INTUIZIONISMO

DOMANDA: COSA SIGNIFICA CHE A E' "VERA"?

$\Downarrow$

QUALI SONO I PRINCIPI INTUIZIONISTICAMENTE ACCETTABILI

BHK - INTERPRETATION

1. For atomic sentences, we assume that we know intrinsically what a proof is; for example, pencil and paper calculation serves as a proof of "$27 \times 37 = 999$".
2. A proof of $A \wedge B$ is a pair (p, q) consisting of a proof p of A and a proof q of B.
3. A proof of $A \vee B$ is a pair (i, p) with:
   - $i = 0$, and p is a proof of A, or
   - $i = 1$, and p is a proof of B.
4. A proof of $A \Rightarrow B$ is a function (COSTRUZIONE) f, which maps each proof p of A to a proof $f(p)$ of B.
5. In general, the negation $\neg A$ is treated as $A \Rightarrow \perp$ where $\perp$ is a sentence with no possible proof.
6. A proof of $\forall \xi. A$ is a function f, which maps each point a of the domain of definition to a proof $f(a)$ of $A[a/\xi]$.
7. A proof of $\exists \xi. A$ is a pair (a, p) where a is a point of the domain of definition and p is a proof of $A[a/\xi]$.

METODI E ENUNCIATI INTUIZIONISTICAMENTE ACCETTABILI

(con $x : A$ denoto x prova di A)

- $A \to A$

- $A \to (B \to A)$

  Sia $a : A$
  allora $b \mapsto a$ è una prova
  di $B \to A$
  e quindi $a \mapsto (b \mapsto a)$ è
  una prova di $A \to (B \to A)$

- $A \to A \vee B$

  Sia $a : A$ allora $in_1(a) : A \vee B$

  e $a \mapsto in_1(a) : A \to A \vee B$

- se $a : A \to D$ allora
  $b : B \to D$

  allora esiste una prova $c : A \vee B \to D$

  c è costruita così

  Sia $x : A \vee B$ allora

  - se $x = in_1(y)$ con $y : A$
    allora $a(y) : D$

  - se $x = in_2(z)$ con $z : B$
    allora $b(z) : D$

$c \equiv x \mapsto$ match x with

$in_1(u)$: $a(u)$ |

$in_2(u)$: $b(u)$

- Se $a : A \to D$

allora $\exists\, b$ $\quad b : A \to D \vee C$

ecc. . .

- $\bot \to A$ è "intuizionisticamente accettabile"

(perché ?)

$a : A \to B \qquad c : C \to D$

allora $\exists\, z \qquad z : (D \to A) \to (C \to B)$

sia $\quad d : D \to A$

allora $\quad a \circ d : D \to B$

sia $\; z : C \qquad$ allora $\quad c(z) : D$

e $\qquad z \mapsto (a \circ d)(c(z)) \; : \; C \to B$

UN PRINCIPIO
NON INTUIZIONISTICAM
ACCETTABILE (IN GENERALE)

$A \vee \sim A$

$\Downarrow$

NON E VERO
CHE PER OGNI
ASSERZIONE
DIMOSTRO A OPPURE
DIMOSTRO $\sim A$ $(A \to \bot)$

$\Downarrow$

IN PARTICOLARE

LK PROVA $\vdash A \vee \neg A$

QUINDI LA LOGICA
CLASSICA NON E' INTUIZIONIST.
ACCETTABILE

LK È INTUIZIONISTICAMENTE ACCETTABILE?

RISPOSTA NO!

Sia $\dfrac{\Pi}{\vdash A \vee B}$

SECONDO I PRINCIPI INTUIZIONISTI

Π deve essere ottenuta da

UNA DIM $\dfrac{\Pi_1}{\vdash A}$ OPPURE DA UNA

DIM $\dfrac{\Pi_2}{\vdash B}$

SIA p ATOMICA

E SIA $A \vee B \equiv p \vee \neg p$

ovviamente $\exists\ \Pi$ $\dfrac{\Pi}{\vdash p \vee \neg p}$

$$\boxed{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{p \vdash p}{\vdash p, \neg p}}{\vdash p \vee \neg p, \neg p}}{\vdash p \vee \neg p, p \vee \neg p}}{\vdash p \vee \neg p}}$$

MA ...

