

* $SU(2)$ ed $SO(3)$

[$SU(2)$ è il rivestimento
universale di $SO(3)$]

$$SO(3) = \frac{SU(2)}{\mathbb{Z}_2} \quad \pi_1(SO(3)) \cong \mathbb{Z}_2$$

TOPOLOGIA E GEOMETRIA
DIFFERENZIALE Prof. M. Spina
a.a. 2009/10

Lezione XXII

$SU(2)$ agisce su \mathbb{C}^2 (spazio degli
spinori, in M.O.)

$$SU(2) = \left\{ U \in U(2) \mid \det U = 1 \right\}$$

$$U = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C} \quad |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$$

parametri
di Cayley-Klein

Si ha, ovviamente che $SU(2)$ è diffomorfo a S^3

$$\mathfrak{su}(2) = \text{Lie}(SU(2)) = \left\{ X \in M_2(\mathbb{C}) \mid \begin{array}{l} X + X^* = 0 \\ \text{tr} X = 0 \end{array} \right\}$$

(una)
base di
 $\mathfrak{su}(2)$

$$\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \equiv i \sigma_1$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \equiv i \sigma_2$$

$$\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \equiv i \sigma_3$$

matrici di Pauli σ_i

Si ha poi

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} = \alpha_0 I + \sum_{j=1}^3 \alpha_j \cdot i \sigma_j$$

matrici di spin

$$= \alpha_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \alpha_1 \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha_0 + i\alpha_3 & \alpha_2 + i\alpha_1 \\ -\alpha_2 + i\alpha_1 & \alpha_0 - i\alpha_3 \end{pmatrix} \quad \text{con}$$

$$\alpha = \alpha_0 + i\alpha_3$$

$$\beta = \alpha_2 + i\alpha_1$$

$$\begin{pmatrix} \bar{\alpha} = \alpha_0 - i\alpha_3 & \gamma \\ -\bar{\beta} = -(\alpha_2 - i\alpha_1) = -\alpha_2 + i\alpha_1 & \sqrt{} \end{pmatrix}$$

det $U = 1$ si traduce in

$$|\alpha_0|^2 + |\alpha_1|^2 + |\alpha_2|^2 + |\alpha_3|^2 = 1$$

che conferma quanto già osservato

poniamo: $\underline{a} = a_1 \underline{i} + a_2 \underline{j} + a_3 \underline{k}$

$$\underline{\sigma} \cdot \underline{a} = \sum_{i=1}^3 \sigma_i a_i \quad \begin{matrix} i \text{ una} \\ \text{matrice} \end{matrix}$$

Pauli

Sia ora \underline{n} , $\|\underline{n}\|=1$

$$U_{\underline{n}}(\varphi) := e^{i \frac{\varphi}{2} \underline{\sigma} \cdot \underline{n}}$$

= ... =
Semplice
calcolo

$$\cos \frac{\varphi}{2} I_2 + \sin \frac{\varphi}{2} \cdot i \underline{\sigma} \cdot \underline{n}$$

si verifica che

$$(\underline{\sigma} \cdot \underline{a})(\underline{\sigma} \cdot \underline{b})$$

$$= (\underline{a} \cdot \underline{b}) I_2 + i \underline{\sigma}(\underline{a} \times \underline{b})$$

↑
prod. scal.

Consideriamo ora le matrici hermitiane
a traccia nulla: come spazio vettoriale
abbiamo vita a \mathbb{R}^3

