Matematica e Statistica

Prova d'Esame Straordinaria e Seconda Prova Parziale (20/01/2010)

Università di Verona - Laurea in Biotecnologie - A.A. 2009/10

Tema A

Matematica e Statistica

Prova d'Esame Straordinaria e IIa Prova Parziale di $\boxed{\text{MATEMATICA}}$ (20/01/2010)

Università di Verona - Laurea in Biotecnologie - A.A. 2009/10

Cognome-Nome ____ Matr. _______________
IN STAMPATELLO

Questa prova viene svolta come:	☐ Esa = Esame Scritto	☐ 2pp = IIa Prova Parziale

Tema A

(1) $\boxed{\text{Esa}}$ Dati i tre vettori $\vec{u} = (1, 3, -2)$, $\vec{v} = (0, -1, 1)$ e $\vec{w} = (2, 0, -1)$, calcolare il volume del parallelepipedo tra essi compreso, e decomporre $\vec{v}$ nelle direzioni parallela e ortogonale a $\vec{u}$. Determinare poi (in forma parametrica e cartesiana) il piano Π passante per $A(-2, 1, 4)$ e ortogonale a $\vec{w}$, e la retta r passante per A e parallela a $\vec{v}$.

(2) $\boxed{\text{Esa}}$ Studiare l'andamento di $f(x) = \dfrac{1 + \log|x|}{(1 + x)^2}$, e tracciarne il grafico[(1)].

(3) (a) $\boxed{\text{Esa}}$ $\boxed{\text{2pp}}$ Calcolare $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{\sin x + \sin 2x}{1 + \cos^2 x}\,dx$ e $\displaystyle\int f(x)\,dx$ (ove f è quella dell'Ex. 2).

(b) $\boxed{\text{Esa}}$ $\boxed{\text{2pp}}$ Disegnare $S = \{(x, y) : |x-1| \le y \le 1 + \operatorname{arctg} x\,,\ \sqrt{x+2} \le 4 - x\}$, e calcolarne l'area.

(4) (a) $\boxed{\text{Esa}}$ $\boxed{\text{2pp}}$ Data $g(x, y) = \sqrt{y - x^2 - 2x} - y$, determinarne dominio, zeri e segno, disegnando i risultati. Trovare i punti stazionari, e cercare eventuali punti di estremo locale.

(b) $\boxed{\text{2pp}}$ Disegnare il segmento $I = \{(-2t, 1 + t) : 0 \le t \le 1\}$, e dire perché g ammette massimo e minimo assoluti su I; calcolare quindi tali estremi di g su I. Giustificare poi geometricamente i risultati, descrivendo le curve di livello di g.

(5) (a) $\boxed{\text{Esa}}$ $\boxed{\text{2pp}}$ Trovare tutte le soluzioni $y(x)$ dell'equazione differenziale $y'' + 4y = 8x + 5e^x$ tali che $y(0) = -1$. Stessa domanda per l'equazione differenziale $2(x + 1)yy' = 3 - x$; qualcuna delle soluzioni trovate appare già tra le precedenti?

(b) $\boxed{\text{2pp}}$ Studiare a priori la crescenza e convessità delle soluzioni $y(x)$ dell'equazione differenziale $xy' = x^3 - y$, e determinarne la soluzione che ha un estremo locale per $x = 1$. Tale estremo locale è un massimo o un minimo?

---

(1) Nello studio della derivata prima sarà utile un confronto grafico; si può tralasciare la derivata seconda.

Matematica e Statistica

Prova d'Esame Straordinaria e IIa Prova Parziale di STATISTICA (20/01/2010)

Università di Verona - Laurea in Biotecnologie - A.A. 2009/10

Cognome-Nome ______________________________ Matr. ______________
IN STAMPATELLO

Questa prova viene svolta come: ☐ Esa = Prova d'Esame ☐ 2pp = IIa Prova Parziale

Tema A

Per ogni calcolo effettuato scrivere anche la formula teorica da utilizzare

1. Esa 2pp **(per tutti gli esaminandi)**

Uno studio sulla relazione fra la quantità di pesticidi utilizzati in una coltura (X) e il numero di parassiti che hanno sviluppato una resistenza genetica al trattamento (Y) ha portato ai seguenti risultati:

X	**Y**
1	9
5	17
7	29
12	42

Interpolare i due fenomeni con una retta $Y' = a + bX$, calcolando:
(a) i parametri a e b della retta;
(b) il coefficiente di correlazione lineare, commentandolo brevemente;
(c) giudicare la bontà di accostamento del modello teorico.

2. Esa **(solo per chi sostiene la Prova d'Esame Straordinaria)**

X	**frequenza**
2	55
9	30
11	100
16	15

Sulla distribuzione di frequenze presentata in tabella, calcolare:
(a) la media aritmetica e la media quadratica;
(b) la mediana e la moda;
(c) il 1° e il 3° quartile.

3. Esa **(solo per chi sostiene la Prova d'Esame Straordinaria)**

Sulla distribuzione di frequenze presentata nella tabella precedente, calcolare:
(a) il range e la differenza interquartile;
(b) la varianza;
(c) lo scarto quadratico medio;
(d) il coefficiente di variazione.

Tema A - **Soluzioni.**

MATEMATICA

(1) Il volume del parallelepipedo compreso tra i tre vettori $\vec{u} = (1, 3, -2)$, $\vec{v} = (0, -1, 1)$ e $\vec{w} = (2, 0, -1)$ è dato dal valore assoluto del loro prodotto misto (il determinante della matrice fatta con le coordinate), che dà 3. La componente di $\vec{v}$ parallela a $\vec{u}$ è $\vec{v}_1 = \frac{\vec{v}\cdot\vec{u}}{\vec{u}\cdot\vec{u}}\vec{u} = \frac{-5}{14}(1, 3, -2) = (-\frac{5}{14}, -\frac{15}{14}, \frac{5}{7})$, mentre quella ortogonale è $\vec{v}_2 = \vec{v} - \vec{v}_1 = (\frac{5}{14}, \frac{1}{14}, \frac{2}{7})$ (si noti infatti che $\vec{v}_2 \cdot \vec{u} = 0$). Il piano Π, ortogonale a $\vec{w}$, deve avere equazione cartesiana del tipo $2x - z + k = 0$, e il passaggio per $A(-2, 1, 4)$ dà $k = 8$; per una forma cartesiana, due vettori ortogonali a $\vec{w}$ (dunque paralleli a Π) e non paralleli tra loro sono $\vec{a}_1 = (1, 0, 2)$ e $\vec{a}_2 = (0, 1, 0)$, da cui $\Pi = \{(-2, 1, 4) + \alpha(1, 0, 2) + \beta(0, 1, 0) : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} = \{(-2+\alpha, 1+\beta, 4+2\alpha) : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$. Infine, una forma parametrica per la retta r passante per A e parallela a $\vec{v}$ è $r = \{(-2, 1, 4) + \alpha(0, -1, 1) : \alpha \in \mathbb{R}\} = \{(-2, 1-\alpha, 4+\alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\}$; da $z = 4 + \alpha$ si ricava $\alpha = z - 4$, che messo in $x = -2$ e $y = 1 - \alpha$ dà $x = -2$ e $y + z = 5$, il cui sistema dà una forma cartesiana per r.