NON ESISTE Π_1 $\dfrac{\Pi_1}{\vdash p}$

E NON ESISTE Π_2 $\dfrac{\Pi_2}{\vdash \neg p}$

COME OTTENERE UNA LOGICA INTUIZIONISTA ?
(CITARE DED NATURALE ...)

$$\Gamma \vdash \underbrace{\alpha}$$

VUOTO UNA FORMULA

1) REGOLE LOGICHE

$$\frac{\Gamma_1, A \vdash \alpha \qquad \Gamma_2, B \vdash \alpha}{\Gamma_1, \Gamma_2, A \wedge B \vdash \alpha}$$

2) REGOLE STRUTT.

$$\frac{\Gamma \vdash}{\Gamma \vdash A}\ \vdash W$$

NESSUNA CONTRAZ. A DESTRA

LJ $\Rightarrow$ IL CALCOLO RISULTANTE

TEOREMA CUT ELIMIN. CONTINUA A VALERE

IN PARTICOLARE

TEO

1) se LJ dimostra $\vdash A \vee B$

allora LJ dimostra $\vdash A$ oppure
LJ dimostra $\vdash B$

(PROPRIETÀ DELLA DISGIUNZIONE)

2) se LJ dimostra $\vdash \exists x\, A$

allora $\exists t$ tale che

LJ dimostra $\vdash A[t]$

(PROPRIETÀ DEL TESTIMONE)

Il teorema NON VALE IN LK

ABBIAMO GIÀ PROVATO

CHE (1) NON VALE IN LK

MOSTRIAMO CHE (2)

NON È UN PRINCIPIO

UNIVERSALM. VALIDO PER LK

CONSIDERIAMO UN LINGUAGGIO

SENZA SIMBOLI DI FUNZIONE

E SENZA COSTANTI

SIA $P(x)$ ATOMICA

NOI SAPPIAMO CHE

$$LK \vdots \vdash \exists y ((\forall x \neg P(x)) \vee P(y))$$

SE VALESSE IL PRINCIPIO

ALLORA AVREMMO UNA DIM Π

DI $\vdash (\forall x \neg P(x)) \vee P(z)$

PER UNA qualche z

IMPOSSIBILE (si può dimostrare

semanticamente)

IN GENERALE

SE VALESSE IL PRINCIPIO DEL TESTIMONE

SIA P UNARIA ATOMICA

$LK: \vdash \forall x \neg P(x) \vee P(t) \quad (\exists x P(x) \to P(t))$

per un certo t

Sia $\mathfrak{A} = \{a, b\}$

$\rho : VAR \to |\mathfrak{A}|$

se $\rho(t) = a$

Sia $\mathfrak{A}(P) = \{b\}$

e si conclude

Sia $\mathfrak{A}$ t.c.

$$|\mathfrak{A}| = \{a, b\}$$

$$\mathfrak{A}(P) = \{a\}$$

SIA ρ t.c. $\rho(z) = b$

$$\mathfrak{A}, \rho \models \forall x \neg p(x) \vee p(z)$$

$$\iff$$

$\mathfrak{A}, \rho \models \forall x \neg p(x)$ OPPURE $\mathfrak{A}, \rho \models p(z)$

FATTO 1 $\mathfrak{A}, \rho \not\models P(z)$ INFATTI $\rho(z) \notin \mathfrak{A}(P)$

FATTO 2 $\mathfrak{A}, \rho \not\models \forall x \neg p(x)$

$$\mathfrak{A}, \rho \not\models \forall x \neg p(x) \iff$$

$\exists u \in |\mathfrak{A}|$ t.c. $\mathfrak{A}, \rho[x/u] \not\models \neg p(x)$

osserviamo che

$$\mathfrak{A}, \rho[x/a] \not\models \neg p(x)$$

(ovvero $\mathfrak{A}, \rho[x/a] \models p(x)$)

E CONCLUDIAMO

SE $LK: \vdash (\forall x \neg p(x)) \vee p(z)$

AVREMMO COME CONSEGUENZA

CHE $LK: \exists x\, p(x) \vdash \forall z\, p(z)$

INFATTI

$$\Pi' \quad \dfrac{\dfrac{\Pi}{\vdash (\forall x \neg p(x)) \vee p(z)} \qquad \dfrac{\forall x \neg p(x) \vdash \forall x \neg p(x) \qquad p(z) \vdash p(z)}{\forall x \neg p(x) \vee p(z) \vdash (\forall x \neg p(x)), p(z)}}{\vdash \forall x \neg p(x), p(z)}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Pi'}{\vdash \forall x \neg p(x), p(z)} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{p(x) \vdash p(x)}{p(x), \neg p(x) \vdash}}{p(x), \forall x \neg p(x) \vdash}}{\exists x\, p(x), \forall x \neg p(x) \vdash}}{\exists x\, p(x) \vdash p(z)}\ \text{CUT}}{\exists x\, p(x) \vdash \forall z\, p(z)}$$

