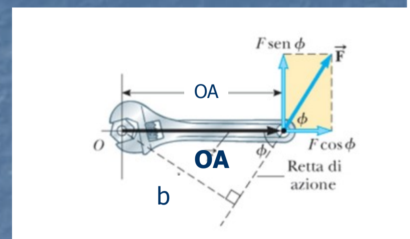
Statica e dinamica del corpo rigido

Corpo rigido= corpo esteso non deformabile.

Momento di una forza applicata in un punto A calcolato rispetto ad un punto (O):

$$\vec{M} = \vec{OA} \wedge \vec{F} \qquad |\vec{M}| = F \cdot OA \cdot sen\,\phi = Fb$$



Essendo b la distanza tra la retta d'azione di F e il punto O. b viene detto braccio della forza F rispetto al polo O.

Se F fosse parallela ad OA, la forza non produrrebbe alcuna rotazione del corpo.
O in maniera analoga, la componente di F perpendicolare ad **OA** produce la rotazione del corpo.

Unità di misura del momento: N*m (che coinciderebbe con Joule).
Nel caso del momento di una forza si scrive sempre N*m.

EdiSES

Statica e dinamica del corpo rigido

Equilibrio traslazionale (stessa condizione che per un punto materiale)

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots \vec{F}_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = 0$$

Questa condizione non assicura l'equilibrio (vedi forze parallele applicate ad un'asta rigida in grado di ruotare rispetto al punto O). Quindi occorre una seconda condizione:

$$\vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \dots \vec{M}_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_i = 0$$

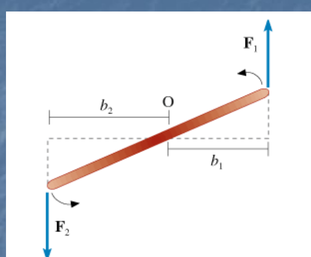


Figura 3.2
Pur essendo soddisfatta la condizione di equilibrio traslazionale $\mathbf{F}_1 = -\mathbf{F}_2$, l'asta possiede un momento diverso da zero:

$$M = F_1 b_1 + F_2 b_2$$

che ne causa la rotazione.

La risultante dei momenti delle forze applicate al corpo deve essere nulla rispetto ad un punto arbitrario O.

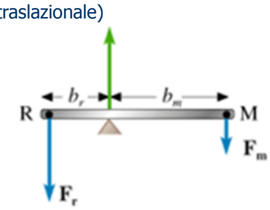
EdiSES

Statica e dinamica del corpo rigido

Corpo rigido vincolato in un punto: la reazione del vincolo bilancia le forze applicate (analogamente al piano che sostiene un corpo). Se un corpo è vincolato in un punto la condizione di equilibrio traslatorio è automaticamente soddisfatta. Quindi si applica la sola condizione di equilibrio rotazionale.

In particolare se un corpo è libero di ruotare intorno ad un asse fisso, condizione necessaria e sufficiente per l'equilibrio è che sia nulla la somma vettoriale delle proiezioni dei momenti sull'asse di rotazione delle forze applicate al corpo .

Forza vincolare (che chiaramente soddisfa la condizione di equilibrio traslazionale)



Leva: un asse rigido libero di ruotare intorno ad un punto detto fulcro che permette di equilibrare una forza F_r (detta resistente) applicata in un certo punto R con una forza F_m (detta motrice) applicata in un punto M.

