$. Se $x_0 \in \mathbb{R}$ e $r > 0$, porremo

$$B_{x_0}(r) =]x_0 - r, x_0 + r[, \quad B^-_{x_0}(r) =]x_0 - r, x_0], \quad B^+_{x_0}(r) = [x_0, x_0 + r[:$$

si tratta di intervalli centrati (oppure solo da un lato) in x_0 di raggio r, con gli estremi compresi o no: la notazione "B" è scelta per pensare ad essi come a delle "palline unidimensionali" centrate in x_0. Se $U \subset \widetilde{\mathbb{R}}$, diremo che U è un *intorno di* x_0 se U contiene qualche intervallo centrato in x_0, ovvero se esiste $r > 0$ tale che $B_{x_0}(r) \subset U$; più modestamente, diremo che U è solo un *intorno sinistro* (risp. *destro*) *di* x_0 se esiste $r > 0$ tale che $B^-_{x_0}(r) \subset U$ (risp. $B^+_{x_0}(r) \subset U$) Si noti che ciò implica che $x_0 \in U$ in tutti e tre i casi.[26] In particolare, tutti gli intervalli centrati $B_{x_0}(r)$ sono anch'essi intorni di x_0 (infatti contengono se stessi): la famiglia di intervalli centrati $\{B_{x_0}(r) : r > 0\}$ si dirà la *base fondamentale di intorni di* x_0, perché essa ha la proprietà che ogni intorno di x_0 contiene qualche suo elemento.

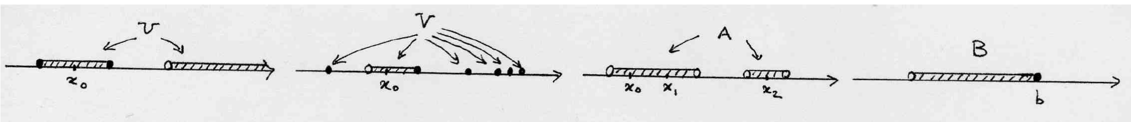

Figura 3.3: *U e V sono entrambi intorni di x_0; A è intorno di ogni suo punto; B non è intorno del suo punto b, ma solo intorno sinistro di b.*

Trattiamo ora i punti $\pm\infty$. $U \subset \widetilde{\mathbb{R}}$ si dirà *intorno di* $+\infty$ se esiste $a \in \mathbb{R}$ tale che $(\mathbb{R}_{>a} \cup \{+\infty\}) \subset U$, ed *intorno di* $-\infty$ se esiste $a \in \mathbb{R}$ tale che $(\mathbb{R}_{<a} \cup \{-\infty\}) \subset U$.[27] In particolare, le "semirette completate" $\mathbb{R}_{>a} \cup \{+\infty\}$ e $\mathbb{R}_{<a} \cup \{-\infty\}$ sono anch'esse intorni rispettivamente di $+\infty$ e $-\infty$, e la famiglia $\{\mathbb{R}_{>a} \cup \{+\infty\} : a \in \mathbb{R}\}$ (risp. $\{\mathbb{R}_{<a} \cup \{-\infty\} : a \in \mathbb{R}\}$) si dirà *base fondamentale di intorni di* $+\infty$ (risp. di $-\infty$).

Siano ora $x_0 \in \widetilde{\mathbb{R}}$ (dunque potrebbe essere $x_0 \in \mathbb{R}$ oppure $x_0 = \pm\infty$) e $A \subset \widetilde{\mathbb{R}}$. Diremo che x_0 è un *punto di accumulazione* per A se $A \cap (U \setminus \{x_0\}) \neq \varnothing$ per ogni intorno $U \subset \widetilde{\mathbb{R}}$ di x_0: ovvero se, preso un *qualsiasi* intorno U di x_0, accade sempre che A contiene qualche punto di U *diverso dallo stesso* x_0. In particolare, si noti che non è detto che x_0 debba stare in A.
Dalla definizione è chiaro che ci si può limitare a scegliere gli intorni U solo tra quelli di

[26]Dunque U è un intorno di x_0 se e solo se esso è sia intorno sinistro che destro (talvolta si parla di intorno anche come "intorno bilatero" per sottolineare il concetto "destro e sinistro". In altre parole un intorno di x_0 è un qualsiasi sottoinsieme che lo "circonda"; se lo circonda solo da un lato, si parlerà di intorno destro o sinistro.

[27]In altre parole, U è intorno di $+\infty$ se U contiene $+\infty$ e qualche semiretta superiormente limitata $\mathbb{R}_{>a}$: ovvero, "U circonda $+\infty$".

una base fondamentale di intorni di x_0, perché se la condizione è soddisfatta per ognuno di essi, lo sarà anche per tutti gli altri intorni di x_0. Dunque, se $x_0 \in \mathbb{R}$, la condizione diventa

$$\text{per ogni } r > 0 \text{ esiste } x \in A \text{ tale che } x \neq x_0 \text{ e } |x - x_0| < r,$$

mentre per $\pm\infty$ diventa

$$\text{per ogni } a \in \mathbb{R} \text{ esiste } x \in A \text{ tale che } x > a \text{ (risp. } x < a).$$

Esempi. **(1)** I punti di accumulazione di $A = [0, 1[$ sono tutti quelli di $[0, 1]$. **(2)** I punti di accumulazione di $A =]0, 1[\cup \{2\} \cup \mathbb{R}_{\geq 3}$ sono tutti quelli di $[0, 1] \cup \mathbb{R}_{\geq 3} \cup \{+\infty\}$. **(3)** $A = \{-3, 0, 1\}$ non ha punti di accumulazione, mentre quelli di $A = \mathbb{Z}$ sono $\pm\infty$. **(4)** L'unico punto di accumulazione di $A = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ è 0. **(5)** Tutti i punti di $\widetilde{\mathbb{R}}$ sono di accumulazione per $A = \mathbb{Q}$ oppure $A = \widetilde{\mathbb{Q}} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

3.2.2 Limiti

Sia $A \subset \mathbb{R}$, e sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione. Penseremo dominio e codominio di f dentro la retta reale estesa $\widetilde{\mathbb{R}}$; siano dunque $c \in \widetilde{\mathbb{R}}$ un punto di accumulazione di A in $\widetilde{\mathbb{R}}$, e sia $\ell \in \widetilde{\mathbb{R}}$. Diremo che *$\ell$ è il limite di f per x che tende a c in A*, o che *f tende a ℓ per x che tende a c in A*, scrivendo

$$\lim_{x \to c,\ x \in A} f(x) = \ell \qquad \text{se} \qquad \boxed{\begin{array}{l}\text{per ogni intorno } V \text{ di } \ell \text{ in } \widetilde{\mathbb{R}} \\ \quad \text{esiste un intorno } U \text{ di } c \text{ in } \widetilde{\mathbb{R}} \\ \qquad \text{tale che } f(x) \in V \text{ per ogni } x \in (U \cap A) \setminus \{c\}.\end{array}}$$

Equivalentemente (facile esercizio), nella definizione basta scegliere U e V nella base fondamentale di intorni rispettivamente di c e ℓ. Se $\ell \in \mathbb{R}$ (risp. $\ell = \pm\infty$), si usa anche dire che f *converge a* ℓ (risp. *diverge a* $\pm\infty$); la scrittura "$\lim_{x \to c,\ x \in A} f(x) = \infty$" significherà "$\lim_{x \to c,\ x \in A} f(x)$ è uguale a $+\infty$ *oppure* a $-\infty$". Se $\lim_{x \to c,\ x \in A} f(x) = 0$ si usa dire che f è "*infinitesima* (o "un infinitesimo") per x che tende a c" o "in c", mentre se $\lim_{x \to c,\ x \in A} f(x) = \infty$ si usa dire che f è *infinita* (o "un infinito") per x che tende a c" o "in c".
Esplicitiamo qui di seguito alcuni casi particolari della definizione di limite (intenderemo $x_0 \in \mathbb{R}$ e $\alpha \in \mathbb{R}$).

(i) (Limite finito in punto finito) $\lim_{x \to x_0,\ x \in A} f(x) = \alpha$ significa "per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che se $x \in A$ e $|x - x_0| < \delta$ allora $|f(x) - \alpha| < \varepsilon$;

(ii) (Limite infinito in punto finito) $\lim_{x \to x_0,\ x \in A} f(x) = \pm\infty$ significa "per ogni $a \in \mathbb{R}$ esiste $\delta > 0$ tale che se $x \in A$ e $|x - x_0| < \delta$ allora $f(x) \gtrless a$";

(iii) (Limite finito in punto infinito) $\lim_{x \to \pm\infty,\ x \in A} f(x) = \alpha$ significa "per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $a \in \mathbb{R}$ tale che se $x \in A$ e $x \gtrless a$ allora $|f(x) - \alpha| < \varepsilon$";

(iv) (Limite infinito in punto infinito) $\lim\limits_{x\longrightarrow\pm\infty,\ x\in A} f(x) = +\infty$ (risp. $\lim\limits_{x\longrightarrow\pm\infty,\ x\in A} f(x) = -\infty$) significa "per ogni $a \in \mathbb{R}$ esiste $b \in \mathbb{R}$ tale che se $x \in A$ e $x \gtrless a$ allora $f(x) > b$ (risp. $f(x) < b$)".

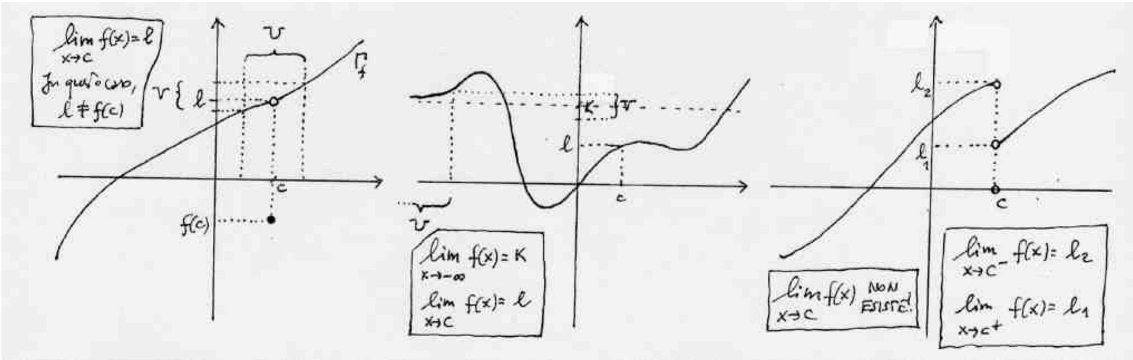

Figura 3.4: *Esempi visivi di limiti; limite sinistro e limite destro.*

In altre parole, dire che $\lim\limits_{x\longrightarrow c,\ x\in A} f(x) = \ell$ significa dire che "avvicinandosi sempre di più a c con x *senza però andarci sopra* e restando in A, ci si può avvicinare a piacere a ℓ con $f(x)$": a tal proposito, è utile osservare subito che *la nozione di limite è locale*, ovvero si verifica "all'intorno di c": più precisamente, se U_0 è un qualsiasi intorno (anche assai piccolo) di c, si avrà (se esistono) $\lim\limits_{x\longrightarrow c,\ x\in A} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow c,\ x\in(A\cap U_0)} f(x)$. Ora, nella gran parte dei casi (tra cui le funzioni elementari), se $c \in A$ sarà $\ell = f(c)$, ovvero, per x che tende a c la funzione $f(x)$ tenderà "docilmente" a $f(c)$: si parlerà allora, come vedremo in particolare nel prossimo paragrafo, di funzioni *continue*, che "non fanno salti". Tuttavia, è importante osservare che dalla definizione si ricava che *anche se $c \in A$, a priori non c'è alcun legame tra il limite di f in c ed il valore $f(c)$*.[28]

È opportuno osservare che f non può avere limiti diversi in uno stesso punto:

Proposizione 3.2.1. *Se $\lim\limits_{x\longrightarrow c,\ x\in A} f(x)$ esiste, esso è unico.*

Dimostrazione. Siano ℓ_1 ed ℓ_2 due elementi di $\widetilde{\mathbb{R}}$ che soddisfano entrambi la condizione per essere $\lim\limits_{x\longrightarrow c,\ x\in A} f(x)$. Se essi fossero diversi, esisterebbero intorni V_1 di ℓ_1 e V_2 di ℓ_2 disgiunti (ovvero tali che $V_1 \cap V_2 = \varnothing$).[29] Siano U_1 e U_2 intorni di c tali che $f((U_1 \cap A) \setminus$

[28]Un semplice esempio può essere illuminante. Sia $A = \mathbb{R}$, e definiamo $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \neq 0 \\ -5 & \text{se } x = 0 \end{cases}$: è ovvio che $\lim\limits_{x\longrightarrow 0,\ x\in\mathbb{R}} f(x) = 0$ (infatti, preso $\varepsilon > 0$, ogni $\delta > 0$ fa il servizio richiesto in quanto se $x \neq 0$ allora $|f(x) - 0| = 0 < \varepsilon$), e ciò non dipende per niente dal valore di f in 0, che anziché -5 avrebbe potuto essere qualunque altro numero reale senza per questo cambiare il valore del limite.

