Matematica e Statistica (A-E, F-O, P-Z)

Prova d'esame (18/02/2011)

Università di Verona - Laurea in Biotecnologie - A.A. 2010/11

$\boxed{\textbf{Tema A}}$

Matematica e Statistica (A-E, F-O, P-Z)

Prova di $\boxed{\text{MATEMATICA (A-E, F-O, P-Z)}}$ (18/02/2011)

Università di Verona - Laurea in Biotecnologie - A.A. 2010/11

Cognome-Nome ______________________ Matr. __________ Corso __________
IN STAMPATELLO VR $\cdots\cdots$ A-E / F-O / P-Z

Tema A

**** Svolgere prima i punti* (a) *di tutti gli esercizi; solo in seguito i punti* (b). ***** ▶▶▶▶ **Test a quiz sul retro** ▶▶▶▶

(1) (a) Nel piano cartesiano (x, y) determinare, in forma parametrica e cartesiana, la retta r passante per il punto $P(1, 3)$ e parallela al vettore $\vec{v} = (2, -1)$. Vedendo poi il piano (x, y) come il piano orizzontale dello spazio (x, y, z), determinare (sempre sia in forma parametrica che cartesiana) il piano Π passante per il punto $A(1, 0, 2)$ e ortogonale a r.

(b) Idem, solo che stavolta si chiedono la retta r' del piano (x, y) passante per P e ortogonale a $\vec{v}$, e il piano Π' dello spazio (x, y, z) passante per A e contenente r'.

(2) Studiare l'andamento di $f(x) = \dfrac{1 + \log|x|}{x - 1}$, e tracciarne il grafico.[1]

(3) (a) Calcolare $\displaystyle\int_0^1 \left(2e^{\sqrt{x}} - \frac{x^3}{x+1}\right) dx$.

(b) Disegnare $S = \{(x, y) : 2 \leq (x + 1)y \leq 3x + 2,\ y \leq x \leq 4\}$, e calcolarne l'area.

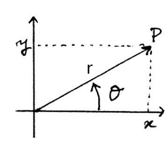
(4) (a) Data $g(x, y) = (x - 1)(x^2 + 4y^2 - 4)$, determinarne dominio, zeri, segno e limiti interessanti, disegnando i risultati. Trovarne i punti stazionari ed eventuali estremi locali. Determinare poi il gradiente di g in $(-1, -1)$, e il piano tangente al grafico di g sopra tale punto.

(b) Disegnare $\mathcal{C} = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\ ,\ x \leq 0\}$, e calcolare gli estremi assoluti di g su $\mathcal{C}$.[2]

(5) Trovare tutte le soluzioni $y(x)$ dell'equazione differenziale $y'' - 2y' + 2y = e^{2x} - 2$ e tutte quelle dell'equazione differenziale $e^{2x}\, y' = 4(y + 1)^2$, dicendo se ce n'è qualcuna in comune.
Dire infine, per ciascuna delle due equazioni, quali soluzioni hanno il grafico passante per l'origine.

[1] Non è necessario lo studio della convessità.

[2] Per descrivere la semicirconferenza si usi l'angolo polare θ, ovvero $(x, y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ con $r = 1$.



Matematica e Statistica (A-E)

Prova di STATISTICA (A-E) - Gobbi (18/02/2011)

Università di Verona - Laurea in Biotecnologie - A.A. 2010/11

Cognome-Nome ______________________ Matr. ____________

IN STAMPATELLO VR ······

Tema A

**** Per ogni calcolo effettuato scrivere anche la formula teorica da utilizzare **** ►►►► Test a quiz sul retro ►►►►

ESERCIZIO 1

La tabella seguente riporta le quantità di polveri sottili (in microgrammi per metro cubo), suddivise in classi, rilevate nell'aria di una città italiana in 100 giorni di misurazioni.

Quantità polveri sottili (in µg per m^3)	Frequenza
0 – 4	25
4 – 8	23
8 – 12	12
12 – 20	40

Sulla distribuzione di frequenze presentata in tabella, calcolare:
a) la media aritmetica e la media geometrica;
b) la mediana e la moda;
c) disegnare il grafico della distribuzione di frequenze.

ESERCIZIO 2

L'ammontare in Megawatt di energia elettrica prodotta dagli impianti fotovoltaici in Italia negli ultimi anni è riassunto dal prospetto sottostante.

Anno	Megawatt fotovoltaico prodotti
2007	2.000
2008	3.500
2009	5.500
2010	7.000

Calcolare:
a) i numeri indice prendendo come base fissa l'anno 2008;
b) i numeri indice a base mobile;
c) i numeri indice a base fissa 2009 tramite un opportuno coefficiente di raccordo;
d) la media dei numeri indice a base mobile, indicando il tipo di media utilizzato.

ESERCIZIO 3

	A	B	C
I	50	30	20
II	20	10	25
III	10	20	15

Sui dati esposti in tabella calcolare:
a) la probabilità che si verifichi l'evento I o A (l'uno o l'altro);
b) la probabilità che si verifichino insieme II e B (l'uno e l'altro);
c) la probabilità che si verifichi I o II (l'uno o l'altro);
d) la probabilità dell'evento II sapendo che si è verificato l'evento C ovvero P(II/C).

Matematica e Statistica (F-O, P-Z)

Prova di **STATISTICA (F-O, P-Z) - Di Palma** (18/02/2011)

Università di Verona - Laurea in Biotecnologie - A.A. 2010/11

Cognome-Nome ______________________ Matr. ____________

IN STAMPATELLO VR · · · · · ·

Tema A

**** Attenzione: compiti illeggibili non verranno corretti ! **** ▸▸▸▸ **Test a quiz sul retro** ▸▸▸▸

Esercizio 1)

Si vuole valutare il tempo di incubazione (espresso in giorni) di un agente virale. Da un osservazione su di una popolazione di 20 elementi si sono ottenute le frequenze assolute indicate nella tabella a lato.

inf_i	sup_i	n_i
0	8	1
8	12	2
12	16	5
16	20	4
20	24	5
24	28	2
28	36	1

Il candidato

a) Determini la tipologia del carattere.
b) Se possibile, tracci l'istogramma.
c) Se possibile, calcoli la mediana.
d) Se possibile, calcoli la varianza.

N.b. L'estremo superiore delle varie classi di modalità è da ritenersi escluso

Esercizio 2)

I dati raccolti nel precedente esercizio sono stati organizzati tenendo conto del diverso genere del soggetto che ha contratto il virus, ottenendo la seguente tabella.

		Y:tempo di incubazione				
		fino a 12 gg	da 12 a 16 gg (16 escluso)	da 16 a 20 gg (20 esluso)	da 20 a 24 gg (24 escluso)	24 gg e oltre
X:Genere	Maschile	1	2	2		
	Femminile				2	1

Il candidato

a) Completi la tabella con i dati mancanti.
b) Se possibile, indichi e calcoli per la serie ottenuta un opportuno indice di posizione
c) Se possibile, indichi e calcoli per la serie ottenuta un opportuno indice di variabilità
d) Se possibile, verifichi, ad un opportuno livello di significatività, se i due caratteri si possono dire indipendenti.

Esercizio 3)

Un laboratorio di ricerca vuole stimare la varianza di un microscopio elettronico. Per fare questo effettuate 11 misure di un campione di lunghezza nota 5 nm. Le misure (espresse in nm) ottenute sono:

5,01 5,00 4,99 5,01 5,00 5,01 5,00 5,00 5,00 4,98 5,00

Il candidato stimi puntualmente e per intervallo lo scarto quadratico medio delle misurazioni.

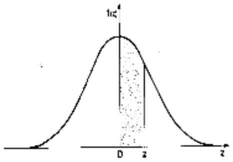
Esercizio 4)

Si considerino i due eventi E_1 ed E_2 . Sapendo che i due eventi sono indipendenti e $P(E_1) = 1/2;$ $P(E_2) = 1/3$. Il candiato calcoli le probabilità dei seguenti eventi

a) evento E_2 condizionato E_1
b) evento E_1 intersezione E_2.
c) evento E_2 unito E_1.

Tavola I

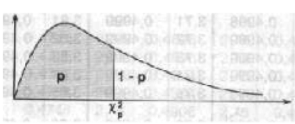
Integrali della variabile casuale normale standardizzata z



z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2517	0.2549
0.7	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4761	0.4767
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
2.1	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4854	0.4857
2.2	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884	0.4887	0.4890
2.3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
2.4	0.4918	0.4920	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936
2.5	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952
2.6	0.4953	0.4955	0.4956	0.4957	0.4959	0.4960	0.4961	0.4962	0.4963	0.4964
2.7	0.4965	0.4966	0.4967	0.4968	0.4969	0.4970	0.4971	0.4972	0.4973	0.4974
2.8	0.4974	0.4975	0.4976	0.4977	0.4977	0.4978	0.4979	0.4979	0.4980	0.4981
2.9	0.4981	0.4982	0.4982	0.4983	0.4984	0.4984	0.4985	0.4985	0.4986	0.4986
3.0	0.4987	0.4987	0.4987	0.4988	0.4988	0.4989	0.4989	0.4989	0.4990	0.4990

Tavola II

Integrali della variabile casuale chi quadrato a v gradi di libertà.



ν \ p	0,005	0,01	0,025	0,05	0,10	0,25	0,50	0,75	0,90	0,95	0,975	0,99	0,995	0,999
1	0,0000	0,0002	0,0010	0,0039	0,0158	0,102	0,455	1,32	2,71	3,84	5,02	6,63	7,88	10,8
2	0,0100	0,0201	0,0506	0,103	0,211	0,575	1,39	2,77	4,61	5,99	7,38	9,21	10,6	13,8
3	0,0717	0,115	0,216	0,352	0,584	1,21	2,37	4,11	6,25	7,81	9,35	11,3	12,8	16,3
4	0,207	0,297	0,484	0,711	1,06	1,92	3,36	5,39	7,78	9,49	11,1	13,3	14,9	18,5
5	0,412	0,554	0,831	1,15	1,61	2,67	4,35	6,63	9,24	11,1	12,8	15,1	16,7	20,5
6	0,676	0,872	1,24	1,64	2,20	3,45	5,35	7,84	10,6	12,6	14,4	16,8	18,5	22,5
7	0,989	1,24	1,69	2,17	2,83	4,25	6,35	9,04	12,0	14,1	16,0	18,5	20,3	24,3
8	1,34	1,65	2,18	2,73	3,49	5,07	7,34	10,2	13,4	15,5	17,5	20,1	22,0	26,1
9	1,73	2,09	2,70	3,33	4,17	5,90	8,34	11,4	14,7	16,9	19,0	21,7	23,6	27,9
10	2,16	2,56	3,25	3,94	4,87	6,74	9,34	12,5	16,0	18,3	20,5	23,2	25,2	29,6
11	2,60	3,05	3,82	4,57	5,58	7,58	10,3	13,7	17,3	19,7	21,9	24,7	26,8	31,3
12	3,07	3,57	4,40	5,23	6,30	8,44	11,3	14,8	18,5	21,0	23,3	26,2	28,3	32,9
13	3,57	4,11	5,01	5,89	7,04	9,30	12,3	16,0	19,8	22,4	24,7	27,7	29,8	34,5
14	4,07	4,66	5,63	6,57	7,79	10,2	13,3	17,1	21,1	23,7	26,1	29,1	31,3	36,1
15	4,60	5,23	6,26	7,26	8,55	11,0	14,3	18,2	22,3	25,0	27,5	30,6	32,8	37,7
16	5,14	5,81	6,91	7,96	9,31	11,9	15,3	19,4	23,5	26,3	28,8	32,0	34,3	39,3
17	5,70	6,41	7,56	8,67	10,1	12,8	16,3	20,5	24,8	27,6	30,2	33,4	35,7	40,8
18	6,26	7,01	8,23	9,39	10,9	13,7	17,3	21,6	26,0	28,9	31,5	34,8	37,2	42,3
19	6,84	7,63	8,91	10,1	11,7	14,6	18,3	22,7	27,2	30,1	32,9	36,2	38,6	43,8
20	7,43	8,26	9,59	10,9	12,4	15,5	19,3	23,8	28,4	31,4	34,2	37,6	40,0	45,3
21	8,03	8,90	10,3	11,6	13,2	16,3	20,3	24,9	29,6	32,7	35,5	38,9	41,4	46,8
22	8,64	9,54	11,0	12,3	14,0	17,2	21,3	26,0	30,8	33,9	36,8	40,3	42,8	48,3
23	9,26	10,2	11,7	13,1	14,8	18,1	22,3	27,1	32,0	35,2	38,1	41,6	44,2	49,7
24	9,89	10,9	12,4	13,8	15,7	19,0	23,3	28,2	33,2	36,4	39,4	43,0	45,6	51,2
25	10,5	11,5	13,1	14,6	16,5	19,9	24,3	29,3	34,4	37,7	40,6	44,3	46,9	52,6
26	11,2	12,2	13,8	15,4	17,3	20,8	25,3	30,4	35,6	38,9	41,9	45,6	48,3	54,1
27	11,8	12,9	14,6	16,2	18,1	21,7	26,3	31,5	36,7	40,1	43,2	47,0	49,6	55,5
28	12,5	13,6	15,3	16,9	18,9	22,7	27,3	32,6	37,9	41,3	44,5	48,3	51,0	56,9
29	13,1	14,3	16,0	17,7	19,8	23,6	28,3	33,7	39,1	42,6	45,7	49,6	52,3	58,3
30	13,8	15,0	16,8	18,5	20,6	24,5	29,3	34,8	40,3	43,8	47,0	50,9	53,7	59,7