Equilibrio: $b_m F_m - b_r F_r = 0$

Scannicchio – Fisica biomedica

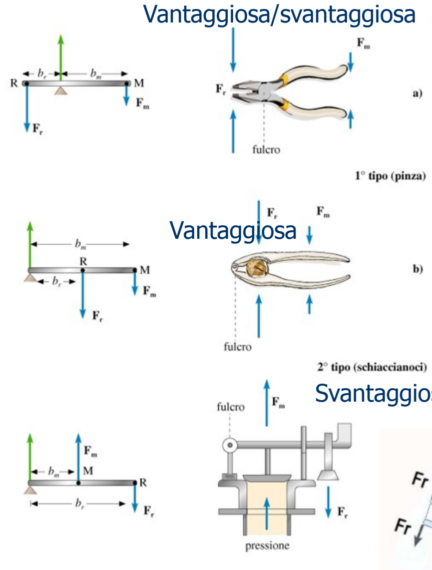
$b_m F_m = b_r F_r$

$G = \frac{F_r}{F_m} = \frac{b_m}{b_r}$

Vantaggiosa/svantaggiosa

Vantaggiosa

Svantaggiosa



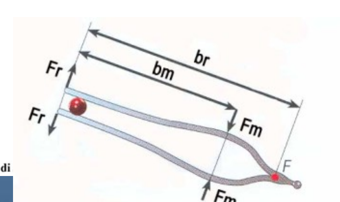


Figura 3.5
(a) Leva del 1° tipo: pinza. (b) Leva del 2° tipo: schiaccianoci. (c) Leva del 3° tipo: valvola di sicurezza. Per completezza, in questa e nelle successive Figure relative alle leve, viene rappresentata la forza di reazione vincolare applicata al fulcro che deve soddisfare l'equilibrio traslazionale del sistema.

3 tipi di leva

Statica e dinamica del corpo rigido

Bilancia

$$m_x g a = m_1 g b$$

$$m_x = m_1 \frac{b}{a}$$

Volendo essere meno sensibili a possibili piccole differenze fra la lunghezza dei due bracci:

$$m_x g b = m_2 g a$$

$$m_x = \sqrt{m_1 m_2}$$

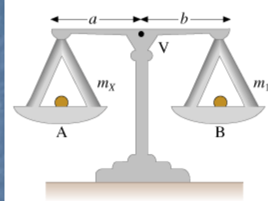


Figura 3.6
La bilancia: V è il fulcro dei due bracci di lunghezza *a* e *b* che sostengono i piattelli A e B su cui porre la massa incognita e la massa equilibratrice (costituita da masse tarate con precisione).

Scannicchio
Fisica Biomedica
EdiSES

EdiSES

Statica e dinamica del corpo rigido

Leve del corpo umano

Articolazione su cui poggia la testa è una leva di primo genere. Forza resistente=peso della testa. Forza motrice muscolatura tra la nuca e la base del collo.

Esempio: massa testa=8kg, peso=80 N. Distanza tra fulcro e baricentro testa 8 cm. Distanza tra fulcro e muscolatura 2 cm.

Per l'equilibrio: Fr*0.08=Fm*0.02
Fm=320 N;
Per tenere la testa in equilibrio, i muscoli devono sviluppare una forza di 320 N (equivalente al peso di una massa di 32 kg).

Leva svantaggiosa perché il braccio della forza motrice è minore del braccio della forza resistente.

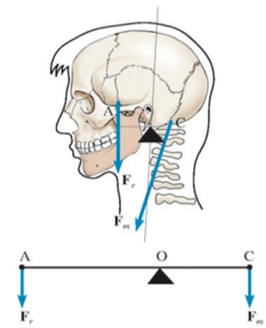


Figura 3.15
Leva di primo tipo: articolazione di appoggio della testa.

Scannicchio
Fisica biomedica
EdiSES

EdiSES

Statica e dinamica del corpo rigido

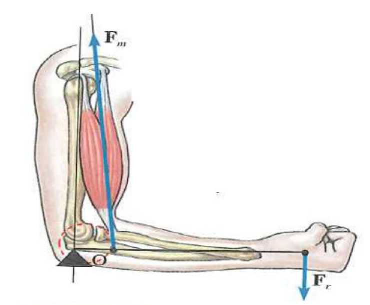


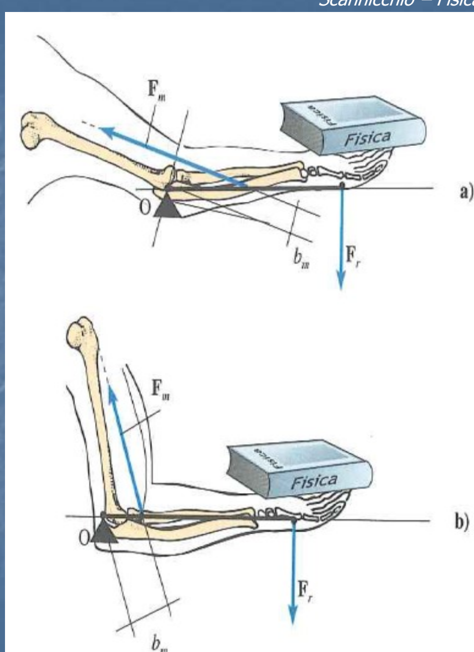
Figura 5.7
Leva di terzo tipo: articolazione del gomito.