(2) (Vedi Figura 1) Il dominio di $f(x) = \frac{1+\log|x|}{(1+x)^2}$ è dato da $x \neq -1$ e $x \neq 0$; in esso la funzione è derivabile infinite volte. Si ha $f(x) \geq 0$ quando $\log|x| \geq -1$, ovvero $|x| \geq \frac{1}{e}$, ovvero $x \leq -\frac{1}{e}$ oppure $x \geq \frac{1}{e}$. I limiti interessanti sono $\lim_{x\to-1} f(x) = +\infty$ (determinato), $\lim_{x\to0} f(x) = -\infty$ (determinato) e $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0^+$ (in forma indeterminata, ma basta usare de l'Hôpital o i limiti notevoli): dunque si hanno due asintoti verticali (bilateri) in $x = -1$ e $x = 0$, e un asintoto orizzontale (bilatero) in $y = 0$. Derivando, dopo qualche calcolo si ottiene $f'(x) = \frac{\frac{1-x}{x} - 2\log|x|}{(1+x)^3}$. Si ha $f'(x) = 0$ quando $\frac{1-x}{2x} = \log|x|$, e un confronto grafico tra le due funzioni (un'omografica e il logaritmo simmetrizzato) mostra che ciò avviene solo per $x = 1$. Quanto al segno, il numeratore è positivo quando $\frac{1-x}{2x} > \log|x|$ (vero solo per $0 < x < 1$), il denominatore quando $x > -1$, dunque vale $f'(x) > 0$ per $x < -1$ o per $0 < x < 1$: ne ricaviamo che $x = 1$ è punto di massimo locale, con $f(1) = \frac{1}{4}$. Infine, derivando ancora, dopo calcoli si ottiene $f''(x) = \frac{6\log|x| + \frac{x^2-6x-1}{x^2}}{(1+x)^4}$: vale dunque $f''(x) \geq 0$ quando $\log|x| \geq -\frac{x^2-6x-1}{6x^2}$, e un altro confronto grafico mostra, come atteso, l'esistenza di due flessi, uno tra -1 e 0, l'altro tra 1 e 2.

(3) (a) Posto $\cos x = t$ (da cui $-\sin x\,dx = dt$) e ricordando che $\sin 2x = 2\sin x\cos x$ si ottiene $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{\sin x + \sin 2x}{1+\cos^2 x}\,dx = -\int_0^1 \frac{1+2t}{1+t^2}\,dt = -(\operatorname{arctg} t + \log(1+t^2)]_0^1 = -(\frac{\pi}{4} + \log 2) + (0) = -(\frac{\pi}{4} + \log 2) \sim -1{,}45$. • Integrando per parti si ha $\int f(x)\,dx = \int \frac{1}{(1+x)^2}(1+\log|x|)\,dx = (-\frac{1}{1+x})(1+\log|x|) - \int \frac{1}{x}(-\frac{1}{1+x})\,dx = -\frac{1+\log|x|}{1+x} + \log|\frac{x}{1+x}| + k$.

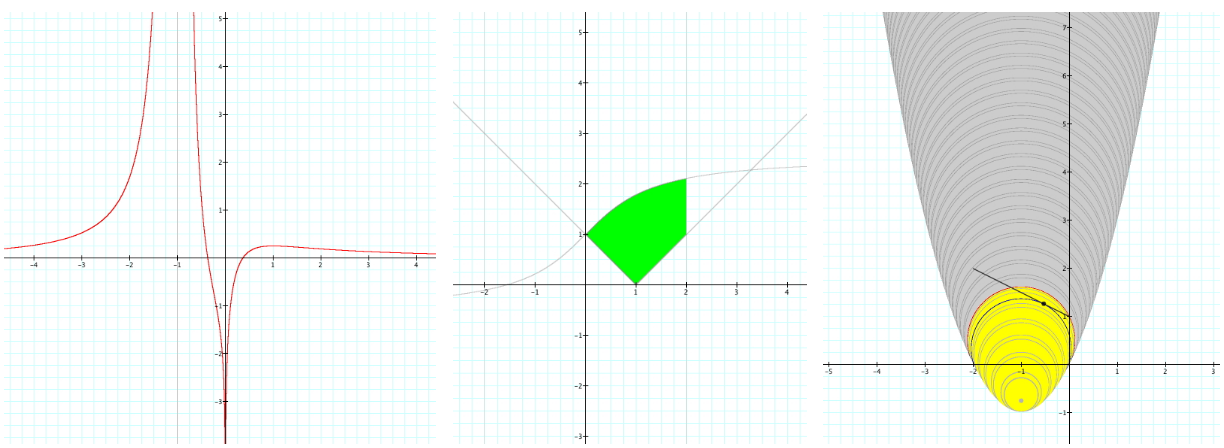
(b) (Vedi Figura 2) L'insieme $S = \{(x, y) : |x-1| \leq y \leq 1 + \operatorname{arctg} x,\ \sqrt{x+2} \leq 4 - x\}$ è rappresentato in figura (si noti che $\sqrt{x+2} \leq 4 - x$ richiede che $x \geq -2$ e $x \leq 4$, e in tali ipotesi equivale a $x + 2 \leq (4-x)^2$, ovvero $x^2 - 9x + 14 = 0$, che dà $x \leq 2$ oppure $x \geq 7$: si ottiene dunque $-2 \leq x \leq 2$). L'area di S risulta pertanto $\int_0^2 (1 + \operatorname{arctg} x)\,dx + \int_2^1 (x-1)\,dx + \int_1^0 (1-x)\,dx = (x + x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\log(1+x^2)]_0^2 + (\frac{1}{2}x^2 - x]_2^1 + (x - \frac{1}{2}x^2]_1^0 = (2 + 2\operatorname{arctg} 2 - \frac{1}{2}\log 5) - (0) + (-\frac{1}{2}) - (0) + (0) - (\frac{1}{2}) = 1 + 2\operatorname{arctg} 2 - \frac{1}{2}\log 5 \sim 2{,}4$.