$\boxed{\text{Tema A}}$ - Soluzioni

MATEMATICA (A-E, F-O, P-Z)

(1) (a) La retta r del piano cartesiano (x, y) passante per il punto $P(1, 3)$ e parallela al vettore $\vec{v} = (2, -1)$ ha forma parametrica $r = \{(1, 3)+t(2, -1) : t \in \mathbb{R}\} = \{(1+2t, 3-t) : t \in \mathbb{R}\}$; da $(x, y) = (1+2t, 3-t)$ si ricava poi $t = 3-y$, da cui la forma cartesiana $x+2y-7 = 0$. • Il piano Π passante per il punto $A(1, 0, 2)$ e ortogonale a r dovrà essere anche ortogonale a $\vec{v} = (2, -1, 0)$, da cui la forma cartesiana del tipo $2x - y + k = 0$, e il passaggio per A dà $k = -2$, da cui $2x-y-2 = 0$. Due vettori ortogonali a $\vec{v}$ (dunque paralleli a Π) e non paralleli tra loro sono ad esempio $(1, 2, 0)$ e $(0, 0, 1)$, da cui la forma parametrica $\Pi = \{(1, 0, 2)+s(1, 2, 0)+t(0, 0, 1) : s, t \in \mathbb{R}\} = \{(1+s, 2s, 2+t) : s, t \in \mathbb{R}\}$.

(b) La retta r' del piano (x, y) ortogonale a $\vec{v}$ avrà forma cartesiana del tipo $2x - y + k = 0$, e il passaggio per $(1, 3)$ dà $k = 1$, dunque $2x - y + 1 = 0$; poiché poi un vettore ortogonale a $\vec{v}$ (dunque parallelo a r') è $(1, 2)$, una forma parametrica sarà $r' = \{(1, 3) + t(1, 2) : t \in \mathbb{R}\} = \{(1 + t, 3 + 2t) : t \in \mathbb{R}\}$. • Il piano Π' passante per il punto $A(1, 0, 2)$ e contenente r' sarà parallelo al vettore $\vec{v} = (1, 2, 0)$ e conterrà anche il suo punto $P(1, 3, 0)$, da cui un altro vettore parallelo a Π è $(1, 3, 0) - (1, 0, 2) = (0, 3, -2)$: dunque una forma parametrica è $\Pi' = \{(1, 0, 2) + s(1, 2, 0) + t(0, 3, -2) : s, t \in \mathbb{R}\} = \{(1 + s, 2s + 3t, 2 - 2t) : s, t \in \mathbb{R}\}$; ed eliminando i parametri s e t da $(x, y, z) = (1 + s, 2s + 3t, 2 - 2t)$ si ricava la forma cartesiana $4x - 2y - 3z + 2 = 0$.

(2) (Figura 1) La funzione $f(x) = \frac{1+\log|x|}{x-1}$ è definita per $x \neq 0$ e $x \neq 1$, ed è derivabile infinite volte nel suo dominio; non ha parità ne' periodicità. Si ha $f(x) = 0$ quando $\log|x| = -1$, ovvero $|x| = \frac{1}{e} \sim 0{,}37$, ovvero $x = \mp\frac{1}{e}$; per quanto riguarda il segno, il numeratore è > 0 quando $|x| > \frac{1}{e}$ ovvero quando $x < -\frac{1}{e}$ oppure $x > \frac{1}{e}$, e il denominatore per $x > 1$, dunque vale $f(x) > 0$ per $-\frac{1}{e} < x < 0$, per $0 < x < \frac{1}{e}$ e per $x > 1$. I limiti interessanti valgono $\lim_{x\to\mp\infty} f(x) = 0^\mp$ (è in forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$, ma basta ricordare che $\lim_{x\to+\infty} \frac{\log x}{x} = 0$ oppure applicare de l'Hôpital), $\lim_{x\to0} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to1\mp} f(x) = \mp\infty$; pertanto $y = 0$ è asintoto orizzontale a $\mp\infty$. Derivando (e ricordando che la derivata di $\log|x|$ è $\frac{1}{x}$) si ottiene $f'(x) = \frac{\frac{1}{x}(x-1)-(1+\log|x|)}{(x-1)^2} = -\frac{\log|x|+\frac{1}{x}}{(x-1)^2}$, pertanto vale $f'(x) = 0$ se e solo se $\log|x| = -\frac{1}{x}$, e un confronto grafico mostra che ciò accade in un solo punto x_0 con $-2 < x_0 < -1$ (vale in realtà $x_0 \sim -1{,}8$); si ha poi $f'(x) > 0$ se e solo se $\log|x| < -\frac{1}{x}$, e sempre il confronto grafico mostra che ciò accade solo per $x_0 < x < 0$. Ne ricaviamo che $x = x_0$ è un punto di minimo relativo (vale $f(x_0) = \frac{1+\log|x_0|}{x_0-1} = \frac{1-\frac{1}{x_0}}{x_0-1} = \frac{1}{x_0} = -0{,}6$.

(3) (a) Posto $x = t^2$, vale $\int_0^1 (2e^{\sqrt{x}} - \frac{x^3}{x+1})\, dx = 2\int_0^1 e^{\sqrt{x}}\, dx - \int_0^1 \frac{(x+1)(x^2-x+1)-1}{x+1})\, dx = 4\int_0^1 t\, e^t\, dt - \int_0^1 (x^2 - x + 1 - \frac{1}{x+1})\, dx = 4((t-1)e^t]_0^1 - (\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x - \log|x + 1|]_0^1 = 4((0) - (-1)) - ((\frac{5}{6} - \log 2) - (0)) = \frac{19}{6} + \log 2 \sim 3{,}75$.

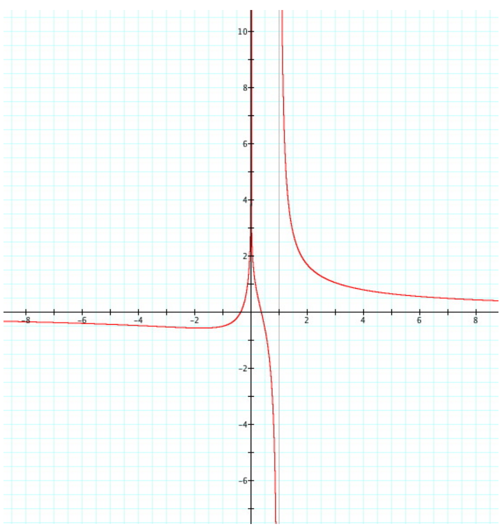
(b) (Figura 2) L'intersezione tra i grafici $y = x$ e $y = \frac{3x+2}{x+1}$ che ci interessa avviene per $x = \sqrt{3} + 1 \sim 2{,}7$, dunque la zona di piano $S = \{(x, y) : 2 \leq (x+1)y \leq 3x+2,\ y \leq x \leq 4\}$ ha area $\int_1^{\sqrt{3}+1} x\, dx + \int_{\sqrt{3}+1}^4 \frac{3x+2}{x+1}\, dx + \int_4^1 \frac{2}{x+1}\, dx = (\frac{1}{2}x^2]_1^{\sqrt{3}+1} + (3x - \log|x + 1|]_{\sqrt{3}+1}^4 + (2\log|x + 1|]_4^1 = (2 + \sqrt{3}) - (\frac{1}{2}) + (12 - \log 5) - (3\sqrt{3} + 3 - \log(2 + \sqrt{3})) + (2\log 2) - (2\log 5) = \frac{21}{2} - 2\sqrt{3} + \log(2 + \sqrt{3})) + 2\log 2 - 3\log 5 \sim 4{,}9$.

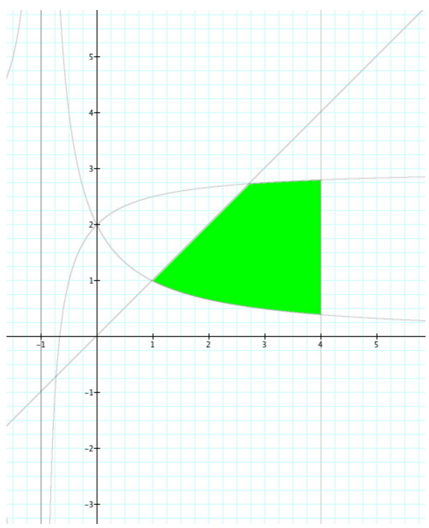
(4) (a) (Figura 3) Il dominio di $g(x, y) = (x-1)(x^2+4y^2-4)$ è tutto il piano $\mathbb{R}^2$; si tratta di una funzione differenziabile, in quanto le derivate parziali $\frac{\partial g}{\partial x} = 1(x^2 + 4y^2 - 4) + (x - 1)2x = 3x^2 + 4y^2 - 2x - 4$ e $\frac{\partial g}{\partial y} = 8y(x - 1)$ risultano continue. La funzione si annulla o quando $x = 1$ (retta verticale) o quando $x^2 + 4y^2 - 4 = 0$, ovvero $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$ (ellisse di centro $(0, 0)$, centrata e simmetrica rispetto agli assi coordinati, e di semiassi rispettivamente 2 e 1); il fattore $x - 1$ è > 0 a destra della retta, il fattore $x^2 + 4y^2 - 4$ è > 0 fuori dall'ellisse, e il segno di g ne segue per prodotto. L'unico limite interessante è quello in ∞_2, che non esiste: infatti, tendendo a ∞_2 lungo le rette $x = 1$ e $x = 0$ i limiti sono rispettivamente 0 e $-\infty$. Dal sistema $\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial y} = 0$ si ricavano i quattro punti stazionari $A(-\frac{\sqrt{13}-1}{3}, 0)$, $B(\frac{\sqrt{13}+1}{3}, 0)$ e $C_\mp(1, \mp\frac{\sqrt{3}}{2})$ (si noti che $C_\mp$ sono le intersezioni tra retta e ellisse). La matrice hessiana di g risulta $\mathsf{H}_g(x, y) = \begin{pmatrix} 6x-2 & 8y \\ 8y & 8(x-1) \end{pmatrix}$; essendo $\mathsf{H}_g(A) = \begin{pmatrix} -2\sqrt{13} & 0 \\ 0 & -\frac{8}{3}(\sqrt{13}+2) \end{pmatrix}$, $\mathsf{H}_g(B) = \begin{pmatrix} 2\sqrt{13} & 0 \\ 0 & \frac{8}{3}(\sqrt{13}-2) \end{pmatrix}$, $\mathsf{H}_g(C_\mp) = \begin{pmatrix} 4 & \mp4\sqrt{3} \\ \mp4\sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}$, il criterio dell'hessiano ci dice subito che A e B sono rispettivamente punti di massimo e minimo locale, mentre $C_\mp$ sono due punti di sella (cosa, quest'ultima, che era già evidente guardando lo studio del segno). Il gradiente di g in $(-1, -1)$ è il vettore $\nabla g(-1, -1) = (\frac{\partial g}{\partial x}(-1, -1)\, , \frac{\partial g}{\partial y}(-1, -1)) = (5, 16)$; il piano tangente al grafico di g sopra $(-1, -1)$ è $z = g(-1, -1) + \frac{\partial g}{\partial x}(-1, -1)\cdot$

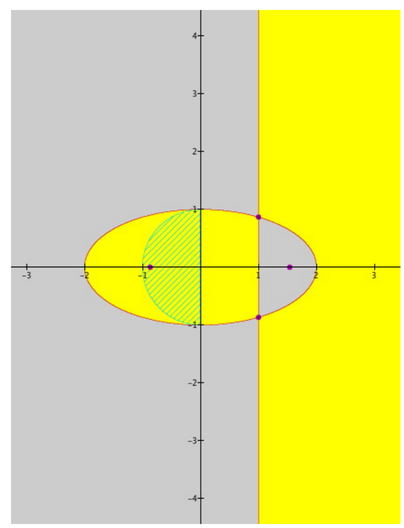
$(x-(-1)) + \frac{\partial g}{\partial y}(-1,-1)\cdot(y-(-1))$, ovvero $5x+16y-z+19=0$.