Braccio e avambraccio costituiscono una leva del terzo tipo. F_r= forza peso dell'avambraccio e eventuale peso sostenuto dalla mano. Forza motrice è fornita dal bicipite.

E' piu faticoso sollevare dei pesi con il braccio disteso piuttosto che raccolto vicino al tronco.

EdiSES

Scannicchio – Fisica biomedica



Nei due casi (a disteso, b raccolto) l'equilibrio del sistema :

$$F_{m(a)}\, b_{m(a)} - F_r \cdot b_r = 0$$

$$F_{m(b)}\, b_{m(b)} - F_r \cdot b_r = 0$$

Da cui risulta:

$$\frac{F_{m(a)}}{F_{m(b)}} = \frac{b_{m(b)}}{b_{m(a)}},$$

Gli sforzi muscolari sono inversamente proporzionali ai rispettivi bracci.
Nel caso b il braccio è maggio

EdiSES

Statica e dinamica del corpo rigido

Centro di massa e baricentro

Consideriamo un sistema di n particelle, ciascuna di massa m_i e la cui posizione sia individuata dal vettore $\mathbf{r}_i$. Sia M la massa totale del sistema.
Def centro di massa del sistema **($\mathbf{r}_{CM}$) il** punto la cui posizione è :

$$M\,\mathbf{r}_{CM} = m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2 + m_3\mathbf{r}_3 + \cdots = \sum_i m_i\mathbf{r}_i.$$

Nel caso di due particelle:

$$\vec{r}_{CM} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2}$$

Due particelle lungo l'asse x:

$$x_{CM} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$$

EdiSES

Statica e dinamica del corpo rigido

Esempio: se abbiamo 2 masse uguali poste a distanza d:

$$m_1 = m_2 = m \qquad x_1 = 0 \qquad x_2 = d$$

$$\Rightarrow \quad x_{CM} = \frac{md}{2m} = \frac{d}{2}$$

Se una delle due masse è doppia dell'altra:

$$m_1 = 2m \qquad m_2 = m \qquad x_1 = 0 \qquad x_2 = d$$

$$x_{CM} = \frac{md}{3m} = \frac{d}{3}$$

Il centro di massa è più vicino alla massa più grande.

EdiSES

Statica e dinamica del corpo rigido

Baricentro il punto di applicazione della forza peso di un corpo.

Il baricentro è definito dalla relazione

$$Mg\ \mathbf{r}_B = m_1 g\ \mathbf{r}_1 + m_2 g\ \mathbf{r}_2 + m_3 g\ \mathbf{r}_3 + \cdots = \sum_i m_i g\ \mathbf{r}_i$$

Il baricentro coincide con il centro di massa se g=costante su tutto il corpo (condizione generalmente soddisfatta).

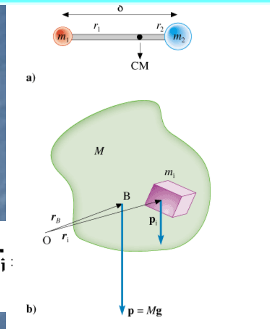


Figura 3.7
(a) Sistema a due corpi. **(b)** Sistema a molte particelle: un corpo di dimensioni finite può essere suddiviso in tante parti (cubetti elementari di massa m_i) su cui agisce la forza peso $\mathbf{p}_i$. La coordinata del baricentro si calcola utilizzando la relazione (3.13). La forza peso complessiva del corpo $\mathbf{p} = M\mathbf{g}$ viene applicata al baricentro B.