[29]Ciò si verifica assai facilmente usando le basi fondamentali di intorni di ℓ_1 e ℓ_2 (esercizio). Uno spazio topologico con questa proprietà (due qualsiasi elementi distinti hanno intorni "che li separano") si dice *di Hausdorff*: dunque $\widetilde{\mathbb{R}}$ è uno spazio topologico di Hausdorff.

$\{c\}) \subset V_1$ e $f((U_2 \cap A) \setminus \{c\}) \subset V_2$: ora, come sappiamo, $U_1 \cap U_2$ è un intorno di x_0, dunque non vuoto, ma dovrebbe essere $f(U_1 \cap U_2) \subset f(U_1) \cap f(U_1) \subset V_1 \cap V_2 = \varnothing$: ciò è assurdo perché, per definizione di "funzione", l'immagine di un sottoinsieme non vuoto del dominio di una funzione è un sottoinsieme non vuoto del codominio. Dunque $\ell_1 = \ell_2$, e ciò mostra l'unicità del limite. □

Una cosa utile è il *cambio di variabili* nel calcolo dei limiti:

Proposizione 3.2.2. (Cambio di variabili nei limiti) *Siano* $A, A' \subset \mathbb{R}$, c (risp. c') *di accumulazione per* A (risp. per A'), $\phi : A' \to A$ *una funzione iniettiva tale che* $\lim_{t \to c',\, t \in A'} \phi(t) = c$*: allora, se esiste* $\lim_{t \to c',\, t \in A'} f(\phi(t))$ *esiste anche* $\lim_{x \to c,\, x \in A} f(x)$ *ed è ad esso uguale. Se inoltre* ϕ *è biiettiva e vale anche* $\lim_{x \to c,\, x \in A} \phi^{-1}(x) = c'$*, allora un limite esiste se e solo se esiste l'altro, ed in tal caso i due sono uguali.*

Dimostrazione. Supponiamo esista $\lim_{x \to c,\, x \in A} f(x) = \ell$, e sia V un intorno di ℓ in $\widetilde{\mathbb{R}}$: sappiamo dunque che esiste un intorno U di c in $\widetilde{\mathbb{R}}$ tale che $f((U \cap A) \setminus \{c\}) \subset V$. Poiché $\lim_{t \to c',\, t \in A'} \phi(t) = c$, esiste un intorno W di c' in $\widetilde{\mathbb{R}}$ tale che $\phi((W \cap A') \setminus \{c'\}) \subset U$; anzi, poiché ϕ è iniettiva, a meno di restringere W si può supporre che $\phi((W \cap A') \setminus \{c'\}) \subset U \setminus \{c\}$. Dunque $(f \circ \phi)((W \cap A') \setminus \{c'\}) \subset f(U \setminus \{c\}) \subset V$, e ciò mostra che anche $\lim_{t \to c',\, t \in A'} f(\phi(t)) = \ell$. Viceversa, applicando lo stesso ragionamento con $f \circ \phi$ in luogo di f e $(f \circ \phi) \circ \phi^{-1}$ in luogo di $f \circ \phi$, si dimostra che se esiste $\lim_{t \to c',\, t \in A'} f(\phi(t))$ allora esiste anche $\lim_{x \to c,\, x \in A} ((f \circ \phi) \circ \phi^{-1})(x)$ ed è uguale ad esso; ma $(f \circ \phi) \circ \phi^{-1} = f$. □

Esempi. Calcoliamo alcuni limiti servendoci della definizione. **(0)** Se $f|_{A \setminus \{c\}}$ è costante (diciamo $f(x) \equiv k \in \mathbb{R}$ per ogni $x \neq c$) vale ovviamente $\lim_{x \to c,\, x \in A} f(x) = k$. Infatti, preso un intorno V di k, sia $U = \mathbb{R}$: allora $f(U \cap A) \setminus \{c\}) = \{k\} \subset V$. **(1)** Esaminiamo la *continuità* delle funzioni elementari nei punti del loro "dominio naturale" (vedi sotto), iniziando dal logaritmo e dall'esponenziale di base $a > 1$. Siano $c \in \mathbb{R}_{>0}$ e $0 < \varepsilon \ll 1$, e studiamo la disequazione $|\log_a x - \log_a c| < \varepsilon$. Essa diventa $|\log_a(\frac{x}{c})| < \varepsilon$, ovvero $ca^{-\varepsilon} < x < ca^{\varepsilon}$: questo è un intorno di c, ed allora basterà scegliere $\delta < \min\{1 - a^{-\varepsilon}, a^{\varepsilon} - 1\} = 1 - a^{-\varepsilon}$ affinché $\log_a(B_c(\delta)) \subset B_{\log_a c}(\varepsilon)$: ciò mostra che $\lim_{x \to c,\, x \in \mathbb{R}_{>0}} \log_a x = \log_a c$. Per l'esponenziale, sia $c \in \mathbb{R}$: applicando il cambio di variabile (Proposizione 3.2.2) $\phi : A' \to A$ con $\phi = \log_a$, $A' = \mathbb{R}_{>0}$, $A = \mathbb{R}$ e $c' = a^c$, come visto si ha $\lim_{t \to c' = a^c,\, t \in \mathbb{R}_{>0}} \log_a t = \log_a(a^c) = c$, ed essendo $\lim_{t \to a^c,\, t \in \mathbb{R}_{>0}} a^{\log_a t} = \lim_{t \to a^c,\, t \in \mathbb{R}_{>0}} t = a^c$, anche $\lim_{x \to c,\, x \in \mathbb{R}} a^x$ esisterà e sarà uguale a a^c. (Se la base a è in $]0, 1[$ valgono le stesse conclusioni, con le stesse dimostrazioni a meno del fatto che in tal caso $\log_a(x)$ e a^x sono decrescenti.) Per la potenza x^α (con $\alpha \in \mathbb{R}$) sia $c \in \mathbb{R}_{>0}$, ed applichiamo il cambio di variabile $\phi : A' \to A$ con $A' = \mathbb{R}$, $A = \mathbb{R}_{>0}$, $\phi(t) = a^{\frac{t}{\alpha}}$ e $c' = \alpha \log_a c$ (con $a > 1$). Come visto, si ha $\lim_{t \to c',\, t \in \mathbb{R}} a^{\frac{t}{\alpha}} = a^{\frac{\alpha \log_a c}{\alpha}} = c$, ed essendo $\lim_{t \to c',\, t \in \mathbb{R}} (a^{\frac{t}{\alpha}})^\alpha = \lim_{t \to c',\, t \in \mathbb{R}} a^t = a^{c'} = c^\alpha$, , anche $\lim_{x \to c,\, x \in \mathbb{R}_{>0}} x^\alpha$ esisterà e sarà uguale a x^α. Se $\alpha > 0$ esaminiamo $c = 0$: la disequazione $|x^\alpha - 0^\alpha| < \varepsilon$ equivale a $|x| < \varepsilon^{\frac{1}{\alpha}}$, intorno di 0: dunque $\lim_{x \to 0,\, x \in \mathbb{R}_{\geq 0}} x^\alpha = 0^\alpha = 0$. Infine, i casi di $\alpha = n \in \mathbb{Z}$ e $c < 0$: si ha $|x^n - c^n| = |(-1)^n(-x)^n - (-1)^n(-c)^n| = |(-x)^n - (-c)^n|$, e si usa la continuità in $-c > 0$. Per il seno, si possono usare le formule di prostaferesi: se $c \in \mathbb{R}$ e supponendo

$0 < |x-c| \ll 1$ (si noti che $|\sin(t)| \le t$ quando $0 < t \ll 1$) si ha $|\sin x - \sin c| = 2\left|\cos\left(\frac{x+c}{2}\right)\right| \left|\sin\left(\frac{x-c}{2}\right)\right| \le \left|\cos\left(\frac{x+c}{2}\right)\right| |x-c| \le |x-c|$, e ciò mostra che $\lim_{x\to c,\ x\in\mathbb{R}} \sin x = \sin c$; per il coseno la verifica è identica; per la tangente e cotangente, vedremo quando avremo a disposizione i teoremi sui limiti. **(2)** Sia $A = \mathbb{R}$ e $f(x) = -3x^2 + x$, e mostriamo che $\lim_{x\to 1,\ x\in\mathbb{R}} f(x) = -2$. Sia $\varepsilon > 0$, e studiamo le soluzioni della disequazione $|f(x) - (-2)| < \varepsilon$: essa è $|-3x^2 + x + 2| < \varepsilon$, ovvero $-\varepsilon < -3x^2 + x + 2 < \varepsilon$, ovvero $-\varepsilon < 3x^2 - x - 2 < \varepsilon$, ovvero $\begin{cases} 3x^2 - x - (2+\varepsilon) < 0 \\ 3x^2 - x - (2-\varepsilon) > 0 \end{cases}$, che dà le soluzioni $\frac{-1-\sqrt{25+12\varepsilon}}{6} < x < \frac{-1-\sqrt{25-12\varepsilon}}{6}$ e $\frac{-1+\sqrt{25-12\varepsilon}}{6} < x < \frac{-1+\sqrt{25+12\varepsilon}}{6}$. Il primo dei due è un intorno di -1: basta dunque scegliere un $\delta > 0$ tale che $B_{-1}(\delta)$ sia contenuto in tale intorno, e la condizione sarà soddisfatta con $U = B_{-1}(\delta)$. Lo stesso ragionamento mostra che $\lim_{x\to\frac{2}{3},\ x\in\mathbb{R}} f(x) = -2$ (si noti che l'altro intervallo è un intorno di $\frac{2}{3}$). **(3)** Sia $A = \mathbb{R}_{<-1}$ e $f(x) = \sqrt{-x-1}$, e mostriamo che $\lim_{x\to-\infty,\ x\in\mathbb{R}} f(x) = +\infty$. Dato $a \in \mathbb{R}$, studiamo la disequazione $f(x) > a$: si trova $\sqrt{-x-1} > a$, da cui (possiamo supporre che $a > 0$) $x < -\sqrt{a^2+1}$. Quando $a \gg 1$, questa è una semiretta è del tipo $\mathbb{R}_{<b}$, e dunque "è un intorno di $-\infty$ in $\mathbb{R}$: l'asserto è dimostrato. **(4)** Sia $A = \mathbb{R}\setminus\{1\}$, e $f(x) = \frac{2x}{x-1}$; mostriamo che $\lim_{x\to+\infty,\ x\in\mathbb{R}} f(x) = 2$. Dato $\varepsilon > 0$, studiamo la disequazione $|f(x) - 2| < \varepsilon$, ovvero $-\varepsilon < \frac{2}{x-1} < \varepsilon$. Poiché $x \to +\infty$, possiamo supporre che $x > 1$: la condizione diventa allora $\frac{2}{x-1} < \varepsilon$, che diventa $x > 1 + \frac{2}{\varepsilon}$. Quando $\varepsilon \ll 1$, questa è una semiretta del tipo $\mathbb{R}_{>b}$, intorno di $+\infty$ in $\mathbb{R}$.