(b) (Figura 3) L'insieme $\mathcal{C} = \{(x,y) : x^2+y^2 \le 1\,,\ x \le 0\}$ è il semidisco visibile in figura. Per la ricerca degli estremi assoluti di g su $\mathcal{C}$ (che esistono in base a Weierstrass) dividiamo $\mathcal{C}$ nelle zone $\mathcal{C}_0$ dei suoi punti interni; $\mathcal{C}_1$ del lato verticale privato dei vertici; $\mathcal{C}_2$ della semicirconferenza privata dei vertici; e $\mathcal{C}_3 = \{D(0,1),\, E(0,-1)\}$ dei vertici. • Se massimo o minimo assoluti fossero assunti in un punto di $\mathcal{C}_0$, tale punto dovrebbe essere in particolare stazionario per g: come visto prima ce ne sono quattro, e l'unico dentro $\mathcal{C}_0$ è $A(-\frac{\sqrt{13}-1}{3},0)$. • Sul lato $\mathcal{C}_1$ la funzione vale $\varphi_1(y) := g(0,y) = 4(1-y^2)$ con $-1<y<1$. Se massimo o minimo assoluti fossero assunti in un punto di $\mathcal{C}_1$, in tale punto dovrebbe annullarsi la derivata $\varphi_1'(y) = -8y$: ciò avviene per $y=0$, e si ottiene dunque l'origine $O(0,0)$. • Per descrivere la semicirconferenza $\mathcal{C}_2$ si può usare l'angolo polare θ: su essa la funzione vale dunque $\varphi_2(\theta) := g(\cos\theta,\sin\theta) = (\cos\theta-1)(\cos^2\theta+4\sin^2\theta-4) = 3(1-\cos\theta)\cos^2\theta$ con $\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{3\pi}{2}$. La derivata $\varphi_2'(\theta) = 3(\sin\theta\cos^2\theta+(1-\cos\theta)(-2\sin\theta\cos\theta)) = 3\sin\theta\cos\theta(3\cos\theta-2)$ si annulla quando $\sin\theta=0$ o $\cos\theta=0$ o $\cos\theta=\frac{2}{3}$, che in $\mathcal{C}_2$ dà luogo al solo punto $F(-1,0)$. • Infine, i due punti D, E di $\mathcal{C}_3$ vanno tenuti entrambi presenti. • Gli estremi assoluti di g su $\mathcal{C}$ potranno dunque assunti solo nell'ambito dei cinque punti A, O, F, D, E: poiché $g(A) = \frac{70+26\sqrt{13}}{27} \sim 6{,}1$, $g(O)=4$, $g(F)=6$ e $g(D)=g(E)=0$, il massimo assoluto di g su $\mathcal{C}$ è $\frac{70+26\sqrt{13}}{27}$ (assunto in A) e il minimo assoluto è 0 (assunto in D e E).

(5) L'equazione differenziale $y''-2y'+2y = e^{2x}-2$ è del secondo ordine, lineare a coefficienti costanti. L'equazione caratteristica $t^2-2t+2=0$ ha soluzioni $t = 1\mp i$, dunque lo spazio di soluzioni dell'equazione omogenea associata è $y(x) = e^x(A\cos x + B\sin x)$ al variare di $A,B\in\mathbb{R}$. Una soluzione particolare per la completa con e^{2x} è $\tilde{y}_1(x) = \frac{1}{2}e^{2x}$, una particolare per la completa con -2 è la costante $\tilde{y}_2(x)\equiv -1$, dunque lo spazio di soluzioni dell'equazione completa è $y(x) = e^x(A\cos x+B\sin x)+\frac{1}{2}e^{2x}-1$ al variare di $A,B\in\mathbb{R}$. • L'equazione differenziale $e^{2x}\,y' = 4(y+1)^2$ è del primo ordine a variabili separabili. Tenuto conto della soluzione costante $y(x)\equiv -1$, separando le variabili si ottiene $\frac{1}{(y+1)^2}\,dy = 4e^{-2x}\,dx$, da cui integrando $-\frac{1}{y+1} = -2e^{-2x}+k$ con $k\in\mathbb{R}$, da cui, a conti fatti, si ricava $y(x) = \frac{e^{2x}}{ke^{2x}+2}-1$ con $k\in\mathbb{R}$. • Confrontando le due famiglie di soluzioni, è chiaro che l'unica in comune è $y(x) = \frac{1}{2}e^{2x}-1$ (ottenuta rispettivamente per $A=B=0$ e per $k=0$). • Imponendo che $y(0)=0$ si ottiene rispettivamente $0 = A-\frac{1}{2}$ e $0 = \frac{1}{k+2}-1$, da cui $A=\frac{1}{2}$ e $k=-1$: le soluzioni il cui grafico passa per l'origine sono dunque $y(x) = e^x(\frac{1}{2}\cos x + B\sin x)+\frac{1}{2}e^{2x}-1$ con $B\in\mathbb{R}$, e $y(x) = \frac{e^{2x}}{-e^{2x}+2}-1 = -2\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}-2}$.







1. Il grafico della funzione dell'ex. 2. **2.** L'insieme dell'ex. (3.b). **3.** Ex. (4.b): zeri (rosso), segno positivo (giallo) e negativo (grigio) della funzione g; i punti stazionari (porpora); il semidisco $\mathcal{C}$ (azzurro).

ESERCIZIO 1

La tabella seguente riporta le quantità di polveri sottili (in microgrammi per metro cubo) rilevate nell'aria di una città italiana in 100 giorni di misurazioni.
Sulla distribuzione di frequenze presentata in tabella, calcolare:
a) la media aritmetica e la media geometrica;
b) la mediana e la moda;
c) disegnare il grafico della distribuzione di frequenze.

X	**f**	**X_c**	**X_c*f**	**ln(X_c)**	**ln(X_c)*f**	**ampiezza**	**dens f**
0 - 4	25	2	50	0,6931	17,3287	4	6,25
4 - 8	23	6	138	1,7918	41,2105	4	5,75
8 - 12	12	10	120	2,3026	27,6310	4	3
12 - 20	40	16	640	2,7726	110,904	8	5
	100		**948**		**197,0737**		

a) Calcolo della media aritmetica e geometrica:

$$\mathbf{M(X)} = \frac{\Sigma\, x * f}{\Sigma\, f} = \frac{948}{100} = \mathbf{9{,}48}$$

$$\ln(Mg(X)) = \frac{\Sigma \ln(x) * f}{\Sigma\, f} = \frac{197{,}0737}{100} = 1{,}9707 \qquad \mathbf{Mg(X)} = e^{1{,}9707} = \mathbf{7{,}176}$$

b) Calcolo della mediana e della moda:

Poiché i dati sono divisi in classi, il calcolo della mediana si effettua tramite il seguente procedimento:

Si individua innanzitutto la classe mediana:
x50° =< classe mediana =< x51° : **classe mediana = 8-12**

La numerosità totale dei dati è pari (100), perciò si utilizzeranno le seguenti due formule per trovare gli estremi inferiore e superiore della mediana:

$$k_1 = x_s + \frac{x_{s+1} - x_s}{f_s}\left(\frac{N}{2} - \sum_{j=1}^{s-1} f_j\right)$$

$$k_2 = x_s + \frac{x_{s+1} - x_s}{f_s}\left(\frac{N}{2} + 1 - \sum_{j=1}^{s-1} f_j\right)$$

Perciò:

$$k_1 = 8 + \frac{12-8}{12}\left(\frac{100}{2} - 48\right) = 8.6667$$

$$k_2 = 8 + \frac{12-8}{12}\left(\frac{100}{2} + 1 - 48\right) = 9$$

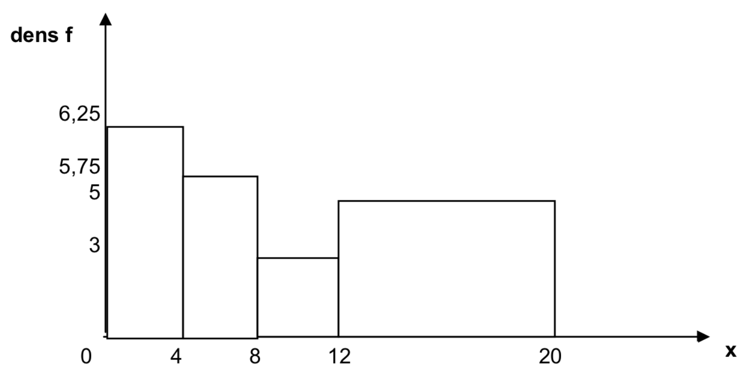
Quindi: **8,6667 <= mediana <= 9**

Anche per il calcolo della moda occorre tener conto dell'ampiezza delle classi.
In particolare la classe modale sarà data dalla classe con la densità di frequenza maggiore.
Di conseguenza:

Classe modale: 0 - 4

c) Disegno del grafico della distribuzione di frequenze:

Bisogna tener conto della diversa **ampiezza** delle classi.
Perciò l'altezza degli istogrammi sarà data dalla colonna della **densità di frequenza**.



ESERCIZIO 2

Nella tabella seguente viene riportato l'ammontare in Megawatt di energia elettrica prodotta dagli impianti fotovoltaici in Italia negli ultimi anni. Sui dati presentati calcolare:
a) i numeri indice a base fissa 2008;
b) i numeri indice a base mobile;
c) i numeri indice a base fissa 2009 tramite un opportuno coefficiente di raccordo;
d) la media dei numeri indice a base mobile, indicando il tipo di media utilizzato.

anno	**MW**	$I_{\text{base 2008}}$	$I_{\text{base Mobile}}$	$I_{\text{base 2009}}$
2007	2.000	0,5714	-	0,4
2008	3.500	1	1,75	0,6364
2009	5.500	1,5714	1,5714	1
2010	7.000	2	1,2727	1,27
		5,1429		

a) Calcolo dei numeri indice a base 2008:

$I_{\text{base 2008}}$

$$\frac{x\ 2007}{x\ 2008} = \mathbf{0,5714}$$

$$\frac{x\ 2008}{x\ 2008} = \mathbf{1}$$

$$\frac{x\ 2009}{x\ 2008} = \mathbf{1,5714}$$

$$\frac{x\ 2010}{x\ 2008} = \mathbf{2}$$

b) Calcolo dei numeri indice a base mobile:

$I_{\text{base mobile}}$

$$\frac{x\ 2008}{x\ 2007} = \mathbf{1,75}$$

$$\frac{x\ 2009}{x\ 2008} = \mathbf{1,5714}$$

$$\frac{x\ 2010}{x\ 2009} = \mathbf{1,2727}$$

c) Calcolo dei numeri indice a base fissa 2009 tramite un opportuno coefficiente di raccordo;

$$\text{coeff.} = \frac{x\ 2008}{x\ 2009} = \frac{3500}{5500} = \mathbf{0,6364}$$

d) Calcolo della media dei numeri indice a base mobile, indicando il tipo di media utilizzato.