Scannicchio
Fisica Biomedica
EdiSES

Statica e dinamica del corpo rigido

Per capire come si muove il centro di massa, partiamo dalla definizione di centro di massa di un sistema di n particelle:

$$\vec{r}_{CM} = \frac{1}{M}\left(m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + \cdots\right) = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{r}_i$$

Per semplicità caso unidimensionale:

$$x_{CM} = \frac{1}{M}\left(m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 + \cdots\right) = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i x_i$$

$$M\frac{dx_{CM}}{dt} = m_1\frac{dx_1}{dt} + m_2\frac{dx_2}{dt} + m_3\frac{dx_3}{dt} + \cdots$$

$$M v_{CM} = m_1 v_1 + m_2 v_2 + m_3 v_3 + \cdots$$

Quantità di moto totale del sistema

La quantità di moto totale di un sistema= prodotto tra la M (massa totale) e la velocità del centro di massa o baricentro.

Statica e dinamica del corpo rigido

Derivando ancora rispetto a t la velocità del centro di massa:

$$M v_{CM} = m_1 v_1 + m_2 v_2 + m_3 v_3 + \dots$$

Otteniamo:

$$M a_{CM} = m_1 a_1 + m_2 a_2 + m_3 a_3 = \sum_{i=1}^{n} m_i a_i$$

$$M a_{CM} = \sum F_i$$

Il centro di massa di un sistema di particelle si muove come una unica particella di massa M e soggetta alle forze esterne (le forze interne a 2 a 2 si eliminano).

Statica e dinamica del corpo rigido

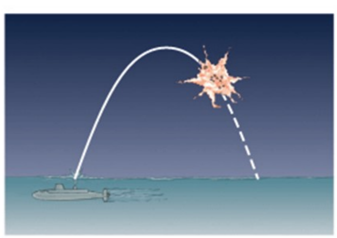


Figura 9.21 (Esempio concettuale 9.13) Quando un proiettile esplode in numerosi frammenti, il centro di massa del sistema costituito dai frammenti segue la stessa traiettoria parabolica che avrebbe seguito il proiettile se non fosse esploso.

Serway, Jewett
Fisica per scienze ed ingegneria
EdiSES

Statica e dinamica del corpo rigido

Momento angolare o momento della quantità di moto

Consideriamo una particella in moto su un piano e che la sua posizione sia individuata dal vettore **r**. Definiamo il momento angolare (o momento della quantità di moto) come:

$$\vec{l} = \vec{r} \wedge m\vec{v} = \vec{r} \wedge \vec{p}$$

Modulo: $m r v \,\text{sen}\,\phi$

Direzione perpendicolare al piano
Verso: mano destra.

Unità di misura $kg*m^2/s$

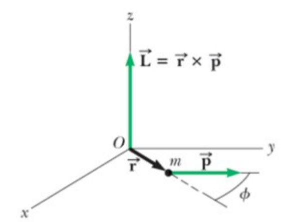


Figura 11.4 Il momento angolare $\vec{L}$ di un punto materiale con quantità di moto $\vec{p}$ che si trova in posizione $\vec{r}$ rispetto all'origine è il vettore $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$. Il modulo di $\vec{L}$ dipende dall'asse rispetto al quale è calcolato e il vettore è perpendicolare sia ad $\vec{r}$ che a $\vec{p}$.

Il momento angolare è diverso da zero solo se la particella si muove su una traiettoria curva (se si muovesse su una retta v sarebbe parallela a r e momento angolare sarebbe nullo).

EdiSES

Statica e dinamica del corpo rigido

Nel caso di un sistema di n particelle definiamo il momento angolare totale come:

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{n} \vec{l}_i = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \wedge \vec{p}_i$$

Se su ogni punto i agisce una forza Fi, il momento di ciascuna forza vale

$$\vec{r}_i \wedge \vec{F}_i$$

E il momento totale agente sul sistema vale:

$$\vec{M} = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \wedge \vec{F}_i$$

Si può dimostrare che:

$$\boxed{\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}}$$

(analoga alla legge 2 legge di Newton)