$$(X = X^* \Leftrightarrow (iX)^* = -iX^* = -iX$$

Le dimostriamo ancora
(con $\mathcal{G}U(2)$), con

i.e. iX è antihermitiana

Il che abuso di linguaggio

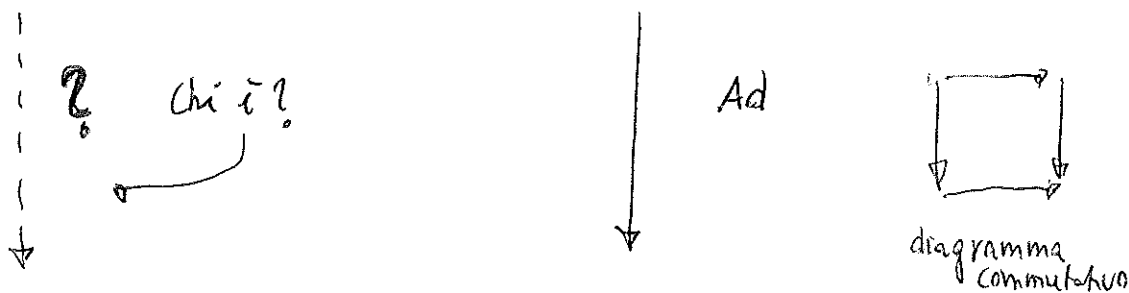
G_n ha allora l'isomorfismo (di spazi vettoriali)

$$\mathbb{R}^3 \ni (x, y, z) \longrightarrow \begin{pmatrix} z & x-iy \\ x+iy & -z \end{pmatrix} \cong \begin{matrix} \text{hermitiana,} \\ \text{traccia nulla} \end{matrix}$$

Consideriamo ora l'azione aggiunta di $SU(2)$

su $\mathfrak{SU}(2)$, in particolare


$$\underline{v} \ni \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \equiv \underline{x} \longmapsto \begin{pmatrix} z & x-iy \\ x+iy & -z \end{pmatrix} \equiv X$$



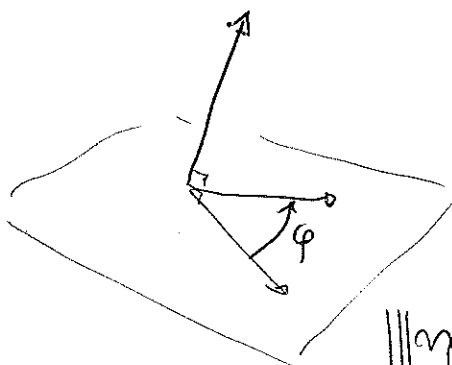
$$\underline{v} \ni \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \equiv \underline{x}' \longmapsto \underline{U}_n(\varphi) X \underline{U}_n(\varphi)^{-1}$$

" $\underline{U}_n(\varphi)^* = \underline{U}_n(-\varphi)$

i.e. legge le nuove coordinate di \underline{v} rispetto agli altri moti

R. : si ha $\underline{x}' = \underline{R}_n(\varphi) \underline{x}$ (*) 

*** rotazione attorno a \underline{n} di φ



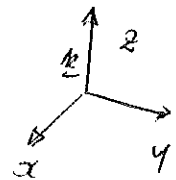
de fatto descrive le rotazioni con matrici 2×2 complesse invece di matrici reali 3×3

Impoantissima in meccanica quantistica e in varie

applicazioni, ex meccanica, robotica.

Facciamo qui solo il controllo seguente

Sia $\underline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\underline{m} = (0, 0, 1)$



$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Calcoliamo

$U_{\underline{R}}(\varphi) X U_{\underline{R}}(-\varphi) =$

$U_{\underline{R}}(\varphi) = \cos \frac{\varphi}{2} I + i \sin \frac{\varphi}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} e^{i\varphi/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\varphi/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-i\varphi/2} & 0 \\ 0 & e^{i\varphi/2} \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} \cos \varphi/2 + i \sin \varphi/2 & 0 \\ 0 & \cos \varphi/2 - i \sin \varphi/2 \end{pmatrix}$

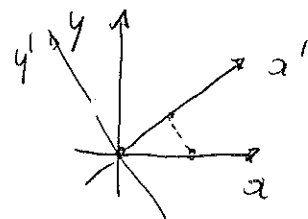
$= \begin{pmatrix} 0 & e^{i\varphi/2} \\ e^{-i\varphi/2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-i\varphi/2} & 0 \\ 0 & e^{i\varphi/2} \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} e^{i\varphi/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\varphi/2} \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 0 & e^{i\varphi} \\ e^{-i\varphi} & 0 \end{pmatrix} = X'$