M(I mob)= (1,75*1,5714*1,2727)^1/3= **1,5183** **Media geometrica**

ESERCIZIO 3

Sui dati presenti in tabella, calcolare:

	A	B	C	
I	50	30	20	**100**
II	20	10	25	**55**
III	10	20	15	**45**
	80	**60**	**60**	**200**

a) la probabilità che si verifichi l'evento I o A (l'uno o l'altro)
b) la probabilità che si verifichino insieme II e B (l'uno e l'altro)
c) la probabilità che si verifichi I o II (l'uno o l'altro)
d) la probabilità dell'evento II sapendo che si è verificato l'evento C ovvero P(II/C)

a) la probabilità che si verifichi l'evento I o A (l'uno o l'altro)

$P(I) + P(A) - P(I \cap A)$ bisogna togliere l'intersezione perché sono compatibili

$$\frac{100}{200} + \frac{80}{200} - \frac{50}{200} =$$

$$0,5 + 0,4 - 0,25 = \mathbf{0,65}$$

b) la probabilità che si verifichino insieme II e B (l'uno e l'altro)

$P(II \cap B)$

$$\frac{10}{200} = \mathbf{0,05}$$

c) la probabilità che si verifichi I o II (l'uno o l'altro)

$P(I) + P(II)$ dato che sono incompatibili non c'è l'intersezione

$$\frac{100}{200} + \frac{55}{200} = \mathbf{0,775}$$

d) la probabilità dell'evento II sapendo che si è verificato l'evento C ovvero P(II/C)

$$P(II/C) = \frac{P(II \cap C)}{P(C)}$$

$$P(II/C) = \frac{\frac{25}{200}}{\frac{60}{200}} = \frac{25}{200} * \frac{200}{60} = \mathbf{0,4167}$$

STATISTICA (F-O, P-Z) - Di Palma

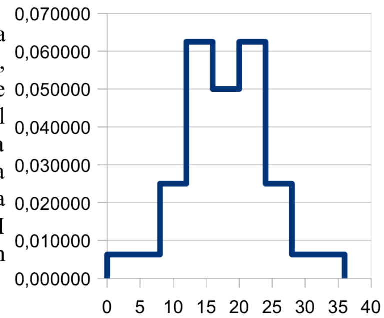
Esercizio 1)

a) Determini la tipologia del carattere.

Il carattere è di tipo quantitativo (in quanto espresso da numeri) continuo (in quanto si vuole monitorare un tempo che concettualmente è continuo).

b) Se possibile, tracci l'istogramma..

L'istogramma è una rappresentazione comunemente utilizzata quando si tratta un dato quantitativo continuo viene, per diverse esigenze, raccolto in classi di modalita c_i. Il grafico riporta le modalità sull'asse delle ascisse e sulle ordinate la densità di frequenza di ogni classe. Il grafico si compone di rettangoli fra di loro adiacenti la cui base si ricava dagli estremi della classe mentre l'altezza, l'altezza coincide con la densità di frequenza, pertanto l'area di ogni rettangolo sarà uguale alla frequenza relativa della classe. A lato si riporta l'istogramma richiesto. I conti per ricavare il suddetto istrogramma sono riportati nella tabella in calce. (colonne f_i e $f_i/(sup_i - inf_i)$)



i	inf_i	sup_i	c_i	sup_i-inf_i	n_i	f_i	F_i	$f_i/(sup_i-inf_i)$	$c_i f_i$	c_i^2	$c_i^2 f_i$
1	0	8	4	8	1	0,050	0,050	0,006250	0,200	16	0,80
2	8	12	10	4	2	0,100	0,150	0,025000	1,000	100	10,00
3	12	16	14	4	5	0,250	0,400	0,062500	3,500	196	49,00
4	16	20	18	4	4	0,200	0,600	0,050000	3,600	324	64,80
5	20	24	22	4	5	0,250	0,850	0,062500	5,500	484	121,00
6	24	28	26	4	2	0,100	0,950	0,025000	2,600	676	67,60
7	28	36	32	8	1	0,050	1,000	0,006250	1,600	1024	51,20
				Totali	20	1			18		364,40

c) Se possibile, calcoli la mediana.

La mediana è il valore che bipartisce la popolazione, ovvero, una volta ordinate le osservazioni si ricerca quella che lascia alla sua destra la metà delle osservazioni meno una. Nel caso in esame non vi sono le osservazioni, in quanto queste sono raccolte in classi, pertanto la mediana si indica come il valore che bipartisce l'area dell'istogramma. Dal calcolo delle frequenze cumulate (F_i) si vede come la mediana cada nella 4 classe (prima classe a superare lo 0,5). Per determinare l'esatto valore basta imporre che l'area presente nella classe 5 sia sufficiente a raggiungere il valore di 0.5. Si ottiene quindi il seguente conto:

$$(q_2-16)*0.05=(0.5-0.4)\Rightarrow q_2-16=0.1/0.05\Rightarrow q_2=2+16=18$$

d) Se possibile, si calcoli la varianza.

La varianza nel caso siano presenti osservazioni raggruppate in classi si calcola utilizzando come modalità i valori centrali delle classi (c_i). Nella tabella alla fine del punto b) è stato riportato il calcolo della varianza utilizzando la formula abbreviata.

$$\sigma^2=\left(\sum_{i=1}^{M} c_i^2 * f_i\right)-\left(\sum_{i=1}^{M} c_i * f_i\right)^2=364,40-18^2=40,4$$

Il risultato è stato ottenuto calcolando la media (somma colonna $c_i f_i$) e della media dei quadrati dei valori centrali (ultime due colonne della tabella).

Esercizio 2)

a)Completi la tabella con i dati mancanti.

La tabella si completa tenendo conto che la somma delle colonne deve coincidere con i dati illustrati nell'esercizio 1. Si noti che nella nuova formulazione alcune classi di modalità sono state aggregate.

		Y:tempo di incubazione				
		fino a 12 gg	da 12 a 16 gg (16 escluso)	da 16 a 20 gg (20 esluso)	da 20 a 24 gg (24 escluso)	24 gg e oltre
X:Genere	Maschile	1	2	2	3	2
	Femminile	2	3	2	2	1

b) Se possibile, indichi e calcoli per la serie ottenuta un opportuno indice di posizione

Una serie bivariata ottenuta misurando almeno un carattere qualitativo non ordinabile ammette un solo indice sintetico di posizione: la moda. La moda di una bi-variata si ottiene valutando la o le modalità della serie corrispondenti alla frequenza (assoluta o relativa) maggiore. Nel caso in esame la frequenza assoluta maggiore è 3 cui corrispondono due modalità (distribuzione bi-modale)

(Maschile; Da 20 a 24 gg) e (Femminile; Da 12 a 16 gg)

c) Se possibile, indichi e calcoli per la serie ottenuta un opportuno indice di variabilità

Una serie bivariata ottenuta misurando almeno un carattere qualitativio non ordinabile non ammette indice sintetici di variabilità in quanto non è possibile ottenere il concetto di distanza in maniera oggettiva.

d) Verifichi, ad un opportuno livello di significatività, se i due caratteri si possono dire indipendenti.

Per verificare se i due caratteri sono indipendenti si può effettuare un test di ipotesi volto a verificare se le frequenze delle osservazioni rilevate nel campione sono sufficientemente vicine (ad un determinato livello di significatività) a quelle teoriche ottenute dall'ipotesi di indipendeza. Il test viene fatto sfruttando la distribuzione limite dello stimatore di Pizzetti Pearson che viene ad essere un chi quadrato avente gradi di libertà pari a quelli del numero di parametri liberi della distribuzione teorica.

Il primo punto di questa procedura consiste nel calcolo delle frequenze teoriche ricavate dalle frequenze marginali ottenute orlando la tabella delle frequenze .

$$\hat{n}_{i,j} = n\,\hat{p}_{i,j} = \frac{n_{i,+}\,n_{+,j}}{n} \quad \forall i,j$$

nella tabella si ripotano le frequenze marginali e quelle teoriche fra parentesi

		Y:tempo di incubazione					
		fino a 12 gg	da 12 a 16 gg (16 escluso)	da 16 a 20 gg (20 esluso)	da 20 a 24 gg (24 escluso)	24 gg e oltre	Totali
X:Genere	Maschile	1 (1.5)	2 (2.5)	2 (2)	3 (2.5)	1 (1.5)	10
	Femminile	2 (1.5)	3 (2.5)	2 (2)	2 (2.5)	2 (1.5)	10
Totali		3	5	4	5	3	20

A questo punto è possibile valutare la convergenza dello stimatore di Pizzetti Pearson, possibile solo se tutte le frequenze teoriche sono superiori a 5. Constatato che la condizione non è verificata si può concludere che non è possibile ricevare l'informazione richiesta dalle osservazioni fornite.

Esercizio 3)

Nel testo si effettuano divese misure di una grandezza nota. Possiamo modellare questo problema come l'estrazione di una variabile casuale X avente distribuzione ignota e valore atteso 5.
Si sono effettuate N= 11 estrazioni aventi M=4 modalità

a) stimare puntualmente la varianza.

Continuando con il modello precedentemente fatto il punto richiede di stimare lo scarto quadratico medio ovvero la radice quadrata di Var[X]. Questa stima può essere effettuata ricordando che la varianza viene stimata correttamente mediante la varianza campionaria (s^2). Il calcolo di s^2 in presenza di osservazioni ripetute, (frequenze assolute maggiori di uno) è dato dalla seguente:

$$s^2=\frac{\sum_{i=1}^{M} n_i\left(x_i-\bar{x}\right)^2}{N-1}=\frac{0.0008}{10}=0.00008\Rightarrow S=0.00894$$

Il calcolo della varianza è stato fatto utilizzando la seguente tabella

i	x_i	n_i	$x_i n_i$	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$n_i(x_i - \bar{x})^2$
1	4,98	1	4,9800	-0,0200	0,0004	0,00040
2	4,99	1	4,9900	-0,0100	0,0001	0,00010
3	5,00	6	30,0000	0,0000	0,0000	0,00000
4	5,01	3	15,0300	0,0100	0,0001	0,00030
	Totali	11	55,0000			0,00080

b) stimare per intervallo la varianza.
La stima della varianza per intervallo si ha considerando la distribuzione di partenza gaussiana ed n grande. Nel caso in esame considerare la distribuzione di partenza gaussiana non introduce un errore elevato (trattasi di errori di misura quindi nello specifico simmetrici) per quanto riguarda la dimensione del campione è possibile ritenere $n = 11$ una dimensione sufficiente.

Validate le ipotesi si ha che la stima per intervallo della varianza è data dalla $\left[\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)};\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right]$

ponendo un livello del 5 % si ha che: $Var[X]\in\left[\frac{10\cdot 0.00008}{20.5};\frac{10\cdot 0.00008}{3.25}\right]=[0.000039;0.000246]$

Pertanto l'intevallo richiesto è: $sqm=\sqrt{Var[X]}\in\left[\sqrt{0.000039};\sqrt{0.000246}\right]=[0.0062;0.01569]$

Esercizio 4)

Si noti come l'esercizio fissa la probabilità degli eventi elementari e richiede il computo delle probabilità di eventi complessi, pertanto richiede l'applicazione della definizione assiomatica di probabilità.

*a) Il candiato calcoli Probabilità dell'*evento E_2 condizionato E_1

La probabilità richiestà $P(E_2 \mid E_1)$ viene calcota immediatamente ricordando che gli eventi statisticamente indipendenti sono quelli per cui il verificarsi di un evento non altera la probabilità di verificarsi dell'altro. Pertanto si ha che $P(E_2 \mid E_1)=P(E_2) = 1/3$.

b) Il candiato calcoli Probabilità dell'evento E_1 intersezione E_2.

La probabilità dell'evento intersezione di due eventi indipendenti (ovvero che i due eventi si verifichino entrambi) è data dal prodotto delle due probabilità. Si ha infatti

$$P(E_1\cap E_2)=P(E_1)P(E_2)=\frac{1}{2}\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$$

Si noti come lo stesso risultato poteva essere raggiunto elaborando la definzione di probabilità condizionata:

$$P(E_2|E_1)=P\frac{(E_1\cap E_2)}{P(E_1)}\Rightarrow P(E_2|E_1)P(E_1)=P(E_1\cap E_2)\quad \underset{E_1,E_2\ indip.}{\Rightarrow}\quad P(E_2)P(E_1)=P(E_1\cap E_2)$$

c) Il candiato calcoli la Probabilità dell'evento E_1 unito E_2..