EdiSES

Statica e dinamica del corpo rigido

Conservazione del momento angolare

$$\text{se } \vec{M}=0 \quad \vec{L} = \text{cost}$$

Statica e dinamica del corpo rigido

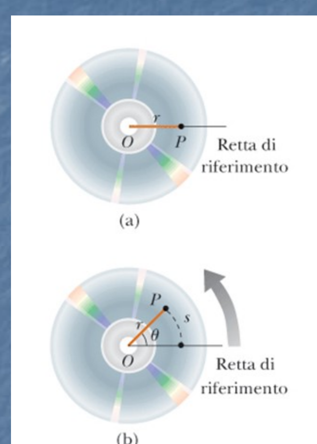
Consideriamo un corpo in rotazione intorno ad un'asse. Fissato un riferimento possiamo descrivere lo spostamento del corpo in un tempo Δt attraverso l'angolo spazzato dal raggio r:

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \qquad v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

$$\Delta s = r\,\Delta\theta \qquad v = r\,\omega$$

Si definisce l'accelerazione angolare α, come

$$\alpha_m = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \qquad \alpha_i = \frac{d\omega}{dt}.$$



Statica e dinamica del corpo rigido

Velocità angolare come vettore:

Modulo= ω

Direzione perpendicolare al piano individuato da **r** e **v**.

Verso: regola della mano destra.

$$\vec{v} = \vec{r} \wedge \vec{\omega}$$

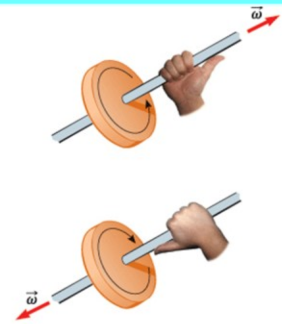


Figura 10.3 La regola della mano destra per determinare la direzione della velocità angolare.

Serway, Jewett
Fisica per scienze ed ingegneria
EdiSES

Infatti la velocità v vale ωr, è diretta perpendicolarmente ad un piano individuato da r e ω nel verso di percorrenza della circonferenza.

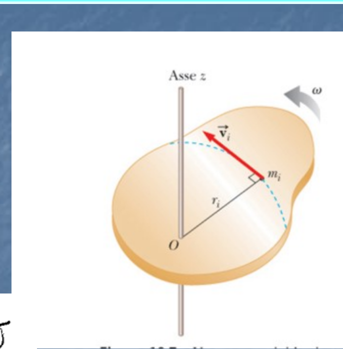
Statica e dinamica del corpo rigido

Momento di inerzia del corpo rigido

Supponiamo di avere un corpo in rotazione intorno ad un asse fisso con velocità ω.
Pensiamo di scomporlo in tante masse m_i.

$$\vec{l}_i = \vec{r}_i \wedge m_i \vec{v}_i = m_i \vec{r}_i \wedge \vec{v}_i$$

$$= m_i \vec{r}_i \wedge (\vec{r}_i \wedge \vec{\omega}) = m_i r_i^2 \omega$$



modulo

Tutti i punti hanno momento angolare nella stessa direzione

$$L = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 \omega = \left(\sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2\right) \omega = I \omega$$

I è detto momento di inerzia. Unità di misura kg*m2

Statica e dinamica del corpo rigido

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

$$M_z = \frac{dL}{dt} = I\frac{d\omega}{dt} = I\alpha$$

Analoga alla seconda legge di Newton per il corpo rigido.

Sempre considerando il corpo scomponibile nelle particelle che lo compongono si ricava l'energia cinetica di rotazione:

$$E_K = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i \omega^2 r_i^2 = \frac{1}{2}\omega^2 \sum_i m_i r_i^2 = \frac{1}{2} I\omega^2.$$