Se $B \subset A$ e $c \in \widetilde{\mathbb{R}}$ è di accumulazione anche per B, considerando $f|_B$ si può esaminare anche $\lim_{x\to c,\ x\in B} f(x)$: il suo legame con $\lim_{x\to c,\ x\in A} f(x)$ è dato dal

Lemma 3.2.3. *Se esiste* $\lim_{x\to c,\ x\in A} f(x)$ *allora esiste anche* $\lim_{x\to c,\ x\in B} f(x)$ *ed è uguale ad esso; viceversa,* $\lim_{x\to c,\ x\in B} f(x)$ *può esistere senza che esista* $\lim_{x\to c,\ x\in A} f(x)$.

Dimostrazione. Supponiamo che esista $\ell = \lim_{x\to c,\ x\in A} f(x)$. Se V è un intorno di ℓ e U è un intorno di c tale che $f((U\cap A)\setminus\{c\}) \subset V$: allora anche $f((U\cap B)\setminus\{c\}) \subset f((U\cap A)\setminus\{c\}) \subset V$. Ciò mostra la prima affermazione. Quanto alla seconda, basta dare un semplice esempio. Siano $A = \mathbb{R}$ e $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x\in\mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \end{cases}$ (la *funzione caratteristica di* $\mathbb{Q}$ *in* $\mathbb{R}$: allora $\lim_{x\to 0,\ x\in A} f(x)$ non esiste, mentre $\lim_{x\to c,\ x\in B} f(x)$ esiste sia prendendo $B = \mathbb{Q}$ che prendendo $B = \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ (e tali limiti valgono banalmente 1 e 0). $\square$

Un caso particolare è l'importante concetto di *limite sinistro* e *limite destro*, denotati risp.

$$\lim_{x\to c^-,\ x\in A} f(x), \qquad \lim_{x\to c^+,\ x\in A} f(x):$$

se $c \in \widetilde{\mathbb{R}}$ è un punto di accumulazione risp. di $A\cap\mathbb{R}_{<c}$ e $A\cap\mathbb{R}_{>c}$ in $\widetilde{\mathbb{R}}$, essi saranno definiti risp. come $\lim_{x\to c,\ x\in(A\cap\mathbb{R}_{<c})} f(x)$ e $\lim_{x\to c,\ x\in(A\cap\mathbb{R}_{>c})} f(x)$. Dire che $\lim_{x\to c^\pm,\ x\in A} f(x) = \ell$ significa dunque dire (vedi Figura 3.4) che nel calcolo del limite ci si può avvicinare con $x \in A$ a c *solo provenendo dalla sua sinistra* (risp. *dalla sua destra*).[30]

[30] Se $c = +\infty$ (risp. $c = -\infty$) è chiaro che la nozione di limite coincide con quella di limite sinistro (risp. destro), e che la nozione di limite destro (risp. sinistro) è priva di senso.

Proposizione 3.2.4. $\lim_{x\to c,\ x\in A} f(x)$ *esiste se e solo se* $\lim_{x\to c^{\pm},\ x\in A} f(x)$ *esistono e sono uguali.*

Dimostrazione. La necessità (ovvero "$\Rightarrow$") segue dal Lemma 3.2.3 (con $B = A\cap\mathbb{R}_{<c}$ e $A\cap\mathbb{R}_{>c}$). Vediamo la sufficienza (ovvero "$\Leftarrow$"). Sia $\ell = \lim_{x\to c^-,\ x\in A} f(x) = \lim_{x\to c^+,\ x\in A} f(x)$: se V è un intorno di ℓ e $U_\pm$ sono intorni di c tali che $f((U_\pm\cap(A\cap\mathbb{R}_{\gtrless c}))\setminus\{c\})\subset V$, ponendo $U = U_+\cap U_-$ si ha $(U\cap A)\setminus\{c\} = ((U\cap\mathbb{R}_{<c})\cap A)\sqcup((U\cap\mathbb{R}_{>c})\cap A)\subset(U_-\cap(A\cap\mathbb{R}_{<c}))\cup(U_+\cap(A\cap\mathbb{R}_{>c}))$, da cui[31] si ha $f((U\cap A)\setminus\{c\})\subset f((U_-\cap(A\cap\mathbb{R}_{<c}))\cup(U_+\cap(A\cap\mathbb{R}_{>c}))) = f(U_-\cap(A\cap\mathbb{R}_{<c}))\cup f(U_+\cap(A\cap\mathbb{R}_{>c}))\subset V$. $\square$

Esempi. **(1)** Sia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases}0 & \text{se } x\le 0\\ 3 & \text{se } x>0\end{cases}$; si ha $\lim_{x\to 0^-,\ x\in\mathbb{R}} f(x) = 0$ e $\lim_{x\to 0^+,\ x\in\mathbb{R}} f(x) = 3$, dunque di certo $\lim_{x\to 0,\ x\in\mathbb{R}} f(x)$ di certo non esiste. **(2)** Sia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases}3x+1 & \text{se } x\le -1\\ -2x-4 & \text{se } x>-1\end{cases}$; si ha $\lim_{x\to -1^-,\ x\in\mathbb{R}} f(x) = -2 = \lim_{x\to -1^+,\ x\in\mathbb{R}} f(x)$, dunque esiste anche $\lim_{x\to 1,\ x\in\mathbb{R}} f(x) = -2$.

La notazione $\lim_{x\to c,\ x\in A} f(x)$ è completa ma un po' pesante: nella pratica, scriveremo solo $\lim_{x\to c} f(x)$, dando per sottointeso chi sia il dominio A di f (ed useremo la notazione completa solo nel caso in cui vi sia rischio di confusione). In effetti, molto spesso f è definita *solo* usando una espressione che fa apparire la variabile x: in questo caso, intenderemo tacitamente che il dominio di f sia il suo *dominio naturale* A_f, ovvero il più grande sottoinsieme di $\mathbb{R}$ in cui tale espressione avrebbe senso: così, ad esempio, se l'espressione è data da $f(x) = \sqrt{-x^2+2x+3}\,\log_a x$, si intenderà che il dominio di f è $A_f = \{x\in\mathbb{R} : -x^2+2x+3\ge 0,\ x>0\} =]0,3]$. Negli altri casi, in cui la funzione necessiti di una definizione più articolata, il dominio dovrebbe essere comunque chiaro dalla definizione: ad esempio, il dominio di $f(x) = \begin{cases}4x-5 & \text{se } x\in[-\frac{1}{2},0[\\ -10 & \text{se } x=0\\ \sqrt{-x^2+2x+3}\,\log x & \text{se } x\in]0,1[\end{cases}$ è inteso essere $[-\frac{1}{2},0[\cup\{0\}\cup]0,1[= [-\frac{1}{2},1[$.

$\boxed{\textbf{Teoremi sui limiti}}$ Sarebbe assai difficoltoso dover calcolare i limiti ricorrendo ogni volta alla definizione: conviene senz'altro ricorrere ad alcuni risultati di carattere generale. (Negli enunciati, in cui si considerano funzioni definite in un sottoinsieme $A\subset\mathbb{R}$ per cui $c\in\widetilde{\mathbb{R}}$ è di accumulazione, l'espressione "P(x) vale in un intorno di c" significa "esiste un intorno U di c in $\widetilde{\mathbb{R}}$ tale che P(x) vale per ogni $x\in(U\cap A)\setminus\{c\}$", e "$\lim_{x\to c,\ x\in A}$" viene abbreviato in "$\lim_{x\to c}$".)

Proposizione 3.2.5. *Siano* $f,g,h : A\to\mathbb{R}$ *e* $c\in\widetilde{\mathbb{R}}$ *di accumulazione per* A.

[31] In generale, se $f : X\to Y$ è una funzione e $A,B\subset X$ si ha $f(A\cup B) = f(A)\cup f(B)$: infatti $x\in A\cup B$ se e solo se $x\in A$ oppure $x\in B$, da cui $f(x)\in f(A)$ oppure $f(x)\in f(B)$, cioè $f(x)\in f(A)\cup f(B)$ (e dunque vale "$\subset$"), e viceversa $y\in f(A)\cup f(B)$ se e solo se $y\in f(A)$ oppure $y\in f(B)$, dunque esiste $x'\in A$ tale che $f(x) = y$ oppure esiste $x''\in B$ tale che $f(x'')\in y$, dunque esiste $x\in A\cup B$ tale che $f(x) = y$, ovvero $y\in f(A\cup B)$ (e dunque vale "$\supset$").

(a) (Limiti delle funzioni monotòne) *Sia f crescente e c di accumulazione a sinistra* (risp. a destra) *per A: allora* $\lim_{x\to c^-} f(x)$ (risp. $\lim_{x\to c^+} f(x)$) *esiste, ed è uguale a* $\sup\{f(x) : x \in A,\, x < c\}$ (risp. a $\inf\{f(x) : x \in A,\, x > c\}$). *Analogamente, se f è descrescente, vale* $\lim_{x\to c^-} f(x) = \inf\{f(x) : x \in A,\, x < c\}$ *e* $\lim_{x\to c^+} f(x) = \sup\{f(x) : x \in A,\, x > c\}$.

(b) (Permanenza del segno) *Se i limiti esistono e vale* $\lim_{x\to c} f(x) < \lim_{x\to c} g(x)$, *allora $f(x) < g(x)$ in qualche intorno di c.*

In particolare:

Se $\lim_{x\to c} f(x)$ *esiste ed è* > 0, *allora $f(x) > 0$ in qualche intorno di c.*

(c) (Confronto) *Se $f(x) \le g(x)$ in un intorno di c, allora, se i limiti esistono, vale* $\lim_{x\to c} f(x) \le \lim_{x\to c} g(x)$.

In particolare:

(i) *Se $f(x) \ge 0$ in un intorno di c allora, se esiste,* $\lim_{x\to c} f(x)$ *sarà* > 0;

(ii) (Teorema dei "due carabinieri"): *Se $f(x) \le g(x) \le h(x)$ in un intorno di c, allora se esistono e sono uguali* $\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} h(x)$, *anche* $\lim_{x\to c} g(x)$ *esiste e sarà uguale ad essi.*

(d) (Limiti e operazioni):
(i) *Se esistono* $\ell_1 = \lim_{x\to c} f(x)$ *e* $\ell_2 = \lim_{x\to c} g(x)$ *e si ha* $\ell_1, \ell_2 \in \mathbb{R}$, *allora esistono anche* $\lim_{x\to c}(f(x)+g(x))$ *e* $\lim_{x\to c} f(x)g(x)$, *e sono uguali rispettivamente a* $\ell_1+\ell_2$ *e a* $\ell_1\ell_2$.
(ii) *Se* $\lim_{x\to c} f(x) = +\infty$ (risp. $-\infty$) *e g è inferiormente* (risp. superiormente) *limitata in un intorno di c, allora* $\lim_{x\to c}(f(x) + g(x))$ *esiste ed è uguale a* $+\infty$ (risp. a $-\infty$).
(iii) *Se* $\lim_{x\to c} f(x) = \pm\infty$ *ed esiste $a > 0$ tale che $g(x) > a$ in un intorno di c, allora* $\lim_{x\to c} f(x)g(x)$ *esiste ed è uguale a* $\pm\infty$.
(iv) *Se esistono* $\ell_1 = \lim_{x\to c} f(x)$ *e* $\ell_2 = \lim_{x\to c} g(x)$ *e si ha* $\ell_1, \ell_2 \in \mathbb{R}$ *e* $\ell_2 \neq 0$, *allora $\frac{f}{g}$ è definita all'intorno di c ed esiste* $\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)}$, *uguale a* $\frac{\ell_1}{\ell_2}$.
(v) *Se $f(x) \neq 0$ all'intorno di c e* $\lim_{x\to c} f(x) = 0$ (risp. $\lim_{x\to c} f(x) = \pm\infty$) *allora* $\lim_{x\to c} \frac{1}{f(x)}$ *esiste ed è uguale a* $\pm\infty$ (risp. 0).