Note le probabilità degli eventi elementari e dell'evento intersezione si ha che

$$P(E_1\cup E_u)=P(E_1)+P(E_2)-P(E_1\cap E_2)=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}=\frac{3+2-1}{6}=\frac{2}{3}$$

Matematica e Statistica (A-E, F-O, P-Z)

Prova d'esame (18/02/2011)

Università di Verona - Laurea in Biotecnologie - A.A. 2010/11

$\boxed{\textbf{Tema B}}$

Matematica e Statistica (A-E, F-O, P-Z)

Prova di $\boxed{\text{MATEMATICA (A-E, F-O, P-Z)}}$ (18/02/2011)

Università di Verona - Laurea in Biotecnologie - A.A. 2010/11

Cognome-Nome ______________________ (IN STAMPATELLO) Matr. __________ (VR ······) Corso ________ (A-E / F-O / P-Z)

Tema B

*** *Svolgere prima i punti* (a) *di* *<u>tutti</u>* *gli esercizi; solo in seguito i punti* (b). *** **▶▶▶▶ Test a quiz sul retro ▶▶▶▶**

(1) (a) Nel piano cartesiano (x, y) determinare, in forma parametrica e cartesiana, la retta r passante per il punto $P(1, 3)$ e ortogonale al vettore $\vec{v} = (2, -1)$. Vedendo poi il piano (x, y) come il piano orizzontale dello spazio (x, y, z), determinare (sempre sia in forma parametrica che cartesiana) il piano Π passante per il punto $A(1, 0, 2)$ e contenente r.

(b) Idem, solo che stavolta si chiedono la retta r' del piano (x, y) passante per P e parallela a $\vec{v}$, e il piano Π' dello spazio (x, y, z) passante per A e ortogonale a r'.

(2) Studiare l'andamento di $f(x) = \dfrac{1+x}{1+\log|x|}$, e tracciarne il grafico.(1)

(3) (a) Calcolare $\displaystyle\int_0^1 \left(\frac{x^2+x}{x+2} - 3e^{\sqrt{x}} \right) dx$.

(b) Disegnare $S = \{(x, y) : y + 1 \le x \le 5,\ 2 \le xy \le 3x - 1\}$, e calcolarne l'area.

(4) (a) Data $g(x, y) = (4x^2 + y^2 - 4)(y - 1)$, determinarne dominio, zeri, segno e limiti interessanti, disegnando i risultati. Trovarne i punti stazionari ed eventuali estremi locali. Determinare poi il gradiente di g in $(-1, -1)$, e il piano tangente al grafico di g sopra tale punto.

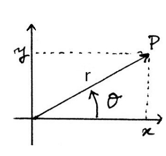
(b) Disegnare $\mathcal{C} = \{(x, y) : x^2 + y^2 \le 1\ ,\ y \le 0\}$, e calcolare gli estremi assoluti di g su $\mathcal{C}$.(2)

(5) Trovare tutte le soluzioni $y(x)$ dell'equazione differenziale $e^{-2x}\, y' = 4(y-1)^2$ e tutte quelle dell'equazione differenziale $y'' + 2y' + 2y = 2 - e^{-2x}$, dicendo se ce n'è qualcuna in comune. Dire infine, per ciascuna delle due equazioni, quali soluzioni hanno il grafico passante per l'origine.

---

(1) Non è necessario lo studio della convessità.

(2) Per descrivere la semicirconferenza si usi l'angolo polare θ, ovvero $(x, y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ con $r = 1$.



Matematica e Statistica (A-E)

Prova di STATISTICA (A-E) - Gobbi (18/02/2011)

Università di Verona - Laurea in Biotecnologie - A.A. 2010/11

Cognome-Nome ______________________ Matr. ____________

IN STAMPATELLO VR ······

Tema B

**** Per ogni calcolo effettuato scrivere anche la formula teorica da utilizzare **** **▶▶▶▶ Test a quiz sul retro ▶▶▶▶**

ESERCIZIO 1

La tabella seguente riporta le quantità di nitrati (in milligrammi per litro) presenti in 50 campioni d'acqua rilevati da una fonte alpina..

Quantità di nitrati (in mg per litro)	Frequenza
0 – 5	9
5 – 10	12
10 – 20	10
20 – 50	19

Sulla distribuzione di frequenze presentata in tabella, calcolare:
a) la media aritmetica e la media geometrica;
b) la mediana e la moda;
c) disegnare il grafico della distribuzione di frequenze.

ESERCIZIO 2

L'ammontare in Megawatt di energia elettrica prodotta dagli impianti eolici in Italia negli ultimi anni è riassunto dal prospetto sottostante.

Anno	Megawatt eolico prodotti
2007	1.000
2008	2.500
2009	4.000
2010	8.000

Calcolare:
a) i numeri indice prendendo come base fissa l'anno 2008;
b) i numeri indice a base mobile;
c) i numeri indice a base fissa 2009 tramite un opportuno coefficiente di raccordo;
d) la media dei numeri indice a base mobile, indicando il tipo di media utilizzato.

ESERCIZIO 3

	A	B	C
I	40	5	15
II	0	20	60
III	10	35	15

Sui dati esposti in tabella calcolare:
a) la probabilità che si verifichi l'evento I o A (l'uno o l'altro);
b) la probabilità che si verifichino insieme II e B (l'uno e l'altro);
c) la probabilità che si verifichi I o II (l'uno o l'altro);
d) la probabilità dell'evento II sapendo che si è verificato l'evento C ovvero P(II/C).

Matematica e Statistica (F-O, P-Z)

Prova di STATISTICA (F-O, P-Z) - Di Palma (18/02/2011)

Università di Verona - Laurea in Biotecnologie - A.A. 2010/11

Cognome-Nome ______________________ Matr. ____________

IN STAMPATELLO VR ······

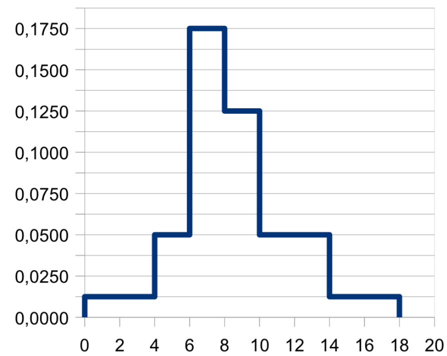
Tema B

**** Attenzione: compiti illeggibili non verranno corretti ! ****

▶▶▶▶ Test a quiz sul retro ▶▶▶▶

Esercizio 1)

Si vuole valutare il tempo di incubazione (espresso in giorni) di un agente virale. Da un osservazione su di una popolazione di 20 elementi si è ottenuto l'istogramma nella figura a lato.



N.b. L'estremo superiore delle singole classi di modalità è da ritenersi escluso

Il candidato

a) Determini la tipologia del carattere.
b) Fornisca una rappresentazione tabellare dei dati (mettendo in risalto le frequenze assolute).
c) Se possibile, calcoli la mediana.
d) Se possibile, calcoli la varianza.

Esercizio 2)

Per verificare la difficoltà di un corso di laurea si è voluto monitorare il numero di anni fuori corso che un laureato magistrale ha maturato durante il suo percorso di studi. I dati relativi ad un campione di 100 laureati è riassunto nella seguente tabella a doppia entrata.

		Y: anni fuori corso laurea triennale				
		0	**1**	**2**	**3**	**Totali**
X:Anni fuori corso magistrale	**0**		6	3		10
	1	6		10	10	
	2	3	10		10	40
	Totali		40	30	20	100

Il candidato

a) Completi la tabella con i dati mancanti.
b) Se possibile, indichi e calcoli per la serie ottenuta un opportuno indice di posizione
c) Se possibile, indichi e calcoli per la serie ottenuta un opportuno indice di variabilità
d) Se possibile, verifichi, ad un opportuno livello di significatività, se i due caratteri si possono dire indipendenti.

Esercizio 3)

Si supponga di modellare mediante una v.c. W il numero di anni fuori corso totali (triennio + biennio) accumulati da un laureato specialistico. Date le osservazioni dell'Esercizio 2 il candidato stimi puntualmente e per intervallo il valore atteso di W.

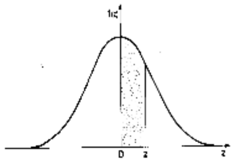
Esercizio 4)

Si considerino i due eventi E_1 ed E_2. Sapendo che i due eventi sono incompatibili e che $P(E_1) = 1/2; P(E_2) = 1/3$. Il candiato calcoli le probabilità dei seguenti eventi

a) evento E_1 intersezione E_2
b) evento E_2 condizionato E_1
c) evento E_2 unito E_1.

Tavola I

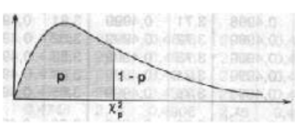
Integrali della variabile casuale normale standardizzata z



z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2517	0.2549
0.7	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4761	0.4767
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
2.1	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4854	0.4857
2.2	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884	0.4887	0.4890
2.3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
2.4	0.4918	0.4920	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936
2.5	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952
2.6	0.4953	0.4955	0.4956	0.4957	0.4959	0.4960	0.4961	0.4962	0.4963	0.4964
2.7	0.4965	0.4966	0.4967	0.4968	0.4969	0.4970	0.4971	0.4972	0.4973	0.4974
2.8	0.4974	0.4975	0.4976	0.4977	0.4977	0.4978	0.4979	0.4979	0.4980	0.4981
2.9	0.4981	0.4982	0.4982	0.4983	0.4984	0.4984	0.4985	0.4985	0.4986	0.4986
3.0	0.4987	0.4987	0.4987	0.4988	0.4988	0.4989	0.4989	0.4989	0.4990	0.4990

Tavola II

Integrali della variabile casuale chi quadrato a v gradi di libertà.



ν \ p	0,005	0,01	0,025	0,05	0,10	0,25	0,50	0,75	0,90	0,95	0,975	0,99	0,995	0,999
1	0,0000	0,0002	0,0010	0,0039	0,0158	0,102	0,455	1,32	2,71	3,84	5,02	6,63	7,88	10,8
2	0,0100	0,0201	0,0506	0,103	0,211	0,575	1,39	2,77	4,61	5,99	7,38	9,21	10,6	13,8
3	0,0717	0,115	0,216	0,352	0,584	1,21	2,37	4,11	6,25	7,81	9,35	11,3	12,8	16,3
4	0,207	0,297	0,484	0,711	1,06	1,92	3,36	5,39	7,78	9,49	11,1	13,3	14,9	18,5
5	0,412	0,554	0,831	1,15	1,61	2,67	4,35	6,63	9,24	11,1	12,8	15,1	16,7	20,5
6	0,676	0,872	1,24	1,64	2,20	3,45	5,35	7,84	10,6	12,6	14,4	16,8	18,5	22,5
7	0,989	1,24	1,69	2,17	2,83	4,25	6,35	9,04	12,0	14,1	16,0	18,5	20,3	24,3
8	1,34	1,65	2,18	2,73	3,49	5,07	7,34	10,2	13,4	15,5	17,5	20,1	22,0	26,1
9	1,73	2,09	2,70	3,33	4,17	5,90	8,34	11,4	14,7	16,9	19,0	21,7	23,6	27,9
10	2,16	2,56	3,25	3,94	4,87	6,74	9,34	12,5	16,0	18,3	20,5	23,2	25,2	29,6
11	2,60	3,05	3,82	4,57	5,58	7,58	10,3	13,7	17,3	19,7	21,9	24,7	26,8	31,3
12	3,07	3,57	4,40	5,23	6,30	8,44	11,3	14,8	18,5	21,0	23,3	26,2	28,3	32,9
13	3,57	4,11	5,01	5,89	7,04	9,30	12,3	16,0	19,8	22,4	24,7	27,7	29,8	34,5
14	4,07	4,66	5,63	6,57	7,79	10,2	13,3	17,1	21,1	23,7	26,1	29,1	31,3	36,1
15	4,60	5,23	6,26	7,26	8,55	11,0	14,3	18,2	22,3	25,0	27,5	30,6	32,8	37,7
16	5,14	5,81	6,91	7,96	9,31	11,9	15,3	19,4	23,5	26,3	28,8	32,0	34,3	39,3
17	5,70	6,41	7,56	8,67	10,1	12,8	16,3	20,5	24,8	27,6	30,2	33,4	35,7	40,8
18	6,26	7,01	8,23	9,39	10,9	13,7	17,3	21,6	26,0	28,9	31,5	34,8	37,2	42,3
19	6,84	7,63	8,91	10,1	11,7	14,6	18,3	22,7	27,2	30,1	32,9	36,2	38,6	43,8
20	7,43	8,26	9,59	10,9	12,4	15,5	19,3	23,8	28,4	31,4	34,2	37,6	40,0	45,3
21	8,03	8,90	10,3	11,6	13,2	16,3	20,3	24,9	29,6	32,7	35,5	38,9	41,4	46,8
22	8,64	9,54	11,0	12,3	14,0	17,2	21,3	26,0	30,8	33,9	36,8	40,3	42,8	48,3
23	9,26	10,2	11,7	13,1	14,8	18,1	22,3	27,1	32,0	35,2	38,1	41,6	44,2	49,7
24	9,89	10,9	12,4	13,8	15,7	19,0	23,3	28,2	33,2	36,4	39,4	43,0	45,6	51,2
25	10,5	11,5	13,1	14,6	16,5	19,9	24,3	29,3	34,4	37,7	40,6	44,3	46,9	52,6
26	11,2	12,2	13,8	15,4	17,3	20,8	25,3	30,4	35,6	38,9	41,9	45,6	48,3	54,1
27	11,8	12,9	14,6	16,2	18,1	21,7	26,3	31,5	36,7	40,1	43,2	47,0	49,6	55,5
28	12,5	13,6	15,3	16,9	18,9	22,7	27,3	32,6	37,9	41,3	44,5	48,3	51,0	56,9
29	13,1	14,3	16,0	17,7	19,8	23,6	28,3	33,7	39,1	42,6	45,7	49,6	52,3	58,3
30	13,8	15,0	16,8	18,5	20,6	24,5	29,3	34,8	40,3	43,8	47,0	50,9	53,7	59,7