PROPOSIZIONE

Sia p ATOMICA

ALLORA LJ NON PROVA $\vdash p$

E NON PROVA $\vdash \neg p$

DIMOSTRIAMO CHE LJ NON PROVA $\vdash A \vee \neg A$

RICORDATE CHE
$A \vee \neg A$ NON È UN
PRINCIPIO INTUIZIONISTICAMENTE
ACCETTABILE (PER OGNI A!!!)

INFATTI SE $\exists \Pi_{LJ} \; \dfrac{\Pi}{\vdash A \vee \neg A}$

IN PARTICOLARE $\exists \Pi \; \dfrac{\Pi}{\vdash p \vee \neg p}$ CON p ATOM.

E PER LA PROPR. DELLA DISG.

$\exists \Pi_1 \; \dfrac{\Pi_1}{\vdash p}$ OPPURE $\exists \Pi_2 \; \dfrac{\Pi_2}{\vdash \neg p}$

IMPOSSIBILE

E QUINDI <u>NON</u> $\exists \Pi \; \dfrac{\Pi}{\vdash p \vee \neg p}$

(QUESTO RAGIONAMENTO È A SUA VOLTA INTUIZIONISTICAMENTE ACCETTABILE!)

MOSTRIAMO CHE

LJ NON PROVA

$$B \equiv \exists y\, ((\forall x\, \neg A(x)) \vee A(y))$$

SUPPONIAMO A ATOMICA

SE $\exists \Pi$ $\overset{\Pi}{\vdash B}$

ALLORA

$\exists \Pi'$ $\overset{\Pi'}{\vdash (\forall x \neg A(x)) \vee A(t)}$

E QUINDI

$\exists \tilde{\Pi}$ $\overset{\tilde{\Pi}}{\vdash \forall x \neg A(x)}$

OPPURE

$\exists \check{\Pi}$ $\vdash A(t)$

MA
$$\frac{\neg A(\bar{t}) \vdash \neg A(\bar{t})}{\forall x \neg A(x) \vdash \neg A(\bar{t})}$$

QUINDI

$\exists \tilde{\tilde{\Pi}}$ $\overset{\tilde{\tilde{\Pi}}}{\vdash \neg A(\bar{t})}$ oppure $\exists \check{\Pi}$ $\overset{\check{\Pi}}{\vdash A(t)}$

IMPOSSIBILE IN QUANTO A È ATOMICA

CVD

[NOTA QUESTA DIM È INTUIZ ACCETTABILE]

ATTENZIONE

DIRE CHE UNA CERTO SCHEMA A NON È INTUIZIONISTICAMENTE ACCETTABILE SIGNIFICA CHE ALMENO UNA SUA ISTANZA NON È DIMOSTRABILE.

AD ESEMPIO

IN LJ NON È DIMOSTR. LO "SCHEMA"

$$\vdash A \vee \neg A$$

MA AD ESEMPIO SE $A = B \to B$

ALLORA $LJ: \vdash (B \to B) \vee \neg (B \to B)$

UN'ALTRA LEGGE NON INTUIZ. ACCETTABILE

LA LEGGE DI PIERCE IN $\boxed{LK}$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \vdash A \qquad \dfrac{\dfrac{A \vdash A}{A \vdash B, A}}{\vdash A \to B, A}}{(A \to B) \to A \ \vdash A, A}}{(A \to B) \to A \ \vdash A}}{\vdash ((A \to B) \to A) \to A}$$

!!!

PASSO NON INTUIZ ACCETTA

$(A \to B) \vee A$

$\nvdash A \to B$

$\nvdash A$

$\left.\begin{matrix} \\ \\ \end{matrix}\right\}$ A ATOM, $B = \bot$

$\downarrow$

$C \wedge \neg C$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \vdash A \qquad \dfrac{\dfrac{A \vdash A}{A \vdash B, A}}{\vdash A \to B, A}}{(A \to B) \to A \ \vdash A, A}}{(A \to B) \to A, (A \to B) \to A \ \vdash A, A}}{(A \to B) \to A \ \vdash ((A \to B) \to A) \to A, A}}{\vdash ((A \to B) \to A) \to A, ((A \to B) \to A) \to A}}{\vdash ((A \to B) \to A) \to A}$$