(4) (a) (Vedi Figura 3) Il dominio di $g(x, y) = \sqrt{y - x^2 - 2x} - y$ è dato da $y \geq x^2 + 2x$ (punti interni alla parabola, compresa). Si ha $g(x, y) = 0$ quando $\sqrt{y - x^2 - 2x} = y$, che nel dominio e nell'ipotesi $y \geq 0$ equivale a $y - x^2 - 2x = y^2$, ovvero $x^2 + y^2 + 2x - y = 0$ (circonferenza di centro $(-1, \frac{1}{2})$ e passante per l'origine, dunque il suo pezzo dall'asse x in su); vale poi $g(x, y) > 0$ quando $\sqrt{y - x^2 - 2x} > y$, che nel dominio è sempre vera se $y < 0$, mentre se $y \geq 0$ equivale a $y - x^2 - 2x > y^2$, ovvero ovvero $x^2 + y^2 + 2x - y < 0$ (punti interni alla circonferenza). Le derivate parziali sono $\frac{\partial g}{\partial x} = -\frac{x+1}{\sqrt{y-x^2-2x}}$ e $\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{y-x^2-2x}} - 1$, dunque il sistema $\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial y} = 0$ dà l'unico punto stazionario $P(-1, -\frac{3}{4})$, che il criterio dell'hessiano rivela essere di massimo (infatti, a conti fatti, $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(P) = \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(P) = -2$ e $\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(P) = 0$).

(b) (Vedi Figura 3) Il segmento $I = \{(-2t, 1+t) : 0 \leq t \leq 1\}$ (di estremi $Q(0, 1)$ e $R(-2, 2)$) è un compatto (chiuso e limitato) interamente contenuto nel dominio di g, che è continua: dunque g ammette massimo e minimo assoluti su I in base a Weierstrass. Negli estremi si ha $g(Q) = 0$ e $g(R) = \sqrt{2} - 2 \sim -0{,}6$; nei punti interni si ha poi $\varphi(t) := g(-2t, 1+t) = \sqrt{1 + 5t - 4t^2} - t - 1$ con $0 < t < 1$, la cui derivata $\varphi'(t) = \frac{5-8t}{2\sqrt{1+5t-4t^2}} - 1$ si annulla solo per $t = \frac{25-\sqrt{205}}{40} \sim 0,27$: si trova dunque il punto $T(-\frac{25-\sqrt{205}}{20}, \frac{65-\sqrt{205}}{40})$, nel quale g è positiva (vale $g(T) = \frac{\sqrt{205}-13}{8} \sim 0{,}17$). È dunque chiaro che il massimo assoluto di g su I è assunto in T, e il minimo assoluto in R. In effetti, le curve di livello di $g(x,y)=k$ sono i pezzi delle circonferenze $x^2+y^2+2x+(2k-1)y+k^2=0$ (di centro $(-1,-k+\frac{1}{2})$ e raggio $\sqrt{(-1)^2+(-k+\frac{1}{2})^2-k^2}=\sqrt{\frac{5}{4}-k}$) sopra la retta $y=-k$, dunque quando k è sempre più negativo si tratta di pezzi di circonferenza (contenuti nel dominio) sempre più in alto e più grandi, mentre per k positivo si può arrivare fino al valore $k=\frac{5}{4}$ in cui la circonferenza si riduce a un punto, che guarda caso è proprio il nostro P. Questi ragionamenti sulla struttura delle curve di livello, oltre a spiegare i risultati appena ottenuti (vedi figura), mostrano anche che P è in realtà punto di massimo assoluto per g (con valore $\frac{5}{4}$), e che il limite di g in ∞_2 (l'unico limite interessante in verità) vale $-\infty$.

(5) (a) L'equazione differenziale $y''+4y=8x+5e^x$ è del secondo ordine a coefficienti costanti. L'equazione caratteristica $t^2+4=0$ ha radici $\pm 2i$, dunque lo spazio delle soluzioni dell'omogenea associata è dato da $y=A\cos 2x+B\sin 2x$, con $A,B\in\mathbb{R}$ qualsiasi. Per la soluzione particolare, sfruttando il principio di sovrapposizione per $b_1(x)=8x$, $b_2(x)=5e^x$ si trova $\tilde{y}_1(x)=2x$ e $\tilde{y}_2(x)=e^x$, da cui l'integrale generale $y(x)=A\cos 2x+B\sin 2x+2x+e^x$, con $A,B\in\mathbb{R}$ qualsiasi. La condizione $y(0)=-1$ dà $-1=A+1$, ovvero $A=-2$, dunque le soluzioni cercate sono quelle del tipo $y(x)=-2\cos 2x+B\sin 2x+2x+e^x$ con $B\in\mathbb{R}$ qualsiasi. • L'equazione differenziale $2(x+1)yy'=3-x$ è a variabili separabili: separandole si ha $2y\,dy=\frac{3-x}{x+1}\,dx$, integrando per $x>-1$ si ottiene $y^2=4\log(x+1)-x+k$, e imponendo che $y(0)=-1$ si ottiene $k=1$; infine, ricavando $y(x)$ e tenendo ancora conto della condizione iniziale si ricava $y(x)=-\sqrt{4\log(x+1)-x+1}$, che non ha nulla a che vedere con le precedenti.