$\boxed{\text{Tema B}}$ - Soluzioni

$\boxed{\text{MATEMATICA (A-E, F-O, P-Z)}}$

(1) (a) La retta r del piano (x,y) ortogonale al vettore $\vec{v}=(2,-1)$ avrà forma cartesiana del tipo $2x-y+k=0$, e il passaggio per $P(1,3)$ dà $k=1$, dunque $2x-y+1=0$; poiché poi un vettore ortogonale a $\vec{v}$ (dunque parallelo a r) è $(1,2)$, una forma parametrica sarà $r=\{(1,3)+t(1,2):t\in\mathbb{R}\}=\{(1+t,3+2t):t\in\mathbb{R}\}$. • Il piano Π passante per il punto $A(1,0,2)$ e contenente r sarà parallelo al vettore $\vec{v}=(1,2,0)$ e conterrà anche il suo punto $P(1,3,0)$, da cui un altro vettore parallelo a Π è $(1,3,0)-(1,0,2)=(0,3,-2)$: dunque una forma parametrica è $\Pi=\{(1,0,2)+s(1,2,0)+t(0,3,-2):s,t\in\mathbb{R}\}=\{(1+s,2s+3t,2-2t):s,t\in\mathbb{R}\}$; ed eliminando i parametri s e t da $(x,y,z)=(1+s,2s+3t,2-2t)$ si ricava la forma cartesiana $4x-2y-3z+2=0$.

(b) La retta r' del piano cartesiano (x,y) passante per il punto $P(1,3)$ e parallela al vettore $\vec{v}=(2,-1)$ ha forma parametrica $r'=\{(1,3)+t(2,-1):t\in\mathbb{R}\}=\{(1+2t,3-t):t\in\mathbb{R}\}$; da $(x,y)=(1+2t,3-t)$ si ricava poi $t=3-y$, da cui la forma cartesiana $x+2y-7=0$. • Il piano Π' passante per il punto $A(1,0,2)$ e ortogonale a r' dovrà essere anche ortogonale a $\vec{v}=(2,-1,0)$, da cui la forma cartesiana del tipo $2x-y+k=0$, e il passaggio per A dà $k=-2$, da cui $2x-y-2=0$. Due vettori ortogonali a $\vec{v}$ (dunque paralleli a Π') e non paralleli tra loro sono ad esempio $(1,2,0)$ e $(0,0,1)$, da cui la forma parametrica $\Pi'=\{(1,0,2)+s(1,2,0)+t(0,0,1):s,t\in\mathbb{R}\}=\{(1+s,2s,2+t):s,t\in\mathbb{R}\}$.

(2) (Figura 1) La funzione $f(x)=\frac{1+x}{1+\log|x|}$ è definita per $x\neq 0$ e $x\neq\mp\frac{1}{e}$, ed è derivabile infinite volte nel suo dominio; non ha parità ne' periodicità. Si ha $f(x)=0$ quando $x=-1$; per quanto riguarda il segno, il denominatore è >0 quando $|x|>\frac{1}{e}$ ovvero quando $x<-\frac{1}{e}$ oppure $x>\frac{1}{e}$, e il numeratore per $x>-1$, dunque vale $f(x)>0$ per $-1<x<-\frac{1}{e}$ e per $x>\frac{1}{e}$. I limiti interessanti valgono $\lim_{x\to\mp\infty}f(x)=\mp\infty$ (è in forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$, ma basta ricordare che $\lim_{x\to+\infty}\frac{\log x}{x}=0$ oppure applicare de l'Hôpital), $\lim_{x\to 0}f(x)=0^-$, $\lim_{x\to -\frac{1}{e}\mp}f(x)=\pm\infty$ e $\lim_{x\to\frac{1}{e}\mp}f(x)=\mp\infty$. In particolare notiamo che $x=0$ è un punto di discontinuità eliminbile, ponendo $f(0):=0$. Derivando (e ricordando che la derivata di $\log|x|$ è $\frac{1}{x}$) si ottiene $f'(x)=\frac{(1+\log|x|)-(x+1)\frac{1}{x}}{(1+\log|x|)^2}=\frac{\log|x|-\frac{1}{x}}{(1+\log|x|)^2}$, pertanto vale $f'(x)=0$ se e solo se $\log|x|=\frac{1}{x}$, e un confronto grafico mostra che ciò accade in un solo punto x_0 con $1<x_0<2$ (vale in realtà $x_0\sim 1{,}8$); si ha poi $f'(x)>0$ se e solo se $\log|x|>\frac{1}{x}$, e sempre il confronto grafico mostra che ciò accade solo per $x<-\frac{1}{e}$, $-\frac{1}{e}<x<0$ e $x>x_0$. Ne ricaviamo che $x=0$ è un punto di massimo relativo singolare, e che $x=x_0$ è un punto di minimo relativo (vale $f(x_0)=\frac{x_0+1}{1+\log|x_0|}=\frac{x_0+1}{1+\frac{1}{x_0}}=x_0\sim 1{,}8$).

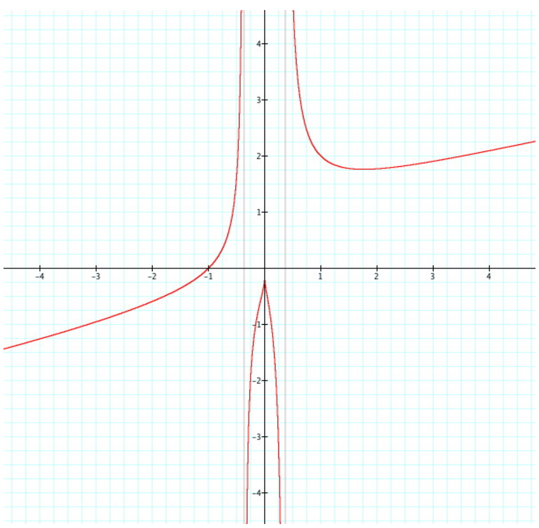
(3) (a) Posto $x=t^2$, vale $\int_0^1(\frac{x^2+x}{x+2}-3e^{\sqrt{x}})\,dx=\int_0^1\frac{(x-1)(x+2)+2}{x+2}\,dx-6\int_0^1 t\,e^t\,dt=(\frac{1}{2}x^2-x+2\log|x+2|]_0^1-6((t-1)e^t]_0^1=(2\log 3-\frac{1}{2})-(2\log 2)-6(0-(-1))=2(\log 3-\log 2)-\frac{13}{2}\sim -5{,}7$.

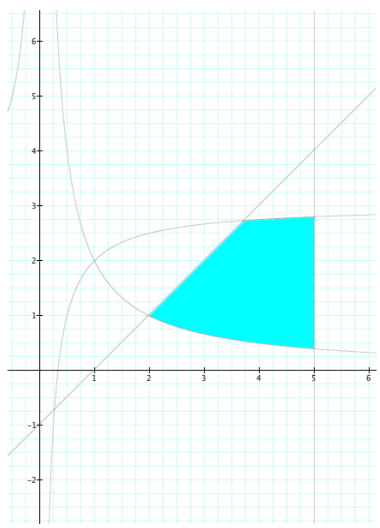
(b) (Figura 2) L'intersezione tra i grafici $y=x-1$ e $y=\frac{3x-1}{x}$ che ci interessa avviene per $x=\sqrt{3}+2\sim 3{,}7$, dunque la zona di piano $S=\{(x,y):y+1\leq x\leq 5,\ 2\leq xy\leq 3x-1\}$ ha area $\int_2^{\sqrt{3}+2}(x-1)\,dx+\int_{\sqrt{3}+2}^5\frac{3x-1}{x}\,dx+\int_5^2\frac{2}{x}\,dx=(\frac{1}{2}x^2-x]_2^{\sqrt{3}+2}+(3x-\log|x|]_{\sqrt{3}+2}^5+(2\log|x|]_5^2=(\frac{3}{2}+\sqrt{3})-(0)+(15-\log 5)-(3\sqrt{3}+6-\log(2+\sqrt{3}))+(2\log 2)-(2\log 5)=\frac{21}{2}-2\sqrt{3}+\log(2+\sqrt{3}))+2\log 2-3\log 5\sim 4{,}9$.

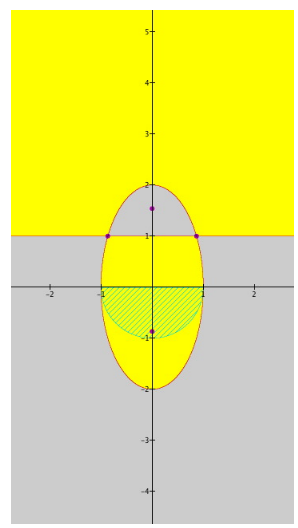
(4) (a) (Figura 3) Il dominio di $g(x,y)=(4x^2+y^2-4)(y-1)$ è tutto il piano $\mathbb{R}^2$; si tratta di una funzione differenziabile, in quanto le derivate parziali $\frac{\partial g}{\partial x}=8x(y-1)$ e $\frac{\partial g}{\partial y}=1(4x^2+y^2-4)+(y-1)2y=4x^2+3y^2-2y-4$ risultano continue. La funzione si annulla o quando $y=1$ (retta orizzontale) o quando $4x^2+y^2-4=0$, ovvero $\frac{x^2}{1}+\frac{y^2}{4}=1$ (ellisse di centro $(0,0)$, centrata e simmetrica rispetto agli assi coordinati, e di semiassi rispettivamente 1 e 2); il fattore $y-1$ è >0 sopra la retta, il fattore $4x^2+y^2-4$ è >0 fuori dall'ellisse, e il segno di g ne segue per prodotto. L'unico limite interessante è quello in ∞_2, che non esiste: infatti, tendendo a ∞_2 lungo le rette $y=1$ e $y=0$ i limiti sono rispettivamente 0 e $-\infty$. Dal sistema $\frac{\partial g}{\partial x}=\frac{\partial g}{\partial y}=0$ si ricavano i quattro punti stazionari $A(0,-\frac{\sqrt{13}-1}{3})$, $B(0,\frac{\sqrt{13}+1}{3})$ e $C_\mp(\mp\frac{\sqrt{3}}{2},1)$ (si noti che $C_\mp$ sono le intersezioni tra retta e ellisse). La matrice hessiana di g risulta $\mathsf{H}_g(x,y)=\begin{pmatrix}8(y-1) & 8x\\ 8x & 6y-2\end{pmatrix}$; essendo $\mathsf{H}_g(A)=\begin{pmatrix}-\frac{8}{3}(\sqrt{13}+2) & 0\\ 0 & -2\sqrt{13}\end{pmatrix}$, $\mathsf{H}_g(B)=\begin{pmatrix}\frac{8}{3}(\sqrt{13}-2) & 0\\ 0 & 2\sqrt{13}\end{pmatrix}$, $\mathsf{H}_g(C_\mp)=\begin{pmatrix}0 & \mp 4\sqrt{3}\\ \mp 4\sqrt{3} & 4\end{pmatrix}$, il criterio dell'hessiano ci dice subito che A e B sono rispettivamente punti di massimo e minimo locale, mentre $C_\mp$ sono due punti di sella (cosa, quest'ultima, che era già evidente guardando lo studio del segno). Il gradiente di g in $(-1,-1)$ è il vettore $\nabla g(-1,-1)=(\frac{\partial g}{\partial x}(-1,-1)\,,\frac{\partial g}{\partial y}(-1,-1))=(16,5)$; il piano tangente al grafico di g sopra $(-1,-1)$ è $z = g(-1,-1) + \frac{\partial g}{\partial x}(-1,-1)\cdot(x-(-1)) + \frac{\partial g}{\partial y}(-1,-1)\cdot(y-(-1))$, ovvero $16x + 5y - z + 19 = 0$.