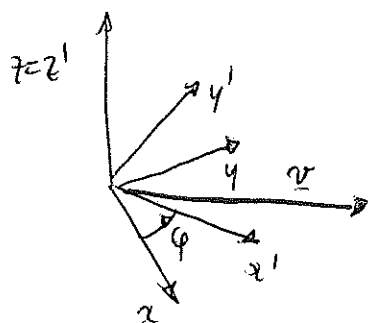
$\parallel \begin{pmatrix} 0 & \cos \varphi + i \sin \varphi \\ \cos \varphi - i \sin \varphi & 0 \end{pmatrix}$

$x' = \cos \varphi$
 $y' = -\sin \varphi$
 $z' = 0$



Coordinate di $(1, 0, 0)$ rispetto agli assi ruotati

fare attenzione...



Notare che se $U_m \mapsto -U_m$, ottengo la stessa rotazione R_m

Se poi $\varphi = 2\pi$ $\bar{U}_m(2\pi) = \cos \frac{2\pi}{2} I + i \underline{\sigma} \cdot \underline{m} \sin \frac{\pi}{2}$
 $= \cos \pi \cdot I = -I$

ma, in ogni caso, $R_m(2\pi) = Id.$

conclusione:

l'applicazione (omomorfismo)

$$SU(2) \rightarrow SO(3)$$

$$U \mapsto R(U)$$

Queste considerazioni risultano più chiare, spero, dopo la successiva trattazione degli spazi di rivestimento in ogni caso, hanno valore euristico

è un'applicazione di rivestimento 2:1

(rivestimento doppio, i.e. a 2-fogli)

Considerazioni topologiche

• $-U$

$$\pi_1(SO(3)) \cong \mathbb{Z}_2$$

• U

$$[0, 2\pi] \ni \varphi \mapsto R_m(\varphi)$$

• R

è non banale in $\pi_2(SO(3))$

si solleva a $[0, 2\pi] \ni \varphi \mapsto U_m(\varphi)$

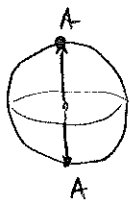
che non è un loop in $SU(2)$

Ma, percorrendolo 2 volte ($\varphi \in [0, 4\pi]$)

ottengo un loop in $SU(2)$

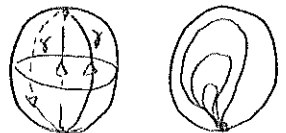
Concretamente banale poiché $SU(2) \cong S^3$ che è semplicemente connesso