(b) L'equazione differenziale $xy'=x^3-y$ è lineare del primo ordine. Se $x=0$ si ottiene $y(0)=0$, dunque un'eventuale soluzione definita in $x=0$ deve necessariamente annullarsi in tal punto; altrimenti si ottiene $y'=\frac{x^3-y}{x}$, dunque per $x\gtrless 0$ le soluzioni sono crescenti sotto/sopra la cubica $y=x^3$. Derivando ambo i membri rispetto x si ottiene $y''=\frac{(3x^2-y')x-(x^3-y)1}{x^2}$ da cui, sostituendo $xy'=x^3-y$, si ha $y''=\frac{x^3+2y}{x^2}$: dunque le soluzioni saranno convesse sopra la cubica $y=-\frac{1}{2}x^3$. Passiamo ora alla risoluzione (per $x>0$, visto ciò che dopo chiede il problema) dell'equazione, che per $x\neq 0$ è nella forma canonica $y'+p(x)\,y=q(x)$ con $p(x)=\frac{1}{x}$ e $q(x)=x^2$: poiché una primitiva di $p(x)$ è $P(x)=\log x$, e $\int e^{P(x)}q(x)\,dx=\int x^3\,dx=\frac{1}{4}x^4$, si hanno le soluzioni $y(x)=\frac{1}{x}(\frac{1}{4}x^4+k)=\frac{1}{4}x^3+\frac{k}{x}$ con $k\in\mathbb{R}$. Derivando si ha $y'=\frac{3}{4}x^2-\frac{k}{x^2}$, e imponendo che $y'(1)=0$ si ricava $k=\frac{3}{4}$; derivando ancora la soluzione trovata si ha $y''=\frac{3}{2}(x+\frac{1}{x^3})$, ed essendo $y''(1)=3>0$ si nota che il punto stazionario $x=1$ è di minimo locale stretto.



1. Il grafico della funzione dell'ex. 2. **2.** L'insieme dell'ex. (3.b). **3.** Dominio (parte colorata), zeri (rosso), segno positivo (giallo) e negativo (grigio) della funzione f dell'ex. 4; il segmento I (nero), e alcune curve di livello di g.

ESERCIZIO 1

X	Y	X * Y	X^2	Y^2
1	9	9	1	81
5	17	85	25	289
7	29	203	49	841
12	42	504	144	1764
25	**97**	**801**	**219**	**2975**

Sui dati presentati in tabella calcolare:
a) i parametri della retta interpolante Y'=a+bX ;
b) il coefficiente di correlazione lineare, commentandolo brevemente;
c) giudicare la bontà di accostamento del modello teorico.

a) Calcolo dei parametri della retta interpolante Y'=a+bX :

Calcolo attraverso le formule dirette (ma si poteva anche sviluppare il sistema):

$$b = \frac{Cov(X;Y)}{V(X)} \qquad a = M(Y) - bM(X)$$

$$M(X) = \frac{25}{4} = \mathbf{6{,}25}$$

$$M(Y) = \frac{97}{4} = \mathbf{24{,}25}$$

$$Cov(X;Y) = M(X*Y) - M(X)*M(Y) = \frac{801}{4} - 6{,}25 * 24{,}25 = \mathbf{48{,}6875}$$

$$V(X) = M(X^2) - M(X)^2 = \frac{219}{4} - 6{,}25\text{^}2 = \mathbf{15{,}6875}$$

$$\mathbf{b =} \frac{Cov(X;Y)}{V(X)} = \frac{48{,}6875}{15{,}6875} = \mathbf{3{,}1036}$$

$$\mathbf{a =} \quad M(Y) - bM(X) = 24{,}25 - 3{,}1036*6{,}25 = \mathbf{4{,}8526}$$

b) Calcolo del coefficiente di correlazione lineare e suo breve commento:

$$r = \frac{Cov(X;Y)}{\sigma(X)\,\sigma(Y)}$$

$$V(Y) = \frac{2975}{4} - 24{,}25\text{^}2 = \mathbf{155{,}6875}$$

$\sigma(Y) =$ RADQ(155,6875) = **12,4775**

$\sigma(X) =$ RADQ(15,6875) = **3,9607**

$$r = \frac{48,6875}{3,9607 * 12,4775} = \mathbf{0,9852}$$ **Si registra una forte relazione lineare diretta**

c) Giudicare la bontà di accostamento del modello teorico:

Calcolo il coefficiente di determinazione r^2

$r^2 = 0,9852^2 =$ **0,9706** **Il modello teorico riesce a spiegare quasi completamente le variazioni di Y**

ESERCIZIO 2

Sulla distribuzione di frequenze presentata in tabella, calcolare:
a) la media aritmetica e la media quadratica;
b) la mediana e la moda;
c) il 1° e il 3° quartile.

x	f	x*f	x^2	x^2*f
2	55	110	4	220
9	30	270	81	2430
11	100	1100	121	12100
16	15	240	256	3840
	200	**1720**		**18590**

a) Calcolo della media aritmetica e della media quadratica:

$$M(x) = \frac{\Sigma\, x * f}{\Sigma\, f} = \frac{1720}{200} = \mathbf{8,6}$$

$$M_2(x) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i f_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i}} = \text{RADQ}\left(\frac{18590}{200}\right) = \mathbf{9,64}$$

b) Calcolo della mediana e della moda:

x100 =< mediana =< x101 : **me = 11**

moda = 11

c) Calcolo del 1°e del 3°quartile:

Q1= x50 = **2**
Q3= x150 = **11**

ESERCIZIO 3

Sulla distribuzione di frequenze presentata nella tabella precedente, calcolare:
a) il range e la differenza interquartile;
b) la varianza;
c) lo scarto quadratico medio;
d) il coefficiente di variazione.

a) Calcolo del range e della differenza interquartile:

Range = X_{Max}-X_{min}= 16 - 2 = **14**

Diff interq= Q3 - Q1 = 11 - 2 = **9**

b) Calcolo della varianza (ad esempio usando il secondo metodo):

$$\mathbf{V(x)} = M(x^2) - m^2 = \frac{18590}{200} - 8{,}6^2 = 92{,}95 - 73{,}96 = \mathbf{18{,}99}$$

c) Calcolo dello scarto quadratico medio:

Calcolo la radice quadrata della V(x):
σ(x) = RADQ(18,99) = **4,3578**

d) Calcolo del coefficiente di variazione:

$$\mathbf{Cv} = \frac{\sigma(x)}{M(x)} = \frac{4{,}3578}{8{,}6} = \mathbf{0{,}5067}$$

Matematica e Statistica

Prova d'Esame Straordinaria e Seconda Prova Parziale (20/01/2010)

