

## Algebra Lineare ed Elementi di Geometria

### Programma svolto nel Modulo **Algebra Lineare**

## 0. INTRODUZIONE AL LINGUAGGIO MATEMATICO

### **§1. Insiemi**

- 1.1 Esempi
- 1.2 Come si denota un insieme
- 1.3 Altri esempi
- 1.4 Sottoinsieme, sottoinsieme proprio
- 1.5 Principio di doppia inclusione
- 1.6 Esempi
- 1.7 L'insieme delle parti
- 1.8 Esempi
- 1.9 Teorema: se  $M$  ha  $n$  elementi, l'insieme delle parti ne ha  $2^n$ .
- 1.10 Unione, intersezione, differenza, complemento, prodotto cartesiano
- 1.11 Esempi
- 1.12 Alcune proprietà

(vedi anche Precorso on-line, LEZIONI: Capitolo INSIEMI)

### **§2. Tecniche dimostrative**

- 2.1 Dimostrazioni e controesempi
- 2.2 Gli assiomi di Peano
- 2.6 Principio di induzione
- 2.7 La somma dei primi  $n$  numeri naturali
- 2.8 Dimostrazione del Teorema 1.9

(vedi anche [GS, Appendice B])

### **§3. Numeri complessi**

- 3.1 Il campo  $\mathbb{C}$
- 3.2 Numeri immaginari
- 3.3 Forma algebrica di un numero complesso
- 3.4 Coniugato e modulo
- 3.5 Esempio
- 3.6 Coordinate polari
- 3.7 Forma trigonometrica di un numero complesso
- 3.8 Prodotto di numeri complessi in forma trigonometrica
- 3.9 La Formula di De Moivre
- 3.10 Definizione: radici  $n$ -esime
- 3.11 Teorema sulle radici  $n$ -esime

- 3.12 Esempio: Divisione del cerchio
- 3.13 Esempio
- 3.14 Teorema Fondamentale dell'Algebra

(vedi anche [GS, Appendice A])

## I. MATRICI E SISTEMI LINEARI

### **§4. Matrici e loro operazioni**

- 4.1 Esempio
- 4.2 Definizioni
- 4.3 Esempi
- 4.4 Somma di due matrici
- 4.5 Moltiplicazione di una matrice per uno scalare
- 4.6 Prodotto di due matrici
- 4.7 Altri esempi

### **§5. Sistemi lineari e matrici**

- 5.1 Esempi
- 5.2 Operazioni elementari
- 5.3 Metodo di eliminazione di Gauss (EG)
- 5.4 Risoluzione di un sistema lineare
- 5.5 Esempio
- 5.6 Rango di una matrice
- 5.7 Matrici elementari

### **§6. Matrici inverse**

- 6.1 Lemma e Definizione
- 6.2 Esempi
- 6.3 Proposizione (sistemi lineari equivalenti)
- 6.4 Proposizione
- 6.5 Proposizione
- 6.6 Teorema (esistenza dell'inversa destra)
- 6.7 Definizione di H-trasposta
- 6.8 Teorema (esistenza dell'inversa sinistra)
- 6.9 Corollario (matrici invertibili)
- 6.10 Calcolo della matrice inversa. Esempio

### **§7. Decomposizione LU**

- 7.1 Definizione di matrice triangolare inferiore /superiore
- 7.2 Proposizione
- 7.3 Esempio
- 7.4 Lemma
- 7.5 Teorema
- 7.6 Esempi

(vedi [GS, Capitolo I])

## II. SPAZI VETTORIALI

### **§8. Spazi vettoriali e basi**

- 8.1 Gruppo
- 8.2 Campo
- 8.3 Spazio vettoriale
- 8.4 Esempi
- 8.5 Proposizione
- 8.6 Combinazioni lineari
- 8.7 Esempi
- 8.8 Insieme di generatori, base
- 8.9 Esempi
- 8.10 Spazi vettoriali finitamente generati
- 8.11 Esempi

(*vedi* [GS, Capitolo II])

### **§9. Dipendenza e indipendenza lineare**

- 9.1 Definizione di indipendenza lineare
- 9.2 Osservazione: base = insieme di generatori linearmente indipendente
- 9.3 Esempi
- 9.4 Caratterizzazione di dipendenza lineare
- 9.5 Esempi
- 9.6 Proposizione
- 9.7 Caratterizzazioni di una base
- 9.8 Proposizione

