ALGEBRA LINEARE CON ELEMENTI DI GEOMETRIA

modulo: ELEMENTI DI GEOMETRIA

Prova scritta del 4 settembre 2012

(1) Nel piano euclideo reale, in cui sia fissato un riferimento cartesiano, ampliato proiettivamente e complessificato, sia dato il fascio di coniche (in forma affine, e non omogenea) $\mathcal{F} \ni C_\lambda : \lambda(x^2+y^2)+x+y=0$

Dimostrare che $\mathcal{F}$ contiene solo circonferenze (ev. generalizzate).
Trovarne i punti base. Determinare le circonferenze di $\mathcal{F}$ tangenti alla retta $r: x=1$. Abbozzarne il grafico.

(2) Nello spazio euclideo reale, in cui sia fissato un riferimento cartesiano, sia data la retta

$$r: \begin{cases} x+y+z-1=0 \\ x-3y=0 \qquad \pi'' \end{cases}$$

Si determini il piano π per $P:(0,0,1)$ $(\in r)$ perpendicolare a r e la retta s intersezione di π con $\pi': x-3y+1=0$.
Dimostrare che r e s sono sghembe e determinarne la distanza.

Tempo a disposizione: 1h 15m

Le risposte vanno adeguatamente giustificate.

Elegeo

4 settembre 2012

(1) $\mathscr{C}_\lambda: \lambda(x^2+y^2)+x+y=0$

è un fascio di circonferenze.

I pti base sono i pti ciclici + altri due individuati dall'intersezione di due circ. qualsiasi del fascio (siano A, B) si trova subito, prendendo ad esempio $\mathscr{C}_1 \cap \mathscr{C}_2$ $(\lambda=1,2)$, che $A \equiv B: (0,0)$.

Si tratta di un fascio di circonferenze tangenti a $x+y=0$ (che fa parte della conica spezzata $x_0(x_1+x_2)=0$) in $A:(0,0)$

Imponiamo la tangenza con $x=1$

$$\begin{cases} \lambda(x^2+y^2)+x+y=0 \\ x=1 \end{cases}$$ deve essere doppia

$$\lambda(1+y^2)+1+y=0 \qquad \lambda y^2+y+(\lambda+1)=0$$

$$\Delta = 1-4\lambda(\lambda+1)=0 \qquad 4\lambda^2+4\lambda-1=0$$

$$\lambda = \frac{-2\pm\sqrt{4+4}}{4}$$ 8

$$\lambda = \frac{-2\pm2\sqrt{2}}{4} = \frac{-1\pm\sqrt{2}}{2}$$

centri: $C_\lambda = \left(-\frac{1}{2\lambda}, -\frac{1}{2\lambda}\right)$ raggi:

$\lambda \neq 0$

$$R = \sqrt{\frac{a^2+b^2-4c}{2}}$$

$x^2+y^2+ax+by+c=0$

$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$

$x^2+y^2-2x_0x-2y_0y$

$+x_0^2+y_0^2-R^2=0$

$c=x_0^2+y_0^2-R^2$

$R^2=\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}-c=\frac{a^2+b^2-4c}{4}$

$$\lambda_\pm = \frac{-1 \pm \sqrt{2}}{2}$$

$$C_{\lambda_\pm} = \left(-\frac{1}{2\lambda_\pm}, -\frac{1}{2\lambda_\pm} \right)$$

$$= \left(-\frac{1}{-1 \pm \sqrt{2}}, -\frac{1}{-1 \pm \sqrt{2}} \right)$$

$$-\frac{1}{-1 \pm \sqrt{2}} = -\frac{(-1 \mp \sqrt{2})}{(-1 \pm \sqrt{2})(-1 \mp \sqrt{2})} =$$

$$= -\frac{(-1 \pm \sqrt{2})}{\underbrace{1-2}_{-1}}$$

$$= -1 \pm \sqrt{2}$$

$$C_{\lambda_\pm} : \left(-1 \pm \sqrt{2}, -1 \pm \sqrt{2} \right)$$

$$x^2 + y^2 + \frac{1}{\lambda_\pm}(x+y) = 0$$

$$R_\pm = \frac{\sqrt{\left(\frac{1}{\lambda_\pm}\right)^2 + \left(\frac{1}{\lambda_\pm}\right)^2}}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{|\lambda_\pm|} = \left| -\sqrt{2} \cdot \frac{1}{-2\lambda_\pm} \right| = \left| -\sqrt{2}\left(-1 \pm \sqrt{2}\right) \right|$$