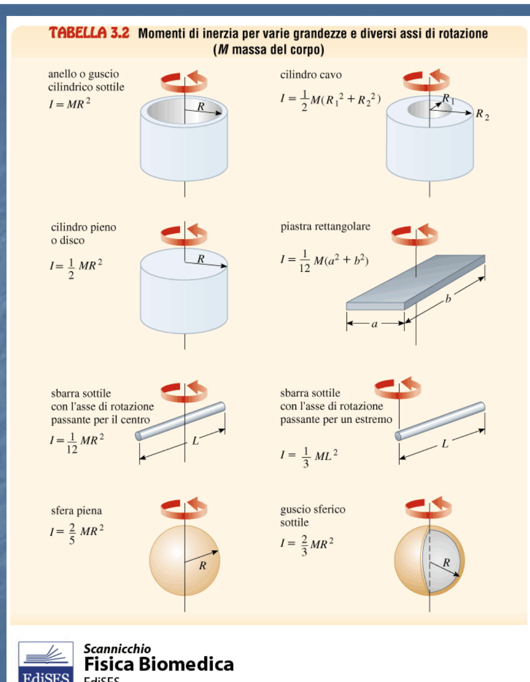


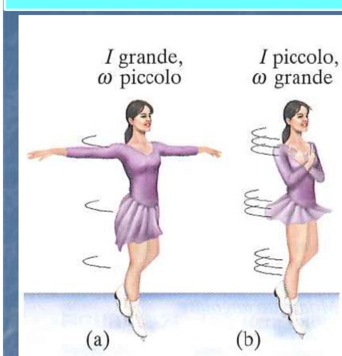
TABELLA 3.1 Analogia tra il moto di traslazione e il moto di rotazione

TRASLAZIONE	ROTAZIONE
Δs	$\Delta\theta$
v	$\boldsymbol{\omega} \rightarrow v = \boldsymbol{\omega} \wedge r$
a	$\boldsymbol{\alpha}$
$\mathbf{q} = m\,v$	$\mathbf{L} = \mathbf{r} \wedge mv = I\,\boldsymbol{\omega}$
$\mathbf{F}$	$\mathbf{M} = \mathbf{r} \wedge \mathbf{F}$
$\mathbf{F} = \frac{d\,\mathbf{q}}{dt}$	$\mathbf{M} = \frac{d\,\mathbf{L}}{dt}$
m	$I \rightarrow I = \sum_i m_i\, r_i^2$
$\mathbf{F} = m\mathbf{a}$	$\mathbf{M} = I\,\boldsymbol{\alpha}$
$\Delta\mathbf{q} = 0$	$\Delta\mathbf{L} = 0$
$E_K = \frac{1}{2}\,m\,v^2$	$E_K = \frac{1}{2}\,I\,\omega^2$

Scannicchio
Fisica Biomedica
EdiSES

EdiSES

Statica e dinamica del corpo rigido



Una pattinatrice artistica comincia a piroettare con una velocità angolare iniziale $\omega_1 = 3.5\ \pi$ rad s^{-1} tenendo le braccia distese. Quando ripiega le braccia, calcolare (1) la velocità angolare ω_2 e (2) la variazione relativa di energia cinetica, se il momento d'inerzia I_2 con le braccia piegate è il 60% di quello I_1 con le braccia distese.

$$I_1\omega_1 = I_2\omega_2,$$

$$\omega_2 = \frac{I_1}{I_2}\omega_1 = \frac{I_1}{0.6 I_1}\cdot 3.5\ \pi\ \text{rad s}^{-1} =$$

$$= 5.83\ \pi\ \text{rad s}^{-1}$$

Passa da 1.75 a 2.9 giri/s

$$\frac{\Delta E_K}{E_K} = \frac{E_{K2} - E_{K1}}{E_{K1}} = \frac{\frac{1}{2}I_2\omega_2^2 - \frac{1}{2}I_1\omega_1^2}{\frac{1}{2}I_1\omega_1^2} = \frac{\frac{1}{2}(0.6\ I_1)(5.83\pi)^2 - \frac{1}{2}I_1(3.5\pi)^2}{\frac{1}{2}I_1(3.5\pi)^2} = 0.665$$

Statica e dinamica del corpo rigido

ESEMPIO 8-11 Oggetto che ruota attaccato a una cordicella di lunghezza variabile. Una massa m, attaccata a un'estremità di una cordicella, ruota lungo una circonferenza sulla superficie di un tavolo priva di attrito. L'altro capo della cordicella passa attraverso un buco nel tavolo (fig. 8-26). Inizialmente, la massa ruota con una velocità $v_1 = 2.4$ m/s lungo una circonferenza di raggio $r_1 = 0.80$ m. La cordicella viene poi tirata lentamente attraverso il buco, in modo che il raggio sia ridotto a $r_2 = 0.48$ m. Qual è ora la velocità v_2 della massa?