Sfera piena



è un loop basato in A non banale percorrendolo 2 volte ho un loop banale

$$[\delta]^2 = Id$$

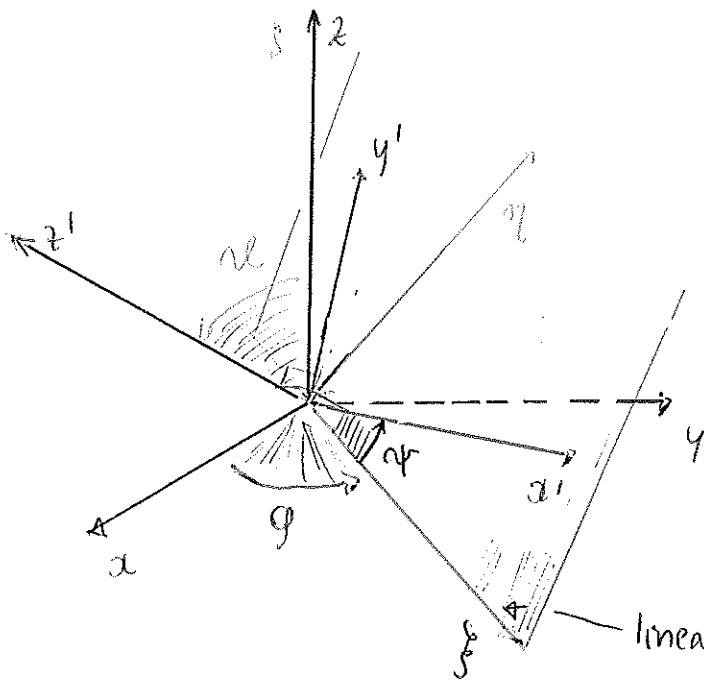


444 Angoli di Eulero

ϕ : precessione

ϑ : nutazione

ψ : rotazione propria



(ϕ, ϑ, ψ)
divengono
coordinate su
 $S^3 \simeq SU(2)$

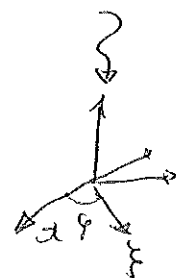
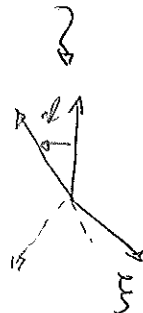
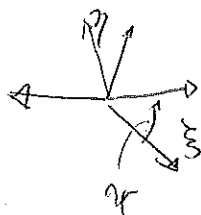
linea dei nodi
 $\text{piano}(xy) \cap \text{piano}(x'y')$

la trasformazione $(Oxyz) \rightarrow (O, x'y'z')$

si descrive agevolmente tramite i parametri di
Cayley-Klein

$$Q = Q_{\psi} Q_{\vartheta} Q_{\phi}$$

$$= \begin{pmatrix} e^{i\psi/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\psi/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \frac{\vartheta}{2} & i \sin \frac{\vartheta}{2} \\ i \sin \frac{\vartheta}{2} & \cos \frac{\vartheta}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\phi/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\phi/2} \end{pmatrix}$$



$$= \begin{pmatrix} e^{i \frac{\psi + \phi}{2}} \cos \frac{\alpha}{2} & i e^{i \frac{\psi - \phi}{2}} \sin \frac{\alpha}{2} \\ i e^{-i \frac{\psi - \phi}{2}} \sin \frac{\alpha}{2} & e^{-i \frac{\psi + \phi}{2}} \cos \frac{\alpha}{2} \end{pmatrix}^{\beta}$$

dalla quale è possibile a ricostruire $R_{\underline{m}}(\omega) \dots$

Provare che se $\underline{U}_m(\phi) = \exp i \frac{\phi}{2} \underline{\sigma} \cdot \underline{m}$

$\cos \frac{\phi}{2} = \text{Re } \alpha \quad \sin \frac{\phi}{2} = \sqrt{1 - (\text{Re } \alpha)^2}$

$\underline{m} = \frac{1}{\sqrt{1 - (\text{Re } \alpha)^2}} (\text{Im } \beta \underline{i} + \text{Re } \beta \underline{j} + \text{Im } \alpha \underline{k})$



$$\cos \frac{\omega}{2} = \text{Re} \left[e^{i \frac{\psi + \phi}{2}} \cos \frac{\alpha}{2} \right] = \cos \frac{\psi + \phi}{2} \cos \frac{\alpha}{2}$$

$$\underline{m} = \frac{1}{\sin \frac{\omega}{2}} \left[\cos \frac{\psi - \phi}{2} \sin \frac{\alpha}{2} \underline{i} + \left[-\sin \frac{\psi - \phi}{2} \sin \frac{\alpha}{2} \right] \underline{j} + \sin \frac{\psi + \phi}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \right] + \sqrt{1 - \cos^2 \frac{\omega}{2}}$$

(verificare che $\|\underline{m}\| = 1$)

MC150

~~Le~~ Le matrici di Pauli sono legate ai quaternioni

$$\mathbf{I} := i\sigma_1 \quad \mathbf{J} := i\sigma_2 \quad \mathbf{K} := i\sigma_3$$