Università di Verona - Laurea in Biotecnologie - A.A. 2009/10

$\boxed{\textbf{Tema B}}$

Matematica e Statistica

Prova d'Esame Straordinaria e IIa Prova Parziale di $\boxed{\text{MATEMATICA}}$ (20/01/2010)

Università di Verona - Laurea in Biotecnologie - A.A. 2009/10

Cognome-Nome ______________________________ Matr. ______________
IN STAMPATELLO

Questa prova viene svolta come:	☐ Esa = Esame Scritto	☐ 2pp = IIa Prova Parziale

Tema B

(1) $\boxed{\text{Esa}}$ Calcolare il volume del parallelepipedo compreso tra i tre vettori $\vec{v} = (0, -1, 1)$, $\vec{w} = (2, 0, -1)$ e $\vec{u} = (1, 3, -2)$, e decomporre $\vec{v}$ nelle direzioni parallela e ortogonale a $\vec{u}$. Determinare poi (in forma parametrica e cartesiana) il piano Π passante per $B(1, 0, 5)$ e ortogonale a $\vec{w}$, e la retta r passante per B e parallela a $\vec{v}$.

(2) $\boxed{\text{Esa}}$ Studiare l'andamento di $f(x) = \dfrac{\log|x| + 2}{(x-3)^2}$, e tracciarne il grafico[(1)].

(3) (a) $\boxed{\text{Esa}}$ $\boxed{\text{2pp}}$ Calcolare $\displaystyle\int f(x)\,dx$ (ove f è quella dell'Ex. 2) e $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x + \cos x}{\sin^2 x + 1}\,dx$.

(b) $\boxed{\text{Esa}}$ $\boxed{\text{2pp}}$ Disegnare $S = \{(x, y) : x + 4 \geq \sqrt{2-x}\,,\ |x+1| \leq y \leq 1 - \operatorname{arctg} x\}$, e calcolarne l'area.

(4) (a) $\boxed{\text{Esa}}$ $\boxed{\text{2pp}}$ Data $g(x, y) = x - \sqrt{x - y^2 + 2y}$, determinarne dominio, zeri e segno, disegnando i risultati. Trovare i punti stazionari, e cercare eventuali punti di estremo locale.

(b) $\boxed{\text{2pp}}$ Disegnare il segmento $I = \{(1 + t, 2t) : 0 \leq t \leq 1\}$, e dire perché g ammette massimo e minimo assoluti su I; calcolare quindi tali estremi di g su I. Giustificare poi geometricamente i risultati, descrivendo le curve di livello di g.

(5) (a) $\boxed{\text{Esa}}$ $\boxed{\text{2pp}}$ Trovare tutte le soluzioni $y(x)$ dell'equazione differenziale $2(x+2)yy' = x - 1$ tali che $y(0) = -1$. Stessa domanda per l'equazione differenziale $y'' + y = 2e^x - 3x$; qualcuna delle soluzioni trovate appare già tra le precedenti?

(b) $\boxed{\text{2pp}}$ Studiare a priori la crescenza e convessità delle soluzioni $y(x)$ dell'equazione differenziale $xy' + 2y = x^3$, e determinarne la soluzione che ha un estremo locale per $x = 1$. Tale estremo locale è un massimo o un minimo?

[(1)] Nello studio della derivata prima sarà utile un confronto grafico; si può tralasciare la derivata seconda.

Matematica e Statistica

Prova d'Esame Straordinaria e IIa Prova Parziale di STATISTICA (20/01/2010)

Università di Verona - Laurea in Biotecnologie - A.A. 2009/10

Cognome-Nome ______________________________ Matr. ______________
IN STAMPATELLO

Questa prova viene svolta come: ☐ Esa = Prova d'Esame ☐ 2pp = IIa Prova Parziale

Tema B

Per ogni calcolo effettuato scrivere anche la formula teorica da utilizzare

1. Esa 2pp **(per tutti gli esaminandi)**

Uno studio sulla relazione fra l'esposizione a onde elettromagnetiche (X) e il numero di sequenze di DNA nel batterio *Escherichia Coli* che sono mutate (Y) ha portato ai seguenti risultati:

X	**Y**
2	5
4	13
6	25
11	39

Interpolare i due fenomeni con una retta $Y' = a + bX$, calcolando:
(a) i parametri a e b della retta;
(b) il coefficiente di correlazione lineare, commentandolo brevemente;
(c) giudicare la bontà di accostamento del modello teorico.

2. Esa **(solo per chi sostiene la Prova d'Esame Straordinaria)**

X	**frequenza**
3	25
6	100
12	35
19	40

Sulla distribuzione di frequenze presentata in tabella, calcolare:
(a) la media aritmetica e la media quadratica;
(b) la mediana e la moda;
(c) il 1° e il 3° quartile.

3. Esa **(solo per chi sostiene la Prova d'Esame Straordinaria)**

Sulla distribuzione di frequenze presentata nella tabella precedente, calcolare:
(a) il range e la differenza interquartile;
(b) la varianza;
(c) lo scarto quadratico medio;
(d) il coefficiente di variazione.

$\boxed{\textbf{Tema B}}$ **- Soluzioni.**

$\boxed{\text{MATEMATICA}}$

(1) Il volume del parallelepipedo compreso tra i tre vettori $\vec{v} = (0, -1, 1)$, $\vec{w} = (2, 0, -1)$ e $\vec{u} = (1, 3, -2)$è dato dal valore assoluto del loro prodotto misto (il determinante della matrice fatta con le coordinate), che dà 3. La componente di $\vec{v}$ parallela a $\vec{u}$ è $\vec{v}_1 = \frac{\vec{v}\cdot\vec{u}}{\vec{u}\cdot\vec{u}}\vec{u} = \frac{-5}{14}(1, 3, -2) = (-\frac{5}{14}, -\frac{15}{14}, \frac{5}{7})$, mentre quella ortogonale è $\vec{v}_2 = \vec{v} - \vec{v}_1 = (\frac{5}{14}, \frac{1}{14}, \frac{2}{7})$ (si noti infatti che $\vec{v}_2 \cdot \vec{u} = 0$). Il piano Π, ortogonale a $\vec{w}$, deve avere equazione cartesiana del tipo $2x - z + k = 0$, e il passaggio per $B(1, 0, 5)$ dà $k = 3$; per una forma cartesiana, due vettori ortogonali a $\vec{w}$ (dunque paralleli a Π) e non paralleli tra loro sono $\vec{a}_1 = (1, 0, 2)$ e $\vec{a}_2 = (0, 1, 0)$, da cui $\Pi = \{(1, 0, 5) + \alpha(1, 0, 2) + \beta(0, 1, 0) : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} = \{(1 + \alpha, \beta, 5 + 2\alpha) : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$. Infine, una forma parametrica per la retta r passante per A e parallela a $\vec{v}$ è $r = \{(1, 0, 5) + \alpha(0, -1, 1) : \alpha \in \mathbb{R}\} = \{(1, -\alpha, 5 + \alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\}$; da $z = 5 + \alpha$ si ricava $\alpha = z - 5$, che messo in $x = 1$ e $y = -\alpha$ dà $x = 1$ e $y + z = 5$, il cui sistema dà una forma cartesiana per r.