Dimostrazione. (a) Supponiamo ad esempio che f sia crescente e c di accumulazione a sinistra per A, e denotiamo $\alpha = \sup\{f(x) : x \in A,\, x < c\} \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Se $\alpha \in \mathbb{R}$, sia $0 < \varepsilon \ll 1$: essendo $\alpha - \varepsilon < \alpha$, esiste $t \in A$ tale che $t < c$ e $f(t) > \alpha - \varepsilon$. Poiché f è crescente, varrà allora $\alpha - \varepsilon < f(t) \le f(x) \le \alpha$ per ogni $x \in]t, c[$, ovvero $f(]t, c[) \subset B_\alpha(\varepsilon)$: ciò mostra che $\lim_{x\to c^-} f(x) = \alpha$. Le altre affermazioni si provano allo stesso modo. (b) Siano $\ell_1 = \lim_{x\to c} f(x)$ e $\ell_2 = \lim_{x\to c} g(x)$ con $\ell_1 < \ell_2$, e siano V_1 e V_2 intorni di ℓ_1 e ℓ_2 rispettivamente con $V_1 \cap V_2 = \varnothing$ (vedi Nota 29), da cui $y_1 < y_2$ per ogni $y_1 \in V_1$ e $y_2 \in V_2$; siano U_1 e U_2 intorni di c tali che $f((U_1 \cap A) \setminus \{c\}) \subset V_1$ e $g((U_2 \cap A) \setminus \{c\}) \subset V_2$. Allora, $U = U_1 \cap U_2$ è un intorno di c e se $x \in (U \cap A) \setminus \{c\}$ vale $f(x) \in V_1$ e $g(x) \in V_2$,

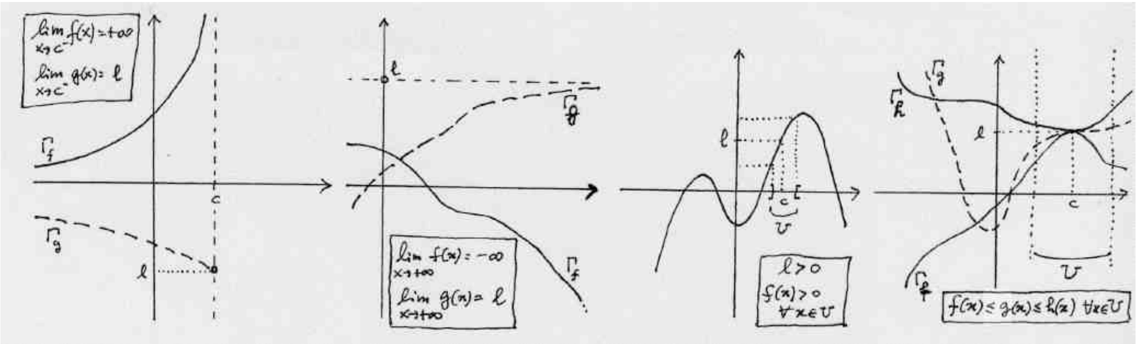

Figura 3.5: *Limiti di funzioni monotone in $c \in \mathbb{R}$ e in $+\infty$; permanenza del segno; i due carabinieri.*

da cui $f(x) < g(x)$. L'altra affermazione si ottiene scegliendo f e g come 0 e f. (c) Siano $\ell_1 = \lim_{x \to c} f(x)$, $\ell_2 = \lim_{x \to c} g(x)$ e supponiamo per assurdo che sia $\ell_1 \not\leq \ell_2$, ovvero $\ell_1 > \ell_2$; per la permanenza del segno esiste un intorno U di c tale che $f(x) > g(x)$ per ogni $x \in (U \cap A) \setminus \{c\}$, ma ciò è impossibile per ipotesi. (d) Vediamo ad esempio solo (i), lasciando le altre come esercizio. Sia $\varepsilon > 0$, e consideriamo $V = B_{\ell_1 + \ell_2}(r)$: si noti che $V = V_1 + V_2$, ove $V_j = B_{\ell_j}(\frac{\varepsilon}{2})$ (per $j = 1, 2$). Sia $\delta > 0$ tale che $f((B_c(\delta) \cap A) \setminus \{c\}) \subset V_1$ e $g(B_c(\delta) \cap A) \setminus \{c\}) \subset V_2$; allora, se $x \in B_c(\delta)$ si ha $f(x) + g(x) \in V_1 + V_2 = V$. Per il prodotto si ragiona in modo analogo, con $V_j = B_{\ell_j}(\sqrt{\varepsilon})$ (per $j = 1, 2$). $\square$

Abbiamo visto (negli Esempi a pag. 57) che le funzioni elementari $\log_a$, $\exp_a$, potenza, sin e cos sono tutte *continue*, ovvero il loro limite in un qualsiasi punto del loro dominio coincide col valore assunto nel punto stesso. Inoltre, grazie alla Proposizione 3.2.5(d), l'operazione di limite è sostanzialmente compatibile con le operazioni tra funzioni. Pertanto, quando si deve calcolare il limite di una funzione ottenuta sommando, moltiplicando o dividendo funzioni elementari, l'idea di fondo da applicare è: "prova a far tendere x verso c dal verso richiesto, e guarda cosa accade alla funzione di cui vuoi calcolare il limite, ricordando che "$a \pm \infty = \pm\infty$" e "$\frac{a}{\infty} = 0$" per ogni $a \in \mathbb{R}$, "$\frac{a}{0} = \infty$" e "$a \cdot \infty = \infty$" per ogni $a \in \mathbb{R}^\times$ e "$\pm\infty \pm \infty = \pm\infty$". È dunque chiaro che questi risultati permettono il calcolo immediato di moltissimi limiti, come vediamo dagli esempi che seguono.

Esempi. **(1)** Usando (a), si dimostra subito che vale $\lim_{x \to +\infty} \log_a x = \lim_{x \to +\infty} a^x = \lim_{x \to +\infty} x^\alpha = +\infty$, $\lim_{x \to 0^-} \log_a x = -\infty$ e $\lim_{x \to -\infty} a^x = \lim_{x \to 0^+} x^\alpha = 0$ (ove $a > 1$ e $\alpha > 0$). **(2)** Sia $f(x) = x - \sin x$: allora $\lim_{x \to 1} f(x) = 1 - \sin 1$ (per (d-(i))), $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$ (per (d-(ii)), anche se chiaramente $\lim_{x \to \pm\infty} \sin x$ non esiste), $\lim_{x \to 1} \frac{f(x)}{|x-1|} = +\infty$ (per (d-(iii-v)). **(3)** $\lim_{x \to -\infty}(-x^2 + x) = -\infty$ (per (d-(ii)). **(4)** $\lim_{x \to +\infty} \frac{\cos x}{x(1+x^2)} = 0$ (per (d-(iii-v)). **(5)** Se $c \in [0, \pi]$ con $c \neq \frac{\pi}{2}$ si ha $\lim_{x \to c} \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} c$ (per (d-(iv))) e $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^\mp} \operatorname{tg} x = \pm\infty$ (per (d-(iii-v))), e similmente per $\operatorname{cotg} x$.

Tuttavia, siamo ancora un po' incerti nel trattare i limiti delle *funzioni composte*. Per spiegarsi meglio: se $\lim_{x \to c} f(x) = a$ e a è un punto di accumulazione per il dominio naturale di una funzione elementare g, *possiamo dire che* $\lim_{x \to c} g(f(x)) = \lim_{t \to a} g(t)$ (in particolare, $\lim_{x \to c} g(f(x)) = g(a)$ se a sta nel dominio di g) ? Ad esempio, poiché ora sappiamo che $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \sin x = 1$ e $\lim_{x\to+\infty}(x^2 - 3\cos x) = +\infty$, possiamo dire anche che $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \log_a(\sin x) = \log_a 1 = 0$ e che $\lim_{x\to+\infty} a^{x^2-3\cos x} = \lim_{t\to+\infty} a^t = +\infty$? La risposta è sì, ed il motivo è che stiamo calcolando il limite di una funzione composta $g(f(x))$ ove g è una funzione *continua* (e come abbiamo visto, le funzioni elementari sono "continue"). Dunque, per rendere davvero potente questo metodo di calcolo dei limiti, sarà opportuno fare una pausa e rendere finalmente precisa la nozione di *funzione continua*, le sue proprietà e la sua influenza sul calcolo dei limiti, come la appena citata regola della composizione.

3.2.3 Funzioni continue

Abbiamo oramai capito che cosa significa "funzione continua": è una funzione f che "non fa salti", ovvero: quando la variabile x tende ad un punto c del suo dominio, $f(x)$ tende "docilmente" al valore che ognuno s'aspetta, ovvero a $f(c)$. Diamo però la definizione precisa.

Sia $A \subset \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione, $c \in A$. Diremo che f è *continua in* c se il punto c è isolato oppure, nel caso in cui c sia di accumulazione per A, se $\displaystyle\lim_{x\to c,\ x\in A} f(x)$ esiste ed è uguale a $f(c)$: ovvero, se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che $f(B_c(\delta) \cap A) \subset B_{f(c)}(\varepsilon)$, ovvero se $|x - c| < \delta$ e $x \in A$ allora $|f(x) - f(c)| < \delta$. Un altro modo assai espressivo di enunciare la continuità in c è il seguente: esistono entrambi i limiti $f(c^\pm) := \lim_{x\to c^\pm} f(x)$ e vale $f(c^-) = f(c^+) = f(c)$. È importante notare che la continuità in c è un concetto *locale*, ovvero che si studia solo in un intorno (anche assai piccolo) di c.
Se f è continua in ogni punto c del suo dominio A, essa si dirà *continua in* A.

Elenchiamo ora alcune delle proprietà elementari delle funzioni continue.

Proposizione 3.2.6. *Sia $A \subset \mathbb{R}$ e $c \in A$.*

(a) (Continuità ed operazioni) *Se $f, g : A \to \mathbb{R}$ sono continue in c, anche $f + g$ e fg lo sono; se $g(c) \neq 0$, allora $\frac{f}{g}$ è definita all'intorno di c ed è continua in c.*

(b) (Permanenza del segno) *Se $f, g : A \to \mathbb{R}$ sono continue in c e $f(c) < g(c)$ allora $f(x) < g(x)$ in tutto in un intorno di c.*

(c) (Limite di funzioni composte e composizione di funzioni continue) *Sia $B \subset \mathbb{R}$, $p \in \widetilde{\mathbb{R}}$ di accumulazione per B e $\phi : B \to A \subset$ una funzione tale che $\displaystyle\lim_{t\to p,\ t\in B} \phi(t) = c$. Allora, per ogni funzione $f : A \to \mathbb{R}$ continua in c vale $\displaystyle\lim_{t\to p,\ t\in B} f(\phi(t)) = f(c)$.*

In particolare:

Se ϕ è continua in p e f è continua in $c = \phi(p)$, allora $f \circ \phi$ è continua in p.