(b) (Figura 3) L'insieme $\mathcal{C} = \{(x,y) : x^2 + y^2 \le 1\,,\ y \le 0\}$ è il semidisco visibile in figura. Per la ricerca degli estremi assoluti di g su $\mathcal{C}$ (che esistono in base a Weierstrass) dividiamo $\mathcal{C}$ nelle zone $\mathcal{C}_0$ dei suoi punti interni; $\mathcal{C}_1$ del lato verticale privato dei vertici; $\mathcal{C}_2$ della semicirconferenza privata dei vertici; e $\mathcal{C}_3 = \{D(1,0),\, E(-1,0)\}$ dei vertici. • Se massimo o minimo assoluti fossero assunti in un punto di $\mathcal{C}_0$, tale punto dovrebbe essere in particolare stazionario per g: come visto prima ce ne sono quattro, e l'unico dentro $\mathcal{C}_0$ è $A(0, -\frac{\sqrt{13}-1}{3})$. • Sul lato $\mathcal{C}_1$ la funzione vale $\varphi_1(x) := g(x,0) = 4(1-x^2)$ con $-1 < x < 1$. Se massimo o minimo assoluti fossero assunti in un punto di $\mathcal{C}_1$, in tale punto dovrebbe annullarsi la derivata $\varphi_1'(x) = -8x$: ciò avviene per $x = 0$, e si ottiene dunque l'origine $O(0,0)$. • Per descrivere la semicirconferenza $\mathcal{C}_2$ si può usare l'angolo polare θ: su essa la funzione vale dunque $\varphi_2(\theta) := g(\cos\theta, \sin\theta) = (\sin\theta - 1)(\sin^2\theta + 4\cos^2\theta - 4) = 3(1-\sin\theta)\sin^2\theta$ con $\pi < \theta < 2\pi$. La derivata $\varphi_2'(\theta) = 3(\cos\theta\sin^2\theta + (1-\sin\theta)(-2\sin\theta\cos\theta)) = 3\sin\theta\cos\theta(3\sin\theta - 2)$ si annulla quando $\sin\theta = 0$ o $\cos\theta = 0$ o $\sin\theta = \frac{2}{3}$, che in $\mathcal{C}_2$ dà luogo al solo punto $F(0,-1)$. • Infine, i due punti D, E di $\mathcal{C}_3$ vanno tenuti entrambi presenti. • Gli estremi assoluti di g su $\mathcal{C}$ potranno dunque assunti solo nell'ambito dei cinque punti A, O, F, D, E: poiché $g(A) = \frac{70+26\sqrt{13}}{27} \sim 6{,}1$, $g(O) = 4$, $g(F) = 6$ e $g(D) = g(E) = 0$, il massimo assoluto di g su $\mathcal{C}$ è $\frac{70+26\sqrt{13}}{27}$ (assunto in A) e il minimo assoluto è 0 (assunto in D e E).

(5) L'equazione differenziale $e^{-2x}\,y' = 4(y-1)^2$ è del primo ordine a variabili separabili. Tenuto conto della soluzione costante $y(x) \equiv 1$, separando le variabili si ottiene $\frac{1}{(y-1)^2}\,dy = 4e^{2x}\,dx$, da cui integrando $-\frac{1}{y-1} = 2e^{2x} + k$ con $k \in \mathbb{R}$, da cui, a conti fatti, si ricava $y(x) = \frac{1}{k-2e^{2x}} + 1$ con $k \in \mathbb{R}$. • L'equazione differenziale $y'' + 2y' + 2y = 2 - e^{-2x}$ è del secondo ordine, lineare a coefficienti costanti. L'equazione caratteristica $t^2 + 2t + 2 = 0$ ha soluzioni $t = -1 \mp i$, dunque lo spazio di soluzioni dell'equazione omogenea associata è $y(x) = e^{-x}(A\cos x + B\sin x)$ al variare di $A, B \in \mathbb{R}$. Una soluzione particolare per la completa con 2 è la costante $\tilde{y}_1(x) \equiv 1$, una particolare per la completa con $-e^{-2x}$ è $\tilde{y}_2(x) = -\frac{1}{2}e^{2x}$, dunque lo spazio di soluzioni dell'equazione completa è $y(x) = e^{-x}(A\cos x + B\sin x) + 1 - \frac{1}{2}e^{-2x}$ al variare di $A, B \in \mathbb{R}$. • Confrontando le due famiglie di soluzioni, è chiaro che l'unica in comune è $y(x) = 1 - \frac{1}{2}e^{-2x}$ (ottenuta rispettivamente per $k = 0$ e per $A = B = 0$). • Imponendo che $y(0) = 0$ si ottiene rispettivamente $0 = \frac{1}{k-2} + 1$ e $0 = A + 1 - \frac{1}{2}$, da cui $k = 1$ e $A = -\frac{1}{2}$: le soluzioni il cui grafico passa per l'origine sono dunque $y(x) = \frac{1}{1-2e^{2x}} + 1$, e $y(x) = e^{-x}(-\frac{1}{2}\cos x + B\sin x) + 1 - \frac{1}{2}e^{-2x}$ con $B \in \mathbb{R}$.







1. Il grafico della funzione dell'ex. 2. **2.** L'insieme dell'ex. (3.b). **3.** Ex. (4.b): zeri (rosso), segno positivo (giallo) e negativo (grigio) della funzione g; i punti stazionari (porpora); il semidisco $\mathcal{C}$ (azzurro).

ESERCIZIO 1

La tabella seguente riporta le quantità di nitrati (in milligrammi per litro) presenti in 50 campioni d'acqua rilevati da una fonte alpina.
Sulla distribuzione di frequenze presentata in tabella, calcolare:
a) la media aritmetica e la media geometrica;
b) la mediana e la moda;
c) disegnare il grafico della distribuzione di frequenze.

X	f	X_c	X_c*f	$\ln(X_c)$	$\ln(X_c)$*f	ampiezza	dens f
0 - 5	9	2,5	22,5	0,9163	8,24662	5	1,8
5 - 10	12	7,5	90	2,0149	24,1788	5	2,4
10 - 20	10	15	150	2,7081	27,0805	10	1
20 - 50	19	35	665	3,5553	67,5516	30	0,6333
	50		**927,5**		**127,0576**		

a) Calcolo della media aritmetica e geometrica:

M(X) = $\dfrac{\Sigma\, x * f}{\Sigma\, f} = \dfrac{927,5}{50} =$ **18,55**

$\ln(Mg(X)) = \dfrac{\Sigma \ln(x) * f}{\Sigma\, f} = \dfrac{127,0576}{50} = 2,5412$ **Mg(X) =** $e^{2,5412} =$ **12,694**

b) Calcolo della mediana e della moda:

Poiché i dati sono divisi in classi, il calcolo della mediana si effettua tramite il seguente procedimento:

Si individua innanzitutto la classe mediana:
x25° =< classe mediana =< x26° : **classe mediana = 10-20**

La numerosità totale dei dati è pari (50), perciò si utilizzeranno le seguenti due formule per trovare gli estremi inferiore e superiore della mediana:

$$k_1 = x_s + \frac{x_{s+1} - x_s}{f_s}\left(\frac{N}{2} - \sum_{j=1}^{s-1} f_j\right)$$

$$k_2 = x_s + \frac{x_{s+1} - x_s}{f_s}\left(\frac{N}{2} + 1 - \sum_{j=1}^{s-1} f_j\right)$$

Perciò:

$$k_1 = 10 + \frac{20-10}{10}\left(\frac{50}{2} - 21\right) = 14$$

$$k_2 = 10 + \frac{20-10}{10}\left(\frac{50}{2} + 1 - 21\right) = 15$$

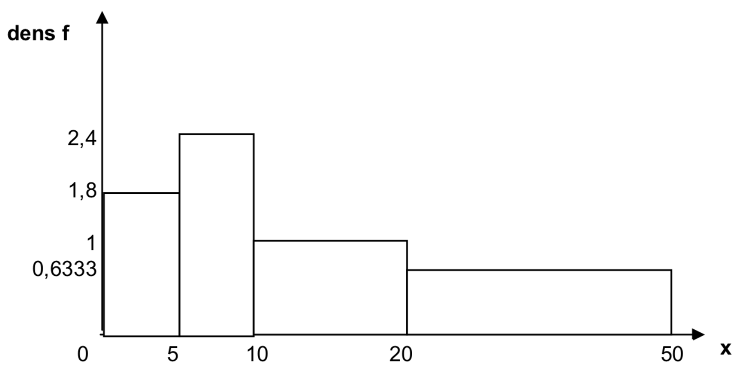
Quindi: **14 <= mediana <= 15**

Anche per il calcolo della moda occorre tener conto dell'ampiezza delle classi.
In particolare la classe modale sarà data dalla classe con la densità di frequenza maggiore.
Di conseguenza:

Classe modale: 5 - 10

c) Disegno del grafico della distribuzione di frequenze:

Bisogna tener conto della diversa **ampiezza** delle classi.
Perciò l'altezza degli istogrammi sarà data dalla colonna della **densità di frequenza**.



ESERCIZIO 2

Nella tabella seguente viene riportato l'ammontare in Megawatt di energia elettrica prodotta dagli impianti eolici in Italia negli ultimi anni. Sui dati presentati calcolare:
a) i numeri indice a base fissa 2008;
b) i numeri indice a base mobile;
c) i numeri indice a base fissa 2009 tramite un opportuno coefficiente di raccordo;
d) la media dei numeri indice a base mobile, indicando il tipo di media utilizzato.

anno	**MW**	$I_{base\ 2008}$	$I_{base\ Mobile}$	$I_{base\ 2009}$
2007	1.000	0,4	-	0,3
2008	2.500	1	2,5	0,6
2009	4.000	1,6	1,6	1
2010	8.000	3,2	2	2
		6,2		

a) Calcolo dei numeri indice a base 2008:

$I_{base\ 2008}$

$\frac{x\ 2007}{x\ 2008}$ = **0,4**

$\frac{x\ 2008}{x\ 2008}$ = **1**

$\frac{x\ 2009}{x\ 2008}$ = **1,6**

$\frac{x\ 2010}{x\ 2008}$ = **3,2**

b) Calcolo dei numeri indice a base mobile:

$I_{base\ mobile}$

$\frac{x\ 2008}{x\ 2007}$ = **2,5**

$\frac{x\ 2009}{x\ 2008}$ = **1,6**

$\frac{x\ 2010}{x\ 2009}$ = **2**

c) Calcolo dei numeri indice a base fissa 2009 tramite un opportuno coefficiente di raccordo;

coeff. = $\frac{x\ 2008}{x\ 2009}$ = $\frac{2500}{4000}$ = **0,625**

d) Calcolo della media dei numeri indice a base mobile, indicando il tipo di media utilizzato.