$$= \left| \sqrt{2}\left(1 \mp \sqrt{2}\right) \right|$$

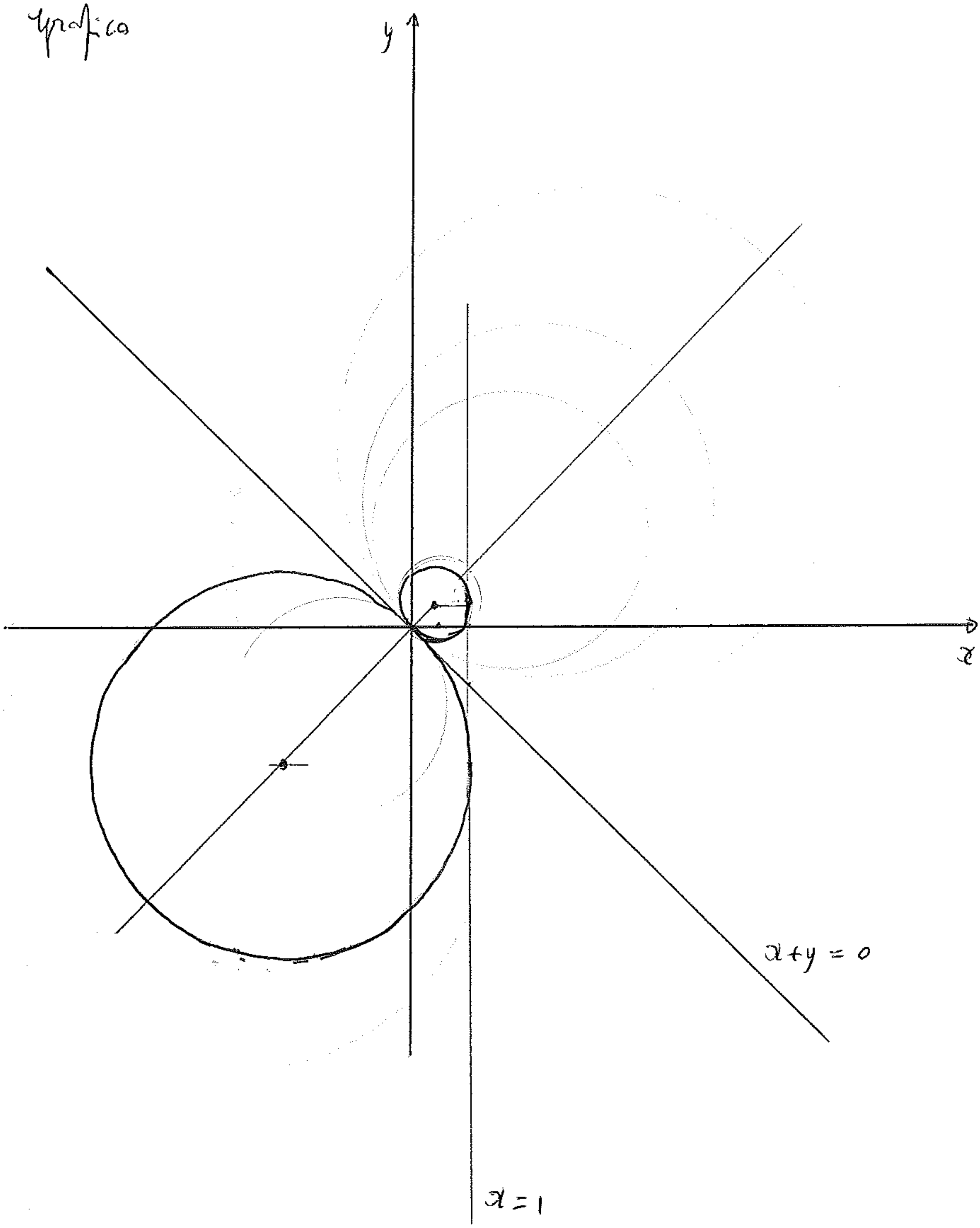
controllo $\quad d(C_{\lambda_\pm}, r_{x=1})$

$$= \begin{cases} \sqrt{2}+2 \\ 2-\sqrt{2} \end{cases}$$

$$\left| -1 \pm \sqrt{2} - 1 \right| = \left| -2 \pm \sqrt{2} \right|$$

r

Grafico



Elegzo
4 settembre 2012

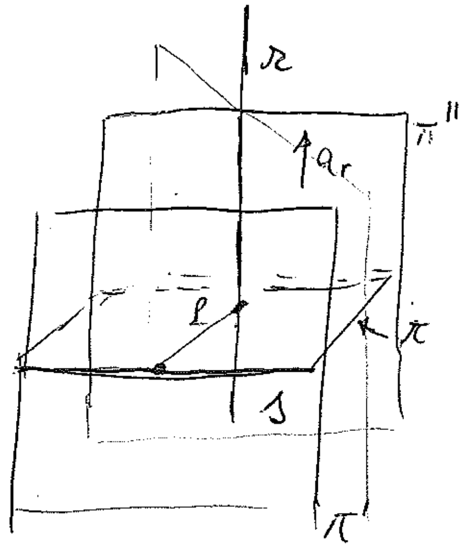
(2) Sia data la retta r : $\begin{cases} x+y+z-1=0 \\ x-3y=0 \quad \pi'' \end{cases}$

Si determini il piano π per $P:(0,0,1)$ $(\in r)$

$\perp$ a r e la retta s intersezione di π

con π' : $x - 3y + 1 = 0$

Dimostrare che r e s sono sghembe e determinarne la distanza.



Sol. eq par di r:

$x = t$

$y = \frac{1}{3}x = \frac{1}{3}t$

$z = 1 - x - y = 1 - t - \frac{t}{3} = 1 - \frac{4}{3}t$

$r: \begin{cases} x = t \\ y = \frac{t}{3} \\ z = 1 - \frac{4}{3}t \end{cases}$ $\qquad \underline{a_r} : (3, 1, -4)$

dir: (a meno di un fatt. di prop. $\neq 0$)

π : $3(x-0) + 1(y-0) - 4(z-1) = 0$

$$\boxed{\pi: \quad 3x + y - 4z + 4 = 0}$$

$s = \pi \cap \pi'$; ora π' è $/\!/ \; \pi''$: $x - 3y = 0$

$\Rightarrow$ $r \perp s$ e in più sono sghembe $(s \subset \pi'$ ma $s \not\subset \pi'')$

la loro distanza è data allora (v. figura) da $d(P, \pi')$ ovvero

$$d(r, s) = \frac{|0 - 3 \cdot 0 + 1|}{\sqrt{1+9}} = \frac{1}{\sqrt{10}}$$