(d) (Restrizioni di funzioni continue sono continue) *Se $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione continua in c, e $c \in B \subset A$, allora $f|_B : B \to \mathbb{R}$ è continua in c.*

Dimostrazione. (a) e (b) discendono immediatamente dalla Proposizione 3.2.5. Per (c), sia $\varepsilon > 0$; essendo f continua in c, esiste $\delta > 0$ tale che se $x \in A$ e $|x - c| < \delta$ allora $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$, per l'esistenza del limite di ϕ, esiste $\gamma > 0$ tale che se $|t - p| < \gamma$ con $t \in B$ e $t \neq p$ allora $|\phi(t) - c| < \delta$: ne consegue che $|f(\phi(t)) - f(c)| < \varepsilon$ che dimostra la tesi. La continuità delle composizioni ne deriva immediatamente. Per (d), basta ricordare il Lemma 3.2.3. $\square$

Esempi. **(0)** Le funzioni costanti sono banalmente continue nel loro dominio. **(1)** Come abbiamo visto, le funzioni potenza, logaritmo, esponenziale, goniometriche sono continue (nel loro dominio naturale); è immediato vedere anche che il modulo è una funzione continua (esercizio). Inoltre, tutte le funzioni ottenute sommando, moltiplicando, dividendo e componendo tra loro tali funzioni (ad esempio, $\frac{\sin(\sqrt{x^2 - \cos x})}{\log_a(\mathrm{tg}\,|\sqrt[3]{x} - 2|)}$) saranno continue nel loro dominio naturale . **(2)** La funzione $f = \mathrm{sign} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -1$ (se $x < 0$), $f(0) = 0$ e $f(x) = 1$ (se $x > 0$) è continua in ogni $c \neq 0$ (infatti f è costante all'intorno di c) ma non in $c = 0$, perché $f(0^-)$ ed $f(0^+)$ esistono entrambi (valgono rispettivamente -1 e 1) ma sono diversi. **(3)** La funzione $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \neq 1 \\ -3 & \text{se } x = 1 \end{cases}$ è continua in ogni $c \neq 1$ (infatti all'intorno di c essa è la funzione continua x^2) ma non in $c = 1$, perché $f(1^-)$ ed $f(1^+)$ esistono entrambi e sono uguali tra loro (valgono entrambi 1) ma sono diversi da $f(1) = -3$. **(4)** La funzione $f(x) = \frac{1}{x-1}$ è continua in $c = 1$? Questa domanda è priva di senso, perché 1 non appartiene al dominio di f!

Altre proprietà delle funzioni continue fanno della continuità un concetto di grande importanza, che vediamo qui di seguito senza dimostrazione. Prima di iniziare, d'ora in poi chiameremo *intervallo compatto* un intervallo chiuso e limitato del tipo $[a, b]$ con $a, b \in \mathbb{R}$.

Proposizione 3.2.7. *Siano $A \subset \mathbb{R}$ ed $f : A \to \mathbb{R}$.*

(a) (Immagini continue di intervalli sono intervalli) *Se f è continua e A è un intervallo, allora anche $f(A)$ è un intervallo.*

Corollario:

(Teorema degli zeri) *Sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione continua e $[a, b]$ un intervallo compatto contenuto in A con $f(a) > 0$ e $f(b) < 0$* (o viceversa). *Allora esiste $x \in]a, b[$ tale che $f(x) = 0$.*

(b) (Continuità delle funzioni monotòne) *Se A è un intervallo, una funzione monotòna* (ovvero, crescente oppure decrescente) *$f : A \to \mathbb{R}$ è continua se e solo se $f(A)$ è un intervallo.*

(c) (Immagini continue di intervalli compatti sono intervalli compatti) *Se $[a, b]$ è un intervallo compatto e $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ è una funzione continua, allora anche $f([a, b])$ è un intervallo compatto.*

Corollario:

(Teorema di Weierstrass) *Se $[a, b]$ è un intervallo compatto, ogni funzione continua $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ammette massimo e minimo assoluti.* (In particolare, ogni funzione continua su un intervallo compatto è limitata.)

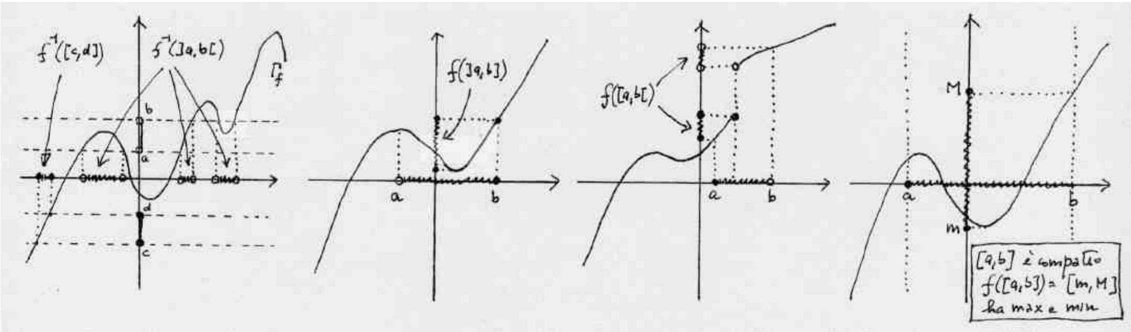

Figura 3.6: *Antiimmagini di intervalli tramite funzioni continue; l'immagine di un intervallo tramite una funzione continua è un intervallo; l'immagine di un intervallo tramite una funzione discontinua può non essere un intervallo; il teorema di Weierstrass.*

Esempi. (1) Consideriamo la funzione $\log_a(2\sin x + \sqrt{3})$ con $a > 1$: essa sarà continua nel suo dominio $\{x \in \mathbb{R} : 2\sin x + \sqrt{3} > 0\} = \{x \in \mathbb{R} : -\frac{\pi}{3} + 2k\pi < x < \frac{4\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z}\}$. Poiché $f(\frac{5\pi}{4}) = \log_a(\sqrt{3} - \sqrt{2}) < 0$ e $f(\pi) = \log_a(\sqrt{3}) = \frac{1}{2}\log_a 3 > 0$, già sappiamo che esiste $\xi \in]\pi, -\frac{5\pi}{4}[$ tale che $f(\xi) = 0$: in effetti, da $f(x) = 0$ si ricava $\sin x = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$, ovvero $x = -\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right) + 2k\pi$ oppure $x = \pi + \arcsin\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right) + 2k\pi$ (con $k \in \mathbb{Z}$), e $\xi = \pi + \arcsin\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)$ effettivamente sta in $]\pi, -\frac{5\pi}{4}[$. **(2)** La funzione $f(x) = \begin{cases} 3x - 1 & \text{se } x \leq 0 \\ \sqrt{x} & \text{se } x > 0 \end{cases}$ è strettamente crescente (ovvero se $x_1 < x_2$ allora $f(x_1) < f(x_2)$) e la sua immagine $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_{\leq 1} \cup \mathbb{R}_{>0}$ non è un intervallo: dunque essa non può essere continua su tutto il suo dominio $\mathbb{R}$ (infatti è continua in ogni punto do $\mathbb{R}$ tranne che in $c = 0$, ove si ha $f(0^-) = f(0) = -1 \neq f(0^+) = 0$). **(3)** La funzione continua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x^3 - 11x^2 + 8x$ non ammette massimi e minimi assoluti in $\mathbb{R}$ (infatti, come vedremo, $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$) ma, poiché $A = [-1, \frac{3}{2}]$ è compatto, in base al Teorema di Weierstrass la restrizione $f|_A : A \to \mathbb{R}$ avrà minimo α e massimo β, ove $f(A) = [\alpha, \beta]$. Ma... come calcolare l'intervallo $f(A)$, e come capire, poi in quali punti di A tali estremi vengono assunti (cioè, quali sono "i punti di massimo e minimo assoluto di f su A")? Effettivamente, per ora i nostri mezzi sono ancora limitati, e non possiamo rispondere: al più, provando a disegnare il grafico di f (che è una cubica), ci possiamo accorgere che essa si annulla per $x = 0, 1, \frac{8}{3}$, ha un massimo locale tra 0 e 1 ed un minimo locale tra 1 e $\frac{8}{3}$. Quando saremo più dotati di strumenti (più precisamente, dopo aver studiato la derivabilità) potremo verificare che f è crescente fino a $x = \frac{4}{9}$ e dopo $x = 2$, e decrescente tra $\frac{4}{9}$ e 2, e che dunque essa ha un massimo locale in $x = \frac{4}{9}$ (con valore $\frac{400}{243} \sim 1,6$) ed un minimo locale in $x = 2$ (con valore -4); essendo $f(-1) = -22$ e $1 < \frac{3}{2} < 2$ ne deduciamo che $f(A) = [-22, \frac{400}{243}]$, da cui il minimo (risp. massimo) assoluto di f su A è $\alpha = -22$ (assunto in $x = -1$) e $\beta = \frac{400}{243}$ (assunto in $x = \frac{4}{9}$).

Tipi di discontinuità Se $f : A \to \mathbb{R}$, un punto $c \in A$ (necessariamente di accumulazione per A) in cui f non è continua si dirà *punto di discontinuità*. Se entrambi i limiti $f(c^\pm) = \lim_{x\to c^\pm} f(x)$ esistono finiti (ovvero, in $\mathbb{R}$) ma non vale $f(c^-) = f(c^+) = f(c)$ si parlerà di *discontinuità di prima specie* o *di salto* (il numero $f(c^+) - f(c^-)$ è infatti chiamato "salto di f in c); in particolare, se $f(c^-) = f(c^+)$ ma $f(c)$ è diversa dal loro valore comune si dirà che c è una *discontinuità eliminabile* perché basterebbe modificare il valore $f(c)$ per rendere f continua in c. In tutti gli altri casi si dice che c è una *discontinuità di*

seconda specie, o *essenziale*.
A tal proposito, è utile parlare anche di

Proposizione 3.2.8. (Prolungamento per continuità) *Sia* $A \subset \mathbb{R}$ *e* $f : A \to \mathbb{R}$ *una funzione continua in* A*; definiamo* $\widetilde{A}_f = \{x \in \mathrm{cl}_{\mathbb{R}} A :$ *esiste* $\lim_{x \longrightarrow c,\ x \in A} f(x)$ *finito*$\}$. *Allora la funzione* $\tilde{f} : \widetilde{A}_f \to \mathbb{R}$ *definita da* $\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in A \\ \lim_{x \longrightarrow c,\ x \in A} f(x) & \text{se } x \in \widetilde{A}_f \setminus A \end{cases}$ *è continua in* $\widetilde{A}_f$.

Esempi. **(1)** La già vista funzione $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \neq 1 \\ -3 & \text{se } x = 1 \end{cases}$ ha una discontinuità eliminabile in $x = 1$ (basterebbe modificare $f(1)$ da -3 a 1); idem per $f(x) = \mathrm{sign}^2 x$ data da $f(x) = 1$ (se $x \neq 0$) e $f(0) = 0$. Invece $f(x) = \mathrm{sign}\, x$ (data, come detto, da $f(x) = -1$ se $x < 0$, $f(0) = 0$ e $f(x) = 1$ se $x > 0$) e $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 3 & \text{se } x \leq 0 \\ x^2 - 2 & \text{se } x > 0 \end{cases}$ hanno una discontinuità di prima specie in 0 con salti rispettivamente 2 e -5. **(2)** Le funzioni $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-2} & \text{se } x \neq 2 \\ 4 & \text{se } x = 2 \end{cases}$ (in cui $\lim_{x \to 2^{\pm}} f(x) = \pm\infty$) e $g(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 2 & \text{se } x = 0 \end{cases}$ (in cui $\lim_{x \to 0} g(x)$ non esiste, perché "se x tende a 0 $g(x)$ oscilla sempre più velocemente tra -1 e 1") sono discontinuità di seconda specie. **(3)** La funzione $f(x) = \frac{x^2-4}{x+2}$ ha come dominio $\{x \in \mathbb{R} : x \neq 2\}$; tuttavia, poiché chiaramente $\lim_{x \to -2} f(x) = -4$, si può prolungare f per continuità anche in -2 ponendola uguale a -4. Idem per $g(x) = e^{-\frac{1}{|x|}}$ e $h(x) = \frac{\sin x}{x}$, che hanno dominio $\mathbb{R}^{\times} = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\}$: poiché, come si vedrà meglio tra breve tornando a parlare di limiti, si ha $\lim_{x \to 0} g(x) = 0$ e $\lim_{x \to 0} h(x) = 1$, esse si possono prolungare per continuità anche in 0 con tali valori.