(2) (Vedi Figura 1) Il dominio di $f(x) = \frac{\log|x|+2}{(x-3)^2}$ è dato da $x \neq 0$ e $x \neq 3$; in esso la funzione è derivabile infinite volte. Si ha $f(x) \geq 0$ quando $\log|x| \geq -2$, ovvero $|x| \geq \frac{1}{e^2}$, ovvero $x \leq -\frac{1}{e^2}$ oppure $x \geq \frac{1}{e^2}$. I limiti interessanti sono $\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty$ (determinato), $\lim_{x\to 3} f(x) = +\infty$ (determinato) e $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0^+$ (in forma indeterminata, ma basta usare de l'Hôpital o i limiti notevoli): dunque si hanno due asintoti verticali (bilateri) in $x = 0$ e $x = 3$, e un asintoto orizzontale (bilatero) in $y = 0$. Derivando, dopo qualche calcolo si ottiene $f'(x) = -\frac{\frac{3(x+1)}{x}+2\log|x|}{(x-3)^3}$. Si ha $f'(x) = 0$ quando $\log|x| = -\frac{3(x+1)}{2x}$, e un confronto grafico tra le due funzioni (un'omografica e il logaritmo simmetrizzato) mostra che ciò avviene solo per $x = -1$. Quanto al segno, il numeratore è positivo quando $\log|x| < -\frac{3(x+1)}{2x}$ (vero solo per $-1 < x < 0$), il denominatore quando $x > 3$, dunque vale $f'(x) > 0$ per $x < -1$ o per $0 < x < 3$: ne ricaviamo che $x = -1$ è punto di massimo locale, con $f(-1) = \frac{1}{8}$. Infine, derivando ancora, dopo calcoli si ottiene $f''(x) = \frac{6\log|x|+\frac{7x^2+18x-9}{x^2}}{(x-3)^4}$: vale dunque $f''(x) \geq 0$ quando $\log|x| \geq -\frac{7x^2+18x-9}{6x^2}$, e un altro confronto grafico mostra, come atteso, l'esistenza di due flessi, uno nelle vicinanze in -2, l'altro tra 0 e 1.

(3) (a) Integrando per parti si ha $\int f(x)\,dx = \int \frac{1}{(x-3)^2}(\log|x| + 2)\,dx = (-\frac{1}{x-3})(\log|x| + 2) - \int \frac{1}{x}(-\frac{1}{x-3})\,dx = -\frac{\log|x|+2}{x-3} + \frac{1}{3}\log|\frac{x-3}{x}| + k$. • Posto $\sin x = t$ (da cui $\cos x\,dx = dt$) e ricordando che $\sin 2x = 2\sin x\cos x$ si ottiene $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x+\cos x}{\sin^2 x+1}\,dx = \int_0^1 \frac{2t+1}{1+t^2}\,dt = (\log(1 + t^2) + \operatorname{arctg} t]_0^1 = (\log 2 + \frac{\pi}{4}) - (0) = \log 2 + \frac{\pi}{4} \sim 1{,}45$.

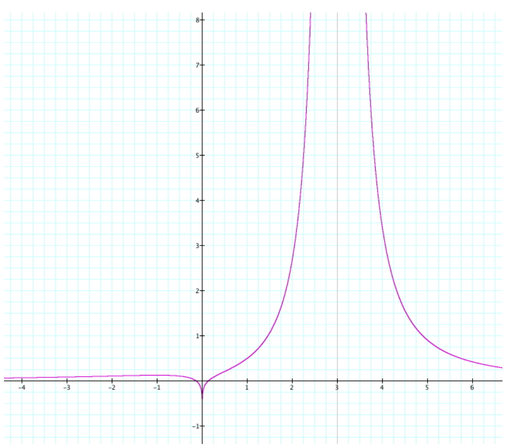
(b) (Vedi Figura 2) L'insieme $S = \{(x, y) : x + 4 \geq \sqrt{2 - x}\,,\ |x + 1| \leq y \leq 1 - \operatorname{arctg} x\}$ è rappresentato in figura (si noti che $x + 4 \geq \sqrt{2 - x}$ richiede che $x \leq 2$ e $x \geq -4$, e in tali ipotesi equivale a $(x + 4)^2 \geq 2 - x$, ovvero $x^2 + 9x + 14 \geq 0$, che dà $x \leq -7$ oppure $x \geq -2$: si ottiene dunque $-2 \leq x \leq 2$). L'area di S risulta pertanto $\int_{-2}^0 (1-\operatorname{arctg} x)\,dx + \int_0^{-1}(x+1)\,dx + \int_{-1}^{-2}(-x-1)\,dx = (x - x\operatorname{arctg} x + \frac{1}{2}\log(1+x^2)]_{-2}^0 + (\frac{1}{2}x^2 + x]_0^{-1} + (-\frac{1}{2}x^2 - x]_{-1}^{-2} = (0) - (-2 - 2\operatorname{arctg} 2 + \frac{1}{2}\log 5) + (-\frac{1}{2}) - (0) + (0) - (\frac{1}{2}) = 1 + 2\operatorname{arctg} 2 - \frac{1}{2}\log 5 \sim 2{,}4$.