$$I_1\omega_1 = I_2\omega_2.$$

Per la particella il momento di inerzia I=mr^2

$$mr_1^2\omega_1 = mr_2^2\omega_2,$$

$$\omega_2 = \omega_1\left(\frac{r_1^2}{r_2^2}\right).$$

$$v_2 = r_2\omega_2 = r_2\omega_1\left(\frac{r_1^2}{r_2^2}\right) = r_2\frac{v_1}{r_1}\left(\frac{r_1^2}{r_2^2}\right) = v_1\frac{r_1}{r_2}$$

$$= (2.4 \text{ m/s})\left(\frac{0.80 \text{ m}}{0.48 \text{ m}}\right) = 4.0 \text{ m/s}.$$

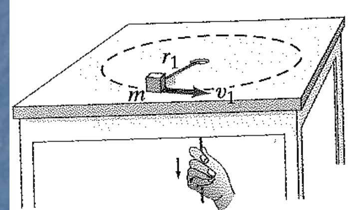


FIGURA 8-26 Esempio 8-11

EdiSES

Elasticità e legge di Hooke

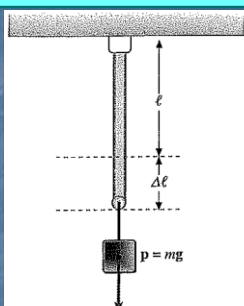


Figura 4.15
La forza applicata (sotto forma di forza peso p) allunga l'asta la cui lunghezza passa dal valore iniziale ℓ al valore finale ℓ +Δℓ. Se il materiale dell'asta si comporta in modo elastico, l'allungamento è proporzionale alla forza applicata.

Un corpo solido si definisce elastico se dopo una deformazione riprende la forma originale ; altrimenti si definisce plastico.

Sperimentalmente si osserva per i corpi elastici che la deformazione è proporzionale alla forza applicata (vedi legge di Hooke per la molla).

Nel caso di un corpo la legge di Hooke si scrive:

$$\frac{F}{A} = E\frac{\Delta\ell}{\ell},$$

E modulo di elasticità o modulo di Young espresso in N/m2. Maggiore è E, meno il corpo è deformabile.

TABELLA 4.3 Modulo di Young per diversi materiali

MATERIALE	E (N m^{-2})	MATERIALE	E (N m^{-2})
acciaio	$2 \cdot 10^{11}$	legno duro	$1 \cdot 10^{10}$
vetro	$7 \cdot 10^{10}$	tendine	$2 \cdot 10^{7}$
mattone	$2 \cdot 10^{10}$	cartilagine (costole)	$1.2 \cdot 10^{7}$
ossa (lungo l'asse) trazione	$1.8 \cdot 10^{10}$	gomma	$1 \cdot 10^{6}$
ossa (lungo l'asse) compressione	$0.9 \cdot 10^{10}$	vasi sanguigni	$2 \cdot 10^{5}$

Forze di attrito

In generale le forze di attrito si oppongono al moto. Nel moto di un corpo in un fluido generalmente la legge è quella riportata con f un coefficiente che dipende dalla geometri del corpo e dalle caratteristiche del mezzo.

$$\mathbf{F}_a = -f\,\mathbf{v},$$

Nel caso di un corpo in moto su una superficie distinguiamo forza di attrito statico e dinamico:

$$F_{as} = \mu_s N \qquad F_{ac} = \mu_c N$$

Vale che: $\mu_c < \mu_s$ Ci vuole più forza per mettere in moto un corpo che per mantenercelo .

EdiSES

Scannicchio – Fisica biomedica

TABELLA 3.3 Modulo di Young per diversi materiali

MATERIALE	E (N m^{-2})	MATERIALE	E (N m^{-2})
acciaio	$2 \cdot 10^{11}$	legno duro	$1 \cdot 10^{10}$
vetro	$7 \cdot 10^{10}$	tendine	$2 \cdot 10^{7}$
mattone	$2 \cdot 10^{10}$	cartilagine (costole)	$1.2 \cdot 10^{7}$
ossa (lungo l'asse) trazione	$1.8 \cdot 10^{10}$	gomma	$1 \cdot 10^{6}$
ossa (lungo l'asse) compressione	$0.9 \cdot 10^{10}$	vasi sanguigni	$2 \cdot 10^{5}$

EdiSES *Scannicchio* **Fisica Biomedica** EdiSES

EdiSES