$\boxed{\textbf{Omeomorfismo}}$ Se $A, B \subset \mathbb{R}$, un *omeomorfismo* tra A e B è una funzione biiettiva $f : A \to B$ continua e con inversa $f^{-1} : B \to A$ pure continua. In tal caso A e B si diranno "omeomorfi": il significato è che, topologicamente, essi sono "indistinguibili a meno del dizionario f che traduce l'uno nell'altro", ed è chiaro che l'essere omeomorfi dà una relazione d'equivalenza in $\mathcal{P}(\mathbb{R})$. Così, due intervalli "dello stesso tipo" (ovvero entrambi aperti/chiusi/semichiusi e limitati, o entrambi semirette aperte/chiuse) sono sempre omeomorfi: ad esempio, $A = [a, b[$ e $B =]c, d]$ sono omeomorfi tramite $f : A \to B$, $f(x) = -\frac{(d-c)x+ac-bd}{b-a}$ (che "sovrappone A a B rovesciandolo e modificandone la lunghezza"), la cui inversa è $f^{-1} : B \to A$, $f^{-1}(y) = -\frac{(b-a)y+ac-bd}{d-c}$. Ma può accadere che siano omeomorfi anche dei sottoinsiemi che a prima vista non sembrano avere molto a che fare l'uno con l'altro: ad esempio, la funzione $\mathrm{tg} :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$ è un omeomorfismo tra $A =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ e $B = \mathbb{R}$ (è biiettiva e continua, con inversa $\mathrm{arctg} : \mathbb{R} \to]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ pure continua). Si faccia attenzione al fatto che, in generale, non è detto che una funzione biiettiva e continua abbia anche inversa continua: l'esempio classico è quello in cui $A = \mathbb{R}_{<-1} \cup \{0\} \cup \mathbb{R}_{>1}$, $B = \mathbb{R}$ e $f : A \to B$ data da $f(x) = x - \mathrm{sign}\, x$, in cui $f^{-1}(y) = y + \mathrm{sign}\, y$ non è continua, avendo un salto $f^{-1}(0^+) - f^{-1}(0^-) = 2$ in $y = 0$. Tuttavia, se A è un intervallo non accadono tali sorprese, come mostra la seguente Proposizione di cui non diamo dimostrazione.

Proposizione 3.2.9. *Sia* A *un intervallo di* $\mathbb{R}$*, e sia* $f : A \to \mathbb{R}$ *una funzione continua.*

Allora f è iniettiva se e solo se essa è strettamente monotona, ed in tal caso essa induce un omeomorfismo tra A e $B = f(A)$ (che sarà dunque anch'esso un intervallo).

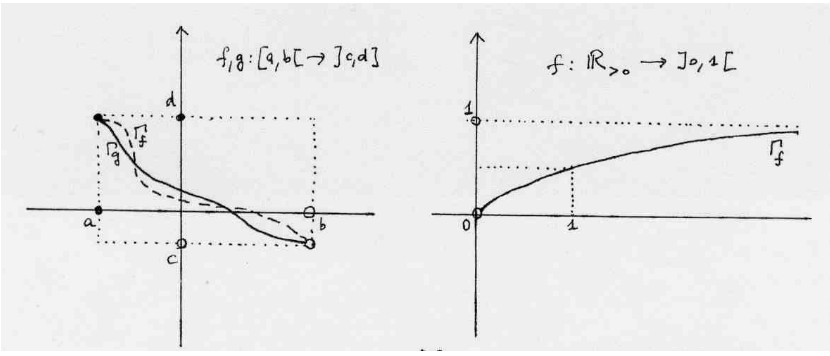

Figura 3.7: *Gli intervalli $[a, b[$ e $]c, d]$ sono omeomorfi (le funzioni f e g sono due possibili omeomorfismi); la funzione $f(x) = \frac{x}{x+1}$ è un omeomorfismo tra $\mathbb{R}_{>0}$ e $]0, 1[$.*

Esempi. (1) Esaminiamo ad esempio le funzioni $\sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}$ e $\cos : [0, \pi] \to \mathbb{R}$: esse sono continue e strettamente monotone (risp. strettamente crescente e decrescente), e dunque costituiscono un omeomorfismo tra il loro dominio (intervallo) e l'immagine (che è $[-1, 1]$): ne desumiamo in particolare che *le loro inverse* $\arcsin : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ *e* $\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$ *sono continue.* **(2)** Ancora più interessante è il caso di $\mathrm{tg} :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$: e $\mathrm{cotg} :]0, \pi[\to \mathbb{R}$: esse sono continue e strettamente monotone (risp. strettamente crescente e decrescente), e dunque costituiscono un omeomorfismo tra il loro dominio (intervallo) e l'immagine (che è $\mathbb{R}$): perciò *le loro funzioni inverse* $\mathrm{arctg} : \mathbb{R} \to]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ *e* $\mathrm{arccotg} : \mathbb{R} \to]0, \pi[$ *sono continue*, e mostrano che $\mathbb{R}$ *è omeomorfo ad uno* (e dunque ad ogni) *suo intervallo aperto e limitato.* Così, ad esempio, componendo con l'omeomorfismo naturale tra $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ e $]-1, 1[$ visto poco fa, otteniamo un omeomorfismo $\phi : \mathbb{R} \to]-1, 1[$ ponendo $\phi(x) = \frac{2}{\pi} \mathrm{arctg}\, x$; un altro omeomorfismo tra gli stessi spazi è però anche $\psi : \mathbb{R} \to]-1, 1[$, $\psi(x) = \frac{x}{|x|+1}$ (anche questa è una funzione continua e strettamente crescente con dominio l'intervallo $\mathbb{R}$ ed immagine $]-1, 1[$).

3.2.4 **Limiti** (ripresa)**, forme indeterminate e limiti notevoli**

Dopo aver studiato le funzioni continue, possiamo ora tornare al problema originale del calcolo dei limiti. La combinazione dei teoremi sui limiti (Proposizione 3.2.5) e le proprietà delle funzioni continue, particolarmente il limite delle composizioni con funzioni continue (vedi Proposizione 3.2.6) ci danno modo di risolvere "istantaneamente" la stragrande maggioranza dei limiti: come anticipato, l'idea è di far tendere x verso c dal verso richiesto, e guardare cosa accade alla funzione di cui si vuole calcolare il limite, ricordando le operazioni con i limiti e tenendo presente che "le funzioni continue commutano con l'operazione di limite": se g è continua, allora "$\lim_{x \to c} g(f(x)) = g(\lim_{x \to c} f(x))$", dove il secondo membro di tale uguaglianza va inteso nel senso di "limite di g quando la variabile tende a $\lim_{x \to c} f(x)$".

Esempi. (0) Per ogni $a > 0$ si ha $\lim_{x \to +\infty} a^{\frac{1}{x}} = 1$ (infatti quando $x \to +\infty$ si ha $\frac{1}{x} = 0^+$, e dunque (l'esponenziale è continuo!) $a^{\frac{1}{x}} \to a^{0^+} = 1^+$); si ha $\lim_{x\to 1^\pm} \mathrm{arctg}(\frac{1}{1-x}) = \mp\frac{\pi}{2}$ (infatti quando $x \to 1^\pm$ si ha $1-x \to 0^\mp$, da cui $\frac{1}{1-x} \to \mp\infty$, da cui (l'arco-tangente è continua!) $\mathrm{arctg}(\frac{1}{1-x}) \to$ "$\mathrm{arctg}(\mp\infty) =$" $\mp\frac{\pi}{2}$). **(1)** Si voglia calcolare $\lim_{x\to+\infty}(\log_a(1+\sqrt{1+x}) - b^{-x^2})$, ove $a, b > 0$ e $a, b \neq 1$. Quando $x \to +\infty$ si ha $1+x \to +\infty$, da cui (la radice è continua!) $\sqrt{1+x} \to +\infty$, da cui $1+\sqrt{1+x} \to +\infty$, da cui (il logaritmo è continuo!) $\log_a(1+\sqrt{1+x}) \to +\infty$ (se $a > 1$) o $\log_a(1+\sqrt{1+x}) \to -\infty$ (se $0 < a < 1$); poi si ha $-x^2 \to -\infty$ da cui (l'esponenziale è continuo!) $b^{-x^2} \to 0$ (se $b > 1$) oppure $b^{-x^2} \to +\infty$ (se $0 < b < 1$): pertanto il limite vale "$\pm\infty - 0 =$"$\pm\infty$ se $b > 1$, vale "$-\infty - \infty =$"$-\infty$ se $0 < b < 1$ e $0 < a < 1$, mentre se $0 < b < 1$ e $a > 1$ si trova "$+\infty - \infty$"...? Questa è una "forma indeterminata", di cui ci occuperemo tra breve. **(2)** Si voglia calcolare $\lim_{x\to 2^-} \frac{\sin(x^2)}{(x-2)\,\mathrm{tg}(\sqrt{x})}$. Quando $x \to 2^+$ si ha $x^2 \to 4^+$, da cui (il seno è continuo) il numeratore tende a $\sin(4) < 0$ (infatti $\pi < 4 < \frac{3\pi}{2}$); al denominatore si ha $x - 2 \to 0^+$, e (la tangente è continua) $\mathrm{tg}(\sqrt{x}) \to \mathrm{tg}(\sqrt{2}) > 0$ (perché $\sqrt{2} \sim 1,41$ e dunque $0 < \sqrt{2} < \frac{\pi}{2}$), e dunque il denominatore tende a "$0^+ \cdot \mathrm{tg}(\sqrt{2}) =$"$0^+$. Pertanto la funzione tende a "$\frac{\sin 4}{0^+} =$"$-\infty$ (infatti, di certo diverge a ∞; il segno si ricava poi dall'osservazione dei segni del numeratore (< 0) e denominatore (> 0)).

Gli unici casi che non si possono risolvere con questo "procedimento speditivo" sono le cosiddette *forme indeterminate*. Ad esempio, calcolando $\lim_{x\to+\infty}(x^2 - x)$ si ha che l'addendo x^2 tende a $+\infty$ mentre $-x$ tende a $-\infty$, non rendendo chiara la tendenza della funzione. Si tratta dunque di situazioni in cui si manifesta un "braccio di ferro tra tendenze opposte", e non è chiaro se e quale di esse la vincerà. Queste forme indeterminate si possono classificare nei tipi "$\pm\infty \mp \infty$", "$\frac{0}{0}$", "$\frac{\infty}{\infty}$", "$0 \cdot +\infty$", "0^0" e "1^∞", che non sono indipendenti perché spesso si può spesso trasformare l'uno nell'altro, come mostrano i seguenti esempi. (1) Il limite $\lim_{x\to 0^+} x \,\mathrm{cotg}\, x$, che è della forma "$0 \cdot \infty$", può essere scritto anche come $\lim_{x\to 0^+} \frac{x}{\mathrm{tg}\, x}$ che è della forma "$\frac{0}{0}$", oppure come $\lim_{x\to 0^+} \frac{\mathrm{cotg}\, x}{1/x}$, che è della forma "$\frac{\infty}{\infty}$". (2) Il limite $\ell = \lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{(x-1)^2}}$, che è della forma "$1^\infty$", può essere opportunamente riletto usando la continuità del logaritmo: se $\ell \in \widetilde{\mathbb{R}}$ esiste, allora sarà "$\log_a(\ell)$"$= \lim_{x\to 1} \log_a(x^{\frac{1}{(x-1)^2}}) = \lim_{x\to 1} \frac{\log_a x}{(x-1)^2}$ (ove il primo membro va inteso nel senso di "$\lim_{t\to\ell} \log_a(t)$"), ed il limite da calcolare al secondo membro ora è della forma "$\frac{0}{0}$".