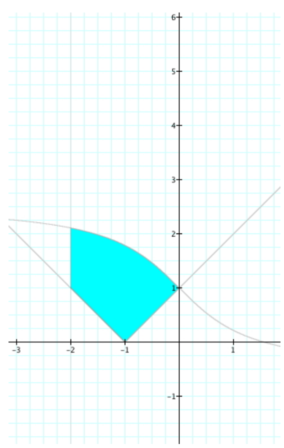
(4) (a) (Vedi Figura 3) Il dominio di $g(x, y) = x - \sqrt{x - y^2 + 2y}$ è dato da $x \geq y^2 - 2y$ (punti interni alla parabola, compresa). Si ha $g(x, y) = 0$ quando $x = \sqrt{x - y^2 + 2y}$, che nel dominio e nell'ipotesi $x \geq 0$ equivale a $x^2 = x - y^2 + 2y$, ovvero $x^2 + y^2 - x - 2y = 0$ (circonferenza di centro $(\frac{1}{2}, 1)$ e passante per l'origine, dunque il suo pezzo dall'asse y in poi); vale poi $g(x, y) > 0$ quando $x > \sqrt{x - y^2 + 2y}$, che richiede che $x > 0$ e in tal caso equivale a $x^2 > x - y^2 + 2y$, ovvero ovvero $x^2 + y^2 - x - 2y > 0$ (punti esterni alla circonferenza). Le derivate parziali sono $\frac{\partial g}{\partial x} = 1 - \frac{1}{2\sqrt{x-y^2+2y}}$ e $\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{y-1}{\sqrt{x-y^2+2y}}$, dunque il sistema $\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial y} = 0$ dà l'unico punto stazionario $P(-\frac{3}{4}, 1)$, che il criterio dell'hessiano rivela essere di massimo (infatti, a conti fatti, $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(P) = \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(P) = -2$ e $\frac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}(P) = 0$).

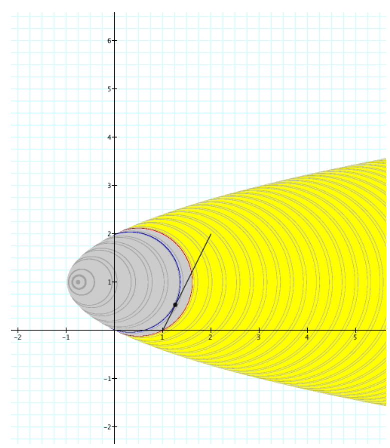
(b) (Vedi Figura 3) Il segmento $I = \{(1 + t, 2t) : 0 \leq t \leq 1\}$ (di estremi $Q(1, 0)$ e $R(2, 2)$) è un compatto (chiuso e limitato) interamente contenuto nel dominio di g, che è continua: dunque g ammette massimo e minimo assoluti su I in base a Weierstrass. Negli estremi si ha $g(Q) = 0$ e $g(R) = 2 - \sqrt{2} \sim 0{,}6$; nei punti interni si ha poi $\varphi(t) := g(1 + t, 2t) = 1 + t - \sqrt{1 + 5t - 4t^2}$ con $0 < t < 1$, la cui derivata $\varphi'(t) = 1 - \frac{5-8t}{2\sqrt{1+5t-4t^2}}$ si annulla solo per $t = \frac{25-\sqrt{205}}{40} \sim 0{,}27$: si trova dunque il punto $T(-\frac{25-\sqrt{205}}{20}, \frac{65-\sqrt{205}}{40})$, nel quale g è negativa (vale $g(T) = -\frac{\sqrt{205}-13}{8} \sim -0{,}17$). È dunque chiaro che il massimo assoluto di g su I è assunto in R, e il minimo assoluto in T. In effetti, le curve di livello di $g(x,y)=k$ sono i pezzi delle circonferenze $x^2+y^2+(-2k-1)x-2y+k^2=0$ (di centro $(k+\frac{1}{2},1)$ e raggio $\sqrt{(k+\frac{1}{2})^2+(1)^2-k^2}=\sqrt{\frac{5}{4}+k}$) a destra della retta $x=k$, dunque quando k è sempre più grande si tratta di pezzi di circonferenza (contenuti nel dominio) sempre più a destra e più grandi, mentre per k negativo si può arrivare fino al valore $k=-\frac{5}{4}$ in cui la circonferenza si riduce a un punto, che guarda caso è proprio il nostro P. Questi ragionamenti sulla struttura delle curve di livello, oltre a spiegare i risultati appena ottenuti (vedi figura), mostrano anche che P è in realtà punto di minimo assoluto per g (con valore $-\frac{5}{4}$), e che il limite di g in ∞_2 (l'unico limite interessante in verità) vale $+\infty$.

(5) (a) L'equazione differenziale $2(x+2)yy'=x-1$ è a variabili separabili: separandole si ha $2y\,dy=\frac{x-1}{x+2}\,dx$, integrando per $x>-2$ si ottiene $y^2=x-3\log(x+2)+k$, e imponendo che $y(0)=-1$ si ottiene $k=1+3\log 2$; infine, ricavando $y(x)$ e tenendo ancora conto della condizione iniziale si ricava $y(x)=-\sqrt{x-3\log\frac{1}{2}(x+2)+1}$.
• L'equazione differenziale $y''+y=2e^x-3x$ è del secondo ordine a coefficienti costanti. L'equazione caratteristica $t^2+1=0$ ha radici $\pm i$, dunque lo spazio delle soluzioni dell'omogenea associata è dato da $y=A\cos x+B\sin x$, con $A,B\in\mathbb{R}$ qualsiasi. Per la soluzione particolare, sfruttando il principio di sovrapposizione per $b_1(x)=2e^x$, $b_2(x)=-3x$ si trova $\tilde{y}_1(x)=e^x$ e $\tilde{y}_2(x)=-3x$, da cui l'integrale generale $y(x)=A\cos x+B\sin x+e^x-3x$, con $A,B\in\mathbb{R}$ qualsiasi. La condizione $y(0)=-1$ dà $-1=A+1$, ovvero $A=-2$, dunque le soluzioni cercate sono quelle del tipo $y(x)=-2\cos 2x+B\sin 2x+e^x-3x$ con $B\in\mathbb{R}$ qualsiasi, che non hanno nulla a che vedere con la precedente.