* quaternioni immaginari

si definisce $\mathbf{I} \circ \mathbf{J} := i\sigma_2 \circ i\sigma_1 = \mathbf{K}$ etc.

$$\mathbf{I}^2 = \mathbf{J}^2 = \mathbf{K}^2 = -\text{Id} \quad (\text{ordine inverso!})$$

$$\mathbb{H} = \{ a + b\mathbf{I} + c\mathbf{J} + d\mathbf{K} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R} \} \quad \text{quaternioni}$$

costituiscono un corpo [un campo e un corpo commutativo] rispetto a "+" e "o"

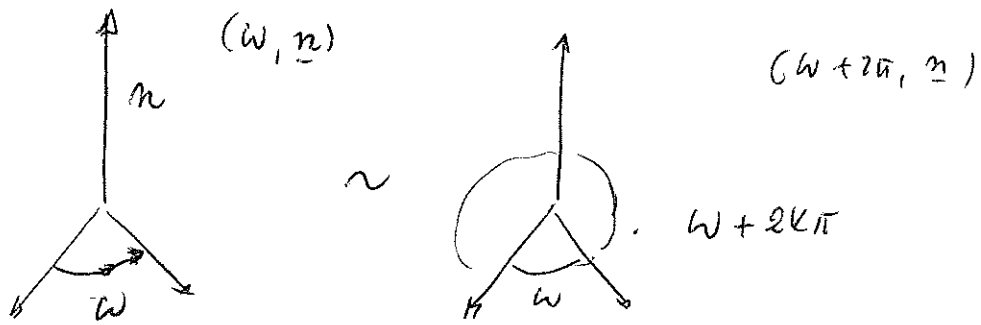
$$S^3 \simeq \text{SU}(2) = \mathbb{H}_1 \quad \text{quaternioni di norma 1}$$

$$\text{cf. } S^1 \subset \mathbb{C} \quad \text{numeri complessi di } |z|=1$$

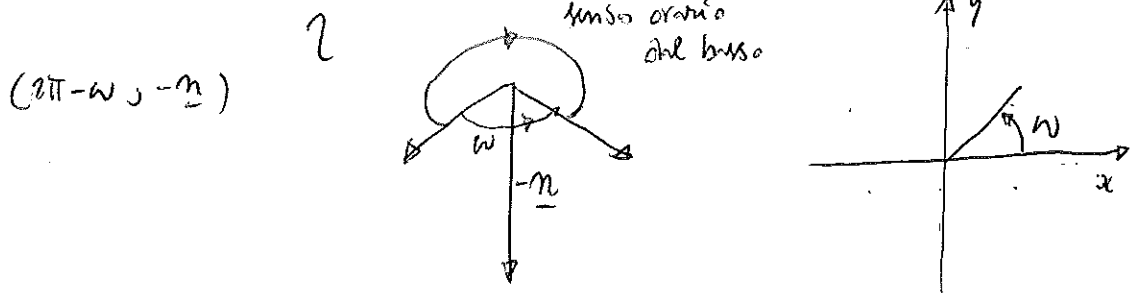
S^7 no ottetti (octonions) di Cayley

S^1, S^3, S^7 sono parallellizzabili

Attenzione



dall'alto



dal basso



(...per maggiori dettagli: Choquet Brubert et al. 1982)

★ Problema: È possibile dotare S^2 della struttura di gruppo di Lie?

R. NO. Per assurdo, se lo fosse, preso un vettore tangente all'identità, non nullo, lo si potrebbe estendere ad un campo vettoriale invariante a sinistra, necessariamente privo di punti critici, e dunque di indice nullo.

Ma ciò violerebbe il teorema di Poincaré-Hopf ($\chi(S^2) = 2$).

Tra le superfici orientabili, l'unica che può essere dotata di tale struttura, e di fatto lo è, è il toro $\mathbb{T}^2 \approx S^1 \times S^1$. [un gruppo di Lie è sempre orientabile]