Gli strumenti più potenti per affrontare le forme indeterminate sono il calcolo di confronto locale (che vedremo tra breve) e il teorema di de l'Hôpital (che vedremo invece più tardi nello studio della derivabilità). Per ora ci limitiamo a segnalare alcuni importanti casi particolari.

Proposizione 3.2.10. *Consideriamo i seguenti limiti in forma indeterminata.*

(a) (Il numero di Nepero e) *Vale*

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots \qquad \in \mathbb{R}_{>0}.$$

Il valore di tale limite si indica col simbolo $e = 2,71828...$ *ed è detto* numero di Nepero[32]*. Inoltre, per ogni* $\alpha \in \mathbb{R}$ *vale*

$$e^\alpha = \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{\alpha}{x}\right)^x = 1 + \frac{\alpha}{1!} + \frac{\alpha}{2!} + \frac{\alpha}{3!} + \frac{\alpha}{4!} + \cdots$$

[32] "Nepero" è l'italianizzazione del cognome di John Napier, matematico scozzese del XVImo secolo.

(b) (Esponenziali, logaritmi e potenze) *Per ogni* $a > 1$, $\alpha > 0$ *e* $\beta \in \mathbb{R}$ *vale*

$$(1)\ \lim_{x\to+\infty} \frac{a^{\alpha x}}{x^\beta} = +\infty, \qquad (2)\ \lim_{x\to+\infty} \frac{\log_a^\beta x}{x^\alpha} = 0, \qquad (3)\ \lim_{x\to 0^+} x^\alpha |\log_a x|^\beta = 0.$$

(c) (Funzioni razionali) *Siano* $f(x) = \sum_{i=1}^m a_i x^i = a_m x^m + \cdots + a_1 x + a_0$ *e* $g(x) = \sum_{j=0}^n b_j x^j = b_n x^n + \cdots + b_1 x + b_0$ *polinomi reali con* $a_m, b_n > 0$*: allora*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} +\infty & \text{se } m > n \\ a_m/b_m & \text{se } m = n \\ 0 & \text{se } m < n \end{cases}, \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} (-1)^{m-n}\infty & \text{se } m > n \\ a_m/b_m & \text{se } m = n \\ 0 & \text{se } m < n \end{cases}.$$

(d) (Limiti notevoli) *Per ogni* $a \in \mathbb{R}_{>0} \setminus \{1\}$ *ed ogni* $\alpha \in \mathbb{R}$ *vale*

$$(1)\ \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \qquad (2)\ \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}, \qquad (3)\ \lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \log a,$$

$$(4)\ \lim_{x\to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\log a} = \log_a e, \qquad (5)\ \lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha.$$

Dimostrazione. Di (a) non diamo la dimostrazione. (b) Il limite (1) non presenta alcuna forma indeterminata se $\beta \leq 0$, e vale $+\infty$. Se invece $\beta > 0$, col cambio di variabile $x = \frac{\log a}{\alpha} t$ (ove $\log a = \log_e a > 0$) si ha $\lim_{x\to+\infty} \frac{a^{\alpha x}}{x^\beta} = \left(\frac{\alpha}{\log a}\right)^\beta \lim_{t\to+\infty} \frac{e^t}{t^\beta}$. Tenendo presente che $e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \cdots$, si ha $e^t > 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \cdots + \frac{t^m}{m!} > \frac{t^m}{m!}$ per ogni $m \in \mathbb{N}$. In particolare, preso un qualsiasi $m \in \mathbb{N}_{>\beta}$ si ha $\lim_{t\to+\infty} \frac{e^t}{t^\beta} > \lim_{t\to+\infty} \frac{\frac{t^m}{m!}}{t^\beta} = \lim_{t\to+\infty} \frac{t^{m-\beta}}{m!} = +\infty$. Il limite (2) ne segue col cambio di variabili $x = a^t$, e (3) segue da (2) col cambio $x = \frac{1}{t}$. (b) Raccogliendo x^m al numeratore e x^n al denominatore si ha $\frac{f(x)}{g(x)} = x^{m-n} \frac{a_m + \frac{a_{m-1}}{x} + \cdots + \frac{a_1}{x^{m-1}} + \frac{a_0}{x^m}}{b_n + \frac{b_{n-1}}{x} + \cdots + \frac{b_1}{x^{n-1}} + \frac{b_0}{x^n}}$, e le varie affermazioni seguono facilmente. (c) (1) Quando $0 < x \ll 1$ si ha $\sin x < x < \operatorname{tg} x$, da cui (dividendo per $\sin x$ e invertendo) $1 \leq \frac{\sin x}{x} \leq \cos x$: il risultato segue allora dal Teorema dei due carabinieri. (2) Vale $\sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{2}$, da cui (sfruttando la continuità della potenza, effettuando il cambio di variabile $t = \frac{x}{2}$ e ricordando il limite notevole appena calcolato) si ottiene $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \frac{1}{2} \left(\lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t}\right)^2 = \frac{1}{2}$. (4) Usando la continuità della funzione $\log_a$ ed il cambio di variabile $x = \pm\frac{1}{t}$, vale $\lim_{x\to 0^\pm} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0^\pm} \log_a(1+x)^{\frac{1}{x}} = \log_a(\lim_{x\to 0^\pm}(1+x)^{\frac{1}{x}}) = \log_a(\lim_{t\to+\infty}(1+\frac{1}{t})^t) = \log_a e$. Il limite (3) segue da (4) col cambio di variabile $x = \log_a(1+t)$. Nel limite (5) la conclusione è banale se $\alpha = 0$, e pensiamo dunque $\alpha \neq 0$. Intendendo $(1+x)^\alpha = e^{\alpha \log(1+x)}$, si ha allora $\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{\alpha\log(1+x)} - 1}{x} = \alpha \lim_{x\to 0} \frac{e^{\alpha\log(1+x)} - 1}{\alpha\log(1+x)} \frac{\log(1+x)}{x}$; essendo poi $\lim_{x\to 0} \frac{e^{\alpha\log(1+x)} - 1}{\alpha\log(1+x)} = \lim_{u\to 0} \frac{e^u - 1}{u} = 1$ (col cambio di variabile $u = \alpha\log(1+x)$ ovvero $x = e^{u/\alpha} - 1$) e $\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$, si ottiene quanto voluto. $\square$

Esempi. (1) Il limite $\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 2x}{1-\cos 3x}$ è nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$; sfruttando i limiti notevoli si ha però $\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 2x}{1-\cos 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 2x}{(2x)^2}\frac{(2x)^2}{(3x)^2}\frac{(3x)^2}{1-\cos 3x}=\lim_{x\to 0}(\frac{\sin 2x}{2x})^2\frac{4x^2}{9x^2}\frac{(3x)^2}{1-\cos 3x}=1^2\,\frac{4}{9}\,\frac{1}{\frac{1}{2}}=\frac{8}{9}$. **(2)** Si debba calcolare $\lim_{x\to 1}\frac{\log(3x-2)}{x^2-1}$, nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$. Ponendo $t=x-1$, il limite diventa $\lim_{t\to 0}\frac{\log(1+3t)}{t^2+2t}=\lim_{t\to 0}\frac{\log(1+3t)}{3t}\frac{3t}{t^2+2t}=\lim_{t\to 0}\frac{\log(1+3t)}{3t}\frac{3}{t+2}=\frac{3}{2}$.

Convenzione. D'ora in poi, parlando di "esponenziale" e "logaritmo" si sottintenderà (salvo esplicita indicazione contraria) che si tratta rispettivamente dell'esponenziale e logaritmo *naturali*, la cui base è il *numero di Nepero e*. In particolare, si intenderà sempre

$$\log x := \log_e x.$$

3.2.5 Trascurabilità ed asintoticità

Nel calcolo dei limiti, come abbiamo visto, le forme indeterminate scaturiscono dal contrapporsi di tendenze opposte da parte delle varie componenti della funzione, che non rendono chiaro quale sarà la tendenza globale di quest'ultima; l'esito della combinazione di queste tendenze opposte può essere assai diverso a seconda dei casi. Ad esempio, le funzioni $1-\cos x$ e x sono entrambe infinitesime in 0 e dunque $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}$ presenta una forma indeterminata del tipo "$\frac{0}{0}$". Ma in realtà si vede facilmente che tale limite vale 0 (infatti $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$ e $\lim_{x\to 0}x=0$, così $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=(\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2})(\lim_{x\to 0}x)=0$): dunque, $1-\cos x$ è un infinitesimo *più forte* di x, ovvero esso "va a zero più velocemente di quanto faccia x" quando x tende a 0. Analogamente, sia e^x che x^3 sono infinite in $+\infty$, ma si ha $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^3}=+\infty$: perciò e^x è un infinito *più forte* di x^3, ovvero esso "va all'infinito più velocemente di quanto faccia x^3" quando x tende a $+\infty$. Invece, come abbiamo visto, vale $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}=2$ (infatti, col cambio di variabile $x=\frac{t}{2}$ si ha $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t/2}=2\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=2$): le funzioni $\sin 2x$ e x sono entrambe infinitesime in 0, ma il fatto che, a differenza di prima, il limite del loro quoziente è *finito e non nullo* ci fa capire che esse *tendono a zero con velocità paragonabili.* Vogliamo dunque stabilire con precisione cosa significa che due funzioni hanno comportamenti locali in c che sono "dello stesso tipo", oppure "l'uno nettamente prevalente sull'altro"; lo scopo finale di questa operazione, come si può intuire, sarà di cercare di rimpiazzare, nei problemi locali in c (come ad esempio il calcolo di un limite quando x tende a c) un funzione "difficile" $f(x)$ con una più "facile" $g(x)$, quando si sappia che f e g hanno "comportamenti paragonabili" (anche questo un concetto da chiarire) all'intorno di c.

Sia $A\subset\mathbb{R}$, $c\in\widetilde{\mathbb{R}}$ un punto di accumulazione per A, e $f,g:A\to\mathbb{R}$ due funzioni. Supponiamo che esista un intorno U di c in cui g non si annulla mai eccetto eventualmente in c (ovvero $g(x)\neq 0$ per ogni $x\in(A\cap U)\setminus\{c\}$). Si dirà che

(a) f è *trascurabile* rispetto a g (e si scriverà $f=o_c(g)$, da leggersi "f è *o piccolo di g* *per x che tende a c*") se $\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$;

(b) f è *asintotica* a g in c (e si scriverà $f \sim_c g$) se $\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$; più generalmente, si dirà che f è *dello stesso ordine* di g in c (e si scriverà $f \sim_c^* g$) se $\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} \in \mathbb{R}^\times$.

Nel seguito, scrivendo ad esempio "$f + o_c(f)$" si intende "f più qualche funzione trascurabile rispetto a f in c" dove di questa "qualche funzione" non ci interessa dare la descrizione precisa, ma solo sapere che è trascurabile rispetto a f in c. Talvolta con "$o_c(f)$" intenderemo l'insieme di tutte le funzioni trascurabili rispetto a f in c.