(*vedi* [GS, Capitolo II])

### **§10. Dimensione di uno spazio vettoriale**

- 10.1 Esistenza della base.
- 10.2 Teorema di Steinitz
- 10.3 Corollario
- 10.4 Dimensione.
- 10.5 Esempi
- 10.6 Teorema: completamento della base
- 10.7 Proprietá di uno spazio vettoriale di dimensione  $n$
- 10.8 Esempi

(*vedi* [GS, Capitolo II])

## §11. Sottospazi di uno spazio vettoriale

- 11.1 Definizione di sottospazio
- 11.2 Esempi
- 11.3 Un sottospazio di  $V$  coincide con  $V$  se e solo se ha la stessa dimensione.
- 11.4 L'intersezione di due sottospazi
- 11.5 Esempio (unione di sottospazi)
- 11.6 La somma di due sottospazi
- 11.7 Formula di Grassmann
- 11.8 Somma diretta di due sottospazi
- 11.9 Esempi e osservazioni

(vedi [GS, Capitolo II])

## §12. Applicazioni lineari

- 12.1 Definizione
- 12.2 Alcune proprietà
- 12.3 Esempi
- 12.4 Lemma
- 12.5 Teorema: Ogni spazio vettoriale su  $K$  di dimensione  $n$  è isomorfo a  $K^n$ .
- 12.6 Definizione
- 12.7 Corollario: due spazi vettoriali sono isomorfi se e solo se hanno la stessa dimensione.
- 12.8 Lemma: composizione di applicazioni lineari
- 12.9 nucleo e immagine
- 12.10 Esempi
- 12.11 Teorema (nullità + rango)
- 12.12 Corollario

(vedi [GS, Capitolo II])

## §13. Quattro spazi associati a una matrice

- 13.1 Lemma
- 13.2 L'applicazione  $f_A : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$ ,  $x \mapsto Ax$  associata a  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$
- 13.3 Lemma
- 13.4 Teorema sul rango
- 13.5 Corollario
- 13.6 Osservazione su  $A^H$
- 13.7 Teorema dei quattro sottospazi:  $\mathbb{K}^m = C(A) \oplus N(A^H)$  e  $\mathbb{K}^n = C(A^H) \oplus N(A)$
- 13.8 Esempio
- 13.9 Procedimento per determinare basi di  $C(A)$  e  $N(A)$
- 13.10 Teorema di Rouché - Capelli
- 13.11 Teorema: le soluzioni di  $Ax=b$  sono i vettori di forma  $p + u$  con  $u \in N(A)$
- 13.12 Esempi
- 13.13 Procedimento per la risoluzione di un sistema lineare

(vedi [GS, Capitolo II])

## §14. Applicazioni lineari e matrici

- 14.1 Lo spazio vettoriale  $\text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$
- 14.2 Osservazioni
- 14.3 La matrice associata a un'applicazione lineare rispetto alla base canonica
- 14.4 Teorema:  $M_{m \times n}(\mathbb{K}) \cong \text{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$
- 14.5 Esempi
- 14.6 La matrice associata a un'applicazione lineare  $f : V \rightarrow W$  rispetto alle basi  $\mathcal{B}(V)$  e  $\mathcal{B}(W)$
- 14.7 La matrice del cambiamento di base  $\mathcal{B}_1 \rightarrow \mathcal{B}_2$
- 14.8 Esempi
- 14.9 Teorema sul cambiamento di basi
- 14.10 Corollario
- 14.12 Matrici simili

(vedi [A, Capitoli 7 e 8], [GS, Capitolo II])

## III. IL DETERMINANTE

### §15. Il determinante di una matrice quadrata

- 15.1 Definizione (per ricorrenza)
- 15.2 Regola di Sarrus
- 15.3 Seconda definizione (assiomatica)
- 15.4 Altre proprietà
- 15.5 Corollario
- 15.6 Teorema di Binet
- 15.7 Corollario: una matrice quadrata  $A$  è invertibile se e solo se  $\det A \neq 0$ .
- 15.8 Corollario:  $\det A = \det A^T$
- 15.9 Teorema di Laplace
- 15.10 Teorema di Cramer
- 15.11 Calcolo della matrice inversa (secondo metodo)
- 15.12 Determinante a blocchi

(vedi [A, Capitolo 9], [GS, Capitolo IV])

## IV. AUTOVALORI E AUTOVETTORI

### §16. Gli autovalori