M(I mob)= (2,5*1,6*2)^1/3= **2** **Media geometrica**

ESERCIZIO 3

Sui dati presenti in tabella, calcolare:

	A	B	C	
I	40	5	15	**60**
II	0	20	60	**80**
III	10	35	15	**60**
	50	**60**	**90**	**200**

a) la probabilità che si verifichi l'evento I o A (l'uno o l'altro)
b) la probabilità che si verifichino insieme II e B (l'uno e l'altro)
c) la probabilità che si verifichi I o II (l'uno o l'altro)
d) la probabilità dell'evento II sapendo che si è verificato l'evento C ovvero P(II/C)

a) la probabilità che si verifichi l'evento I o A (l'uno o l'altro)

$P(I) + P(A) - P(I \cap A)$ bisogna togliere l'intersezione perché sono compatibili

$$\frac{60}{200} + \frac{50}{200} - \frac{40}{200} =$$

$$0{,}3 + 0{,}25 - 0{,}2 = \mathbf{0{,}35}$$

b) la probabilità che si verifichino insieme II e B (l'uno e l'altro)

$P(II \cap B)$

$$\frac{20}{200} = \mathbf{0{,}1}$$

c) la probabilità che si verifichi I o II (l'uno o l'altro)

$P(I) + P(II)$ dato che sono incompatibili non c'è l'intersezione

$$\frac{60}{200} + \frac{80}{200} = \mathbf{0{,}7}$$

d) la probabilità dell'evento II sapendo che si è verificato l'evento C ovvero P(II/C)

$$P(II/C) = \frac{P(II \cap C)}{P(C)}$$

$$P(II/C) = \frac{\frac{60}{200}}{\frac{90}{200}} = \frac{60}{200} * \frac{200}{90} = \mathbf{0{,}6667}$$

STATISTICA (F-O, P-Z) - Di Palma

Esercizio 1)

a) Determini la tipologia del carattere.

Il carattere è di tipo quantitativo (in quanto espresso da numeri) continuo (in quanto si vuole monitorare un tempo che concettualemente è continuo).

b) Fornisca una rappresentazione tabellare dei dati.

L'istogramma è una rappresentazione comunemente utilizzata quando si tratta un dato quantitativo continuo che viene, per diverse esigenze, raccolto in classi di modalita c_i. Il grafico riporta le modalità sull'asse delle ascisse e sulle ordinate la densità di frequenza di ogni classe. Esso si compone di un rettangolo per ogni classe. I rettangoli sono fra di loro adiacenti e dalle loro basi si ricavano gli estremi della classe corrispondente (sup_i e inf_i) mentre l'altezza coincide con la densità di frequenza (d_i). Quindi l'area di ogni rettangolo sarà uguale alla frequenza relativa della classe (f_i = d_i.*(sup_i e inf_i)). Pertanto, la frequenza assoluta può essere ottenuta moltiplicando l'area del rettangolo per la dimensione del campione (N=20). Applicando quanto descritto è possibile ottenere la seguente rappresentazione tabellare.

i	inf_i	sup_i	sup_i-inf_i	di	f_i	n_i	F_i	c_i	$c_i f_i$	c_i^2	$c_i^2 f_i$
1	0	4	4	0,01250	0,050	1	0,050	2	0,10	4	0,200
2	4	6	2	0,05000	0,100	2	0,150	5	0,50	25	2,500
3	6	8	2	0,17500	0,350	7	0,500	7	2,45	49	17,150
4	8	10	2	0,12500	0,250	5	0,750	9	2,25	81	20,250
5	10	14	4	0,05000	0,200	4	0,950	12	2,40	144	28,800
6	14	18	4	0,01250	0,050	1	1,000	16	0,80	256	12,800
				Totali	1,000	20			8,50		81,70

c) Se possibile, calcoli la mediana.

La mediana è il valore che bipartisce la popolazione, ovvero, una volta ordinate le osservazioni si ricerca quella che lascia alla sua destra la metà delle osservazioni meno una. Nel caso in esame non vi sono le osservazioni, in quanto queste sono raccolte in classi, pertanto la mediana si indica come il valore che bipartisce l'area dell'istogramma. Dal calcolo delle frequenze cumulate (F_i) si vede come la mediana cada all'estremità superiore della classe 3. Pertanto si può asserire $q_2 = 8$.

d) Se possibile, si calcoli la varianza.

La varianza nel caso siano presenti osservazioni raggruppate in classi si calcola utilizzando come modalità i valori centrali delle classi (c_i). Nella tabella alla fine del punto b) è stato riportato il calcolo della varianza utilizzando la formula abbreviata.

$$\sigma^2=\left(\sum_{i=1}^{M} c_i^2 * f_i\right)-\left(\sum_{i=1}^{M} c_i * f_i\right)^2=81,70-8.5^2=9.45$$

Il risultato è stato ottenuto calcolando la media (somma colonna $c_i f_i$) e della media dei quadrati dei valori centrali (ultime due colonne della tabella).

Esercizio 2)

a)Completi la tabella con i dati mancanti.

La tabella si completa tenendo conto che la somma delle colonne e delle righe deve coincidere con le distribuzioni marginali e con il totale delle osservazioni ($N = 100$).

		Y: anni fuori corso laurea triennale				
		0	**1**	**2**	**3**	**Totali**
X:Anni fuori corso magistrale	**0**	1 (1)	6 (4)	3 (3)	0 (2)	10
	1	6 (5)	24 (20)	10 (15)	10 (10)	50
	2	3 (4)	10 (16)	17 (16)	10 (8)	40
	Totali	10	40	30	20	100

b) Se possibile, indichi e calcoli un opportuno indice di posizione

La bivariata è composta da due caratteri quantitativi discreti. Pertanto è possibile calcolare la media come indice di poszione. In una bi-variata la media può essere calcolata raccogliendo in un vettore le medie dei due caratteri calcolate separatamente a partire dalle rispettive marginali.

$$\bar{x}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{M_x} n_{i,+}\cdot x_i=\frac{0\cdot 10+1\cdot 50+2\cdot 40}{100}=\frac{130}{100}=1.3$$

$$\bar{y}=\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{M_y} n_{+,j}\cdot y_j=\frac{0\cdot 10+1\cdot 40+2\cdot 30+3\cdot 20}{100}=\frac{160}{100}=1.6$$

da cui si ricava che la media è (1.3; 1.6).

c) Se possibile, indichi e calcoli un opportuno indice di variabilità

Per serie bivariate continue o discrete l'indice di variabilità migliore è dato dalla matrice varianza/covarianza. Questa matrice si compone di 3 distinti valori, le due varianze dei distinti caratteri e la covarianza, della serie bivariata.
Si seguito riportiamo i calcoli per le due varianze per i singoli caratteri:

X: Anni fuori corso durante la laurea triennale

$$\sigma_x^2=\frac{\sum_{i=1}^{M_x} n_{i,+}x_i^2}{N}-\bar{x}^2=\frac{10\cdot 0^2+50\cdot 1^2+40\cdot 2^2}{100}-1.3^2=2.1-1.69=0.41$$

Y: Anni fuori corso durante la laurea magistrale

$$\sigma_y^2=\frac{\sum_{j=1}^{M_y} n_{+,j}y_j^2}{N}-\bar{y}^2=\frac{10\cdot 0^2+40\cdot 1^2+30\cdot 2^2+20\cdot 3^2}{100}-1.6^2=3.4-2.56=0.84$$

La covarianza si ottiene

$$\sigma_{xy}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{M_x}\sum_{j=1}^{M_y} n_{i,j}(x_i-\bar{x})(y_j-\bar{y})=0.14$$

Pertanto la matrice varianza covarianza risulta essere

$$\Sigma=\begin{bmatrix}0.41 & 0.14\\ 0.14 & 0.84\end{bmatrix}$$

d) Verifichi, ad un opportuno livello di significatività, se i due caratteri si possono dire indipendenti.

Per verificare se i due caratteri sono indipiendeti si può effettuare un test di ipotesi volto a verificare se le frequenze delle osservazioni rilevate nel campione sono sufficiente mente vicine (ad un determinato livello di significatività) a quelle teoriche ottenute dall'ipotesi di indipendeza. Il test viene fatto sfruttando la distribuzione limite dello stimatore di Pizzetti Pearson che viene ad essere un chi quadranto avente gradi di libertà pari a quelli del numero di parametri liberi della distribuzione teorica.

Il primo punto di questa procedura consiste nel calcolo delle frequenze teoriche ricavate dalle frequenze marginali ottenute orlando la tabella delle frequenze .

$$\hat{n}_{i,j}=n\,\hat{p}_{i,j}=\frac{n_{i,+}\,n_{+,j}}{n}\quad\forall i,j$$

nella tabella a doppia entrata indicata al punto *a)* si ripotano le frequenze teoriche fra parentesi

A questo punto è possibile valutare la convergenza dell stimatore di Pizzetti Pearson, possibile solo se tutte le frequenze teoriche sono superiori a 5. Constatato che la condizione non è verificata si può concludere che non è possibile ricevare l'informazione richiesta dalle osservazioni fornite.

Esercizio 3)
La W è combinazione lineare delle v.c. X ed Y introdotte nell'esercizio 2, in particolare si ha che W = X + Y. Ciononstante non è possivibile utilizzare le informazioni calcolate su X ed Y (valore atteso e varianza) per trarre conclusioni su W in quanto non siamo in grado di verificare l'indipendenza di X ed Y.
Pertanto si deve considerare la distribuzione di W e procedere al calcolo senza considerare le informazioni ottenute dall'analisi delle vv.cc. X ed Y. La distribuzione è riportata nella tabella sottostante

i	w_i	n_i	$w_i\, n_i$	$w_i - \overline{w}$	$(w_i - \overline{w})^2$	$n_i(w_i - \overline{w})^2$
1	0	1	0	-2,9	8,41	8,41
2	1	12	12	-1,9	3,61	43,32
3	2	30	60	-0,9	0,81	24,3
4	3	20	60	0,1	0,01	0,2
5	4	27	108	1,1	1,21	32,67
6	5	10	50	2,1	4,41	44,1
Totali		100	290			153

Da cui si ricavano facilmente sfruttando i calcoli in tabella media ($\overline{w}$ = 290/100 = 2.9), varianza (σ^2 = 153 /100 = 1.53) e varianza campionaria (s^2 = 153/99 = 1.55)

La stima puntuale del valore atteso di W è coincide con la media campionaria $E[W] = 2.9$.

La stima per intervallo del valore atteso non conoscendo il corretto valore della varianza della v.c. W è data dalla formula $E[W] \in \left[\overline{w} - z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}} \;\; ; \;\; \overline{w} + z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}}\right]$ dove s è la radice quadrata della varianza campionaria, α è il livello di confidenza e Z è la normale standardizzata.

Fissando un livello di confidenza al 5% si ottiene la seguente stima.

$$E[W] \in \left[\overline{w} - z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{s^2}{n}} \;\; ; \;\; \overline{w} + z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{s^2}{n}}\right] = \left[2.9 - 1.96 \cdot \sqrt{\frac{1.55}{100}} \;\; ; \;\; 1.3 + 1.96 \cdot \sqrt{\frac{1.55}{100}}\right] = [2.66 \;\; ; \;\; 3.14]$$

Esercizio 4)
Si noti come l'esercizio fissi la probabilità degli eventi elementari e richieda il computo delle probabilità di eventi complessi, pertanto richiede l'applicazione della definizione assiomatica di probabilità.

a) Il candiato calcoli Probabilità dell'evento E_1 intersezione E_2.
Due eventi incompatibili non possono verificarsi contemporaneamente, pertanto l'insieme intersezione è l'insieme nullo. Quindi la probabilità dell'evento intersezione (ovvero l'evento rappresentato dal verificarsi contemporaneo dei due eventi di partenza) è nulla.

$$P(E_1 \cap E_2) = 0$$

b) Il candiato calcoli la Probabilità dell'evento E_2 condizionato E_1

La probabilità richiesta viene calcolata applicando la definzione di probabilità condizionata:

$$P(E_2|E_1) = P\frac{(E_1 \cap E_2)}{P(E_1)} = \frac{0}{P(E_1)} = 0$$

c) Il candiato calcoli la Probabilità dell'evento E_1 unito E_2..
Note le probabilità degli eventi elementari e dell'evento intersezione, si ha che

$$P(E_1 \cup E_u) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - 0 = \frac{3+2}{6} = \frac{5}{6}.$$