La definizione (a) è la nozione che, nei nostri intenti, esprimerà l'idea di "andare a zero più velocemente" o "andare all'infinito più lentamente"; essa rappresenta una sorta di "ordine stretto" nella famiglia delle funzioni che hanno c come punto di chiusura del loro dominio. Nel caso in cui f e g siano entrambe infinitesimi (risp. infiniti) in c, si usa dire che "f è un infinitesimo di ordine superiore di g in c" (risp. che "f è un infinito di ordine inferiore di g in c"). Per quanto riguarda (b), "asintoticità" ed "essere dello stesso ordine sono invece le nozioni che esprimeranno, con maggiore o minor precisione, l'idea di "avere comportamenti paragonabili".

Esempi. **(1)** Vale $\sin x = o_c(1)$ per $c = k\pi$ (con $k \in \mathbb{Z}$); in generale, ovviamente, vale $\sigma(x) = o_c(1)$ se e solo se $\sigma(x)$ è infinitesima in c. **(2)** Bisogna fare attenzione a *dove* si sta facendo lo studio locale! Ad esempio, (i) vale $\sin x = o_{+\infty}(x)$ e $\sin x \sim_0 x$; (ii) vale $e^x = o_0(\frac{1}{x})$ e $\frac{1}{x} = o_{+\infty}(e^x)$ **(3)** La Proposizione 3.2.10 dice in sostanza che per ogni $\alpha > 0$ e $\beta \in \mathbb{R}$ si ha $x^\beta = o_{+\infty}(e^{\alpha x})$ (*nelle forme indeterminate, l'esponenziale vince contro la potenza*), $\log^\beta x = o_{+\infty}(x^\alpha)$ e $|\log x|^\beta = o_0(x^\alpha)$ (*nelle forme indeterminate, la potenza vince contro il logaritmo*). **(4)** Sempre la Proposizione 3.2.10 afferma che $f(x) \sim_0 x$ per $f(x) = \sin x$, $e^x - 1$, $\log(1 + x)$, mentre $1 - \cos x \sim_0^* x^2$ e $(1 + x)^\alpha - 1 \sim_0^* x$ per ogni $\alpha \neq 0$. **(5)** Essendo $\sin 2x \sim_0^* x$ (infatti $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{x} = \lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t/2} = 2 \in \mathbb{R}^\times$) si ha $o_0(\sin 2x) = o_0(x)$; per lo stesso motivo si ha $o_0(1 - \cos x) = o_0(x^2)$. **(6)** Essendo $\log x = o_{+\infty}(\sqrt{x})$, se avrà $o_{+\infty}(\log x) \subset o_{+\infty}(\sqrt{x})$.

Lavorare con i limiti usando trascurabilità ed asintoticità semplifica considerevolmente il lavoro.

Proposizione 3.2.11. *Siano $A \subset \mathbb{R}$, $c \in \widetilde{\mathbb{R}}$ di accumulazione per A, e siano $f, g : A \to \mathbb{R}$.*

(i) (Sostituzione di un fattore con una funzione asintotica) *Esista un intorno U di c in cui g non si annulla mai eccetto eventualmente in c, e sia $g \sim_c \tilde{g}$. Allora* $\lim_{x\to c} f(x)g(x)$ *e* $\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)}$ *esistono se e solo se esistono rispettivamente* $\lim_{x\to c} f(x)\tilde{g}(x)$ *e* $\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{\tilde{g}(x)}$*, ed in tal caso vale*

$$\lim_{x\to c} f(x)g(x) = \lim_{x\to c} f(x)\tilde{g}(x), \qquad \lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c} \frac{f(x)}{\tilde{g}(x)}.$$

(ii) (Eliminazione degli addendi trascurabili) *Esista un intorno U di c in cui f e g non si annullano mai eccetto eventualmente in c. Allora* $\lim_{x\to c}(f(x)+o_c(f))(g(x)+o_c(g))$

e $\lim_{x\longrightarrow c}\frac{f(x)+o_c(f)}{g(x)+o_c(g)}$ *esistono se e solo se esistono rispettivamente* $\lim_{x\longrightarrow c} f(x)g(x)$ *e* $\lim_{x\longrightarrow c}\frac{f(x)}{g(x)}$, *ed in tal caso vale*

$$\lim_{x\longrightarrow c}(f(x)+o_c(f))(g(x)+o_c(g)) = \lim_{x\longrightarrow c} f(x)g(x), \qquad \lim_{x\longrightarrow c}\frac{f(x)+o_c(f)}{g(x)+o_c(g)} = \lim_{x\longrightarrow c}\frac{f(x)}{g(x)}.$$

Dimostrazione. (i) Facile (raccogliere $g(x)$, e usare la definizione). (ii) Segue applicando questa conclusione prima al fattore $f(x)+o_c(f)$ (asintotico a $f(x)$) e poi al fattore $g(x)+o_c(g)$ (asintotico a $g(x)$). □

Esempi. (1) Studiamo il limite $\lim_{x\longrightarrow 0^+}\frac{\sin 2x}{x^\alpha}$ al variare di $\alpha>0$. Poiché $\sin 2x \sim_0 2x$, si puø' sostituire al numeratore $\sin 2x$ con $2x$ ottenendo $\lim_{x\longrightarrow 0^+}\frac{\sin 2x}{x^\alpha} = \lim_{x\longrightarrow 0^+}\frac{2x}{x^\alpha} = \lim_{x\longrightarrow 0^+} 2x^{1-\alpha}$, che vale 0^+ se $0<\alpha<1$, vale 2 se $\alpha=1$ e vale $+\infty$ se $\alpha>1$. **(2)** Poiché x^3, $\sin x$, $\log x$ e 5 sono tutti $o_{+\infty}(e^x)$, si ha $\lim_{x\longrightarrow+\infty}\frac{e^x-x^3+\sin x}{5+\log x-2e^x} = \lim_{x\longrightarrow+\infty}\frac{e^x}{-2e^x} = \lim_{x\longrightarrow+\infty}(-\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2}$; analogamente, poiché $x^2=o_0(x)$ e $1-\cos x \sim_0^* x^2 = o_0(x) = o_0(\sin x)$, si ha $\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{x-x^2}{1-\cos x-3\sin x} = \lim_{x\longrightarrow 0}\frac{x}{-3\sin x} = -\frac{1}{3}$.

3.2.6 Funzioni iperboliche

Dopo aver reintrodotto nella Proposizione 3.2.10 il numero di Nepero con le corrispondenti funzioni esponenziale naturale e^x e logaritmo naturale $\log x := \log_e x$, è arrivato il momento giusto per completare l'elenco delle funzioni elementari introducendo le cosiddette "funzioni iperboliche": esse sono

$$\sinh x = \frac{e^x-e^{-x}}{2}, \qquad \cosh x = \frac{e^x+e^{-x}}{2},$$

dette rispettivamente *seno iperbolico* e *coseno iperbolico*. (Viene usata talvolta anche la *tangente iperbolica* $\operatorname{tgh} x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$.) Seno e coseno iperbolici sono funzioni con dominio $\mathbb{R}$, ed il loro nome è giustificato dal fatto che per ogni $x\in\mathbb{R}$ vale l'identità (verifica banale)

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1,$$

ovvero, il ruolo della circonferenza unitaria $x^2+y^2=1$ per le "funzioni circolari" sin e cos è svolto dall'iperbole equilatera $x^2-y^2=1$ per le "funzioni iperboliche" sinh e cosh. Le funzioni iperboliche hanno proprietà formali molto simili a quelle delle circolari, come ad esempio le seguenti formule di addizione-sottrazione e prostaferesi, di dimostrazione immediata:

$$\sinh(x_1\pm x_2) = \sinh x_1\cosh x_2 \pm \cosh x_1 \sinh x_2, \qquad \cosh(x_1\pm x_2) = \cosh x_1\cosh x_2 \pm \sinh x_1\sinh x_2;$$

$$\sinh x_1 + \sinh x_2 = 2\sinh\tfrac{x_1+x_2}{2}\cosh\tfrac{x_1-x_2}{2}, \qquad \cosh x_1 + \cosh x_2 = 2\cosh\tfrac{x_1+x_2}{2}\cosh\tfrac{x_1-x_2}{2}.$$

La funzione $\sinh:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ è ovviamente continua, dispari (cioè $\sinh(-x) = -\sinh x$ per ogni $x\in\mathbb{R}$, da cui $\sinh 0 = 0$) e strettamente crescente (basta usare l'identità $\sinh x_1 - \sinh x_2 = 2\cosh\frac{x_1+x_2}{2}\sinh\frac{x_1-x_2}{2}$) e suriettiva (infatti, $y=\sinh x$, calcolando, diventa $e^x -$

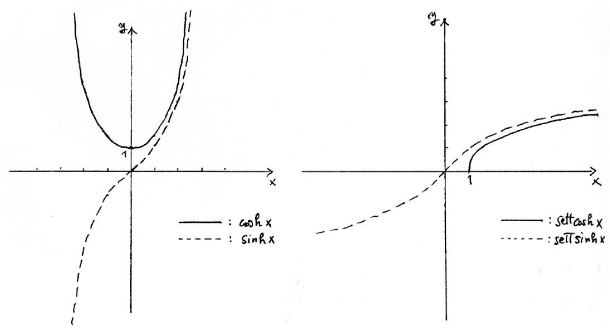

Figura 3.8: *Grafici del seno iperbolico* sinh, *del coseno iperbolico* cosh *e delle loro inverse* sett sinh *e* sett cosh.

$e^{-x} = 2y$ ovvero $e^{2x} - 2ye^x - 1 = 0$ ovvero $e^x = y \pm \sqrt{y^2+1}$, da cui $x = \log(y + \sqrt{y^2+1})$) e dunque è un omeomorfismo da $\mathbb{R}$ in sé; la sua inversa si chiama *settore seno iperbolico* o *arco-seno iperbolico* e si denota con sett sinh: come abbiamo appena calcolato, sarà dunque

$$\operatorname{sett\,sinh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad \operatorname{sett\,sinh}(x) = \log(x + \sqrt{x^2+1}).$$

Invece, la funzione $\cosh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, oltre che continua, è pari (cioè $\cosh(-x) = \cosh x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, con $\cosh 0 = 1$), strettamente crescente in $\mathbb{R}_{\geq 0}$ (basta usare l'identità $\cosh x_1 - \cosh x_2 = 2 \sinh \frac{x_1+x_2}{2} \sinh \frac{x_1-x_2}{2}$) e, se ristretta a $\mathbb{R}_{\geq 0}$, con immagine $\mathbb{R}_{\geq 1}$ (infatti $y = \cosh x > 0$, calcolando, diventa $e^x + e^{-x} = 2y$ ovvero $e^{2x} - 2ye^x + 1 = 0$ ovvero $e^x = y \pm \sqrt{y^2-1}$, che ha soluzione reale se e solo se $y \geq 1$, data da $x = \log(y + \sqrt{y^2-1})$); essa induce dunque un omeomorfismo da $\mathbb{R}_{\geq 0}$ in $\mathbb{R}_{\geq 1}$ e la sua inversa, detta *settore coseno iperbolico* o *arco-coseno iperbolico* e denotata $\operatorname{sett\,cosh} : \mathbb{R}_{\geq 1} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, sarà

$$\operatorname{sett\,cosh} : \mathbb{R}_{\geq 1} \to \mathbb{R}_{\geq 0}, \qquad \operatorname{sett\,cosh}(x) = \log(x + \sqrt{x^2-1}).$$

La Figura 3.8 mostra l'andamento del grafico delle funzioni iperboliche appena introdotte.