(b) L'equazione differenziale $xy'+2y=x^3$ è lineare del primo ordine. Se $x=0$ si ottiene $y(0)=0$, dunque un'eventuale soluzione definita in $x=0$ deve necessariamente annullarsi in tal punto; altrimenti si ottiene $y'=\frac{x^3-2y}{x}$, dunque per $x\gtrless 0$ le soluzioni sono crescenti sopra/sotto la cubica $y=\frac{1}{2}x^3$. Derivando ambo i membri rispetto x si ottiene $y''=\frac{(3x^2-2y')x-(x^3-2y)1}{x^2}$ da cui, sostituendo $xy'=x^3-2y$, si ha $y''=\frac{6y}{x^2}$: dunque le soluzioni saranno convesse sopra l'asse x. Passiamo ora alla risoluzione (per $x>0$, visto ciò che dopo chiede il problema) dell'equazione, che per $x\neq 0$ è nella forma canonica $y'+p(x)\,y=q(x)$ con $p(x)=\frac{2}{x}$ e $q(x)=x^2$: poiché una primitiva di $p(x)$ è $P(x)=2\log x$, e $\int e^{P(x)}q(x)\,dx=\int x^4\,dx=\frac{1}{5}x^5$, si hanno le soluzioni $y(x)=\frac{1}{x^2}(\frac{1}{5}x^5+k)=\frac{1}{5}x^3+\frac{k}{x^2}$ con $k\in\mathbb{R}$. Derivando si ha $y'=\frac{3}{5}x^2-\frac{2k}{x^3}$, e imponendo che $y'(1)=0$ si ricava $k=\frac{3}{10}$; derivando ancora la soluzione trovata si ha $y''=\frac{3}{5}(2x+\frac{3}{x^4})$, ed essendo $y''(1)=3>0$ si nota che il punto stazionario $x=1$ è di minimo locale stretto.







1. Il grafico della funzione dell'ex. 2. **2.** L'insieme dell'ex. (3.b). **3.** Dominio (parte colorata), zeri (rosso), segno positivo (giallo) e negativo (grigio) della funzione f dell'ex. 4; il segmento I (nero), e alcune curve di livello di g.

ESERCIZIO 1

X	Y	X * Y	X^2	Y^2
2	5	10	4	25
4	13	52	16	169
6	25	150	36	625
11	39	429	121	1521
23	**82**	**641**	**177**	**2340**

Sui dati presentati in tabella calcolare:
a) i parametri della retta interpolante Y'=a+bX ;
b) il coefficiente di correlazione lineare, commentandolo brevemente;
c) giudicare la bontà di accostamento del modello teorico.

a) Calcolo dei parametri della retta interpolante Y'=a+bX :

Calcolo attraverso le formule dirette (ma si poteva anche sviluppare il sistema):

$$b = \frac{Cov(X;Y)}{V(X)} \qquad a = M(Y) - bM(X)$$

$$M(X) = \frac{23}{4} = \mathbf{5{,}75}$$

$$M(Y) = \frac{82}{4} = \mathbf{20{,}5}$$

$$Cov(X;Y) = M(X*Y) - M(X)*M(Y) = \frac{641}{4} - 5{,}75 * 20{,}5 = \mathbf{42{,}375}$$

$$V(X) = M(X^2) - M(X)^2 = \frac{177}{4} - 5{,}75\text{^}2 = \mathbf{11{,}1875}$$

$$\mathbf{b} = \frac{Cov(X;Y)}{V(X)} = \frac{42{,}375}{11{,}1875} = \mathbf{3{,}7877}$$

$$\mathbf{a} = M(Y) - bM(X) = 20{,}5 - 3{,}7877*5{,}75 = \mathbf{-1{,}2793}$$

b) Calcolo del coefficiente di correlazione lineare e suo breve commento:

$$r = \frac{Cov(X;Y)}{\sigma(X)\,\sigma(Y)}$$

$$V(Y) = \frac{2340}{} - 20{,}5\text{^}2 = \mathbf{164{,}75}$$

4

$\sigma(Y) =$ RADQ(164,75) = **12,8355**

$\sigma(X) =$ RADQ(11,1875) = **3,3448**

$$r = \frac{42{,}375}{3{,}3448 * 12{,}8355} = \mathbf{0{,}987}$$

Si registra una forte relazione lineare diretta

c) Giudicare la bontà di accostamento del modello teorico:

Calcolo il coefficiente di determinazione r^2

$r^2 = 0{,}987^2 =$ **0,9742** **Il modello teorico riesce a spiegare quasi completamente le variazioni di Y**

ESERCIZIO 2

Sulla distribuzione di frequenze presentata in tabella, calcolare:
a) la media aritmetica e la media quadratica;
b) la mediana e la moda;
c) il 1° e il 3°quartile.

x	f	x*f	x^2	x^2*f
3	25	75	9	225
6	100	600	36	3600
12	35	420	144	5040
19	40	760	361	14440
	200	**1855**		**23305**

a) Calcolo della media aritmetica e della media quadratica:

$$M(x) = \frac{\Sigma\, x * f}{\Sigma\, f} = \frac{1855}{200} = \mathbf{9{,}275}$$

$$M_2(x) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{k} x_i f_i}{\sum_{i=1}^{k} f_i}} = \text{RADQ}\left(\frac{23305}{200}\right) = \mathbf{10{,}79}$$

b) Calcolo della mediana e della moda:

x100 =< mediana =< x101 : **me = 6**

moda = 6

c) Calcolo del 1°e del 3°quartile:

Q1= x50 = **6**
Q3= x150 = **12**

ESERCIZIO 3

Sulla distribuzione di frequenze presentata nella tabella precedente, calcolare:
a) il range e la differenza interquartile;
b) la varianza;
c) lo scarto quadratico medio;
d) il coefficiente di variazione.

a) Calcolo del range e della differenza interquartile:

Range = $X_{Max}-X_{min}=$ 19 - 3 = **16**

Diff interq= Q3 - Q1 = 12 - 6 = **6**

b) Calcolo della varianza (ad esempio usando il secondo metodo):

$$\mathbf{V(x)} = M(x^2) - m^2 = \frac{23305}{200} - 9{,}275^2 = 116{,}525 - 86{,}0256 = \mathbf{30{,}4994}$$

c) Calcolo dello scarto quadratico medio:

Calcolo la radice quadrata della V(x):
σ(x) = RADQ(30,499375) = **5,5226**

d) Calcolo del coefficiente di variazione:

$$\mathbf{Cv} = \frac{\sigma(x)}{M(x)} = \frac{5{,}5226}{9{,}275} = \mathbf{0{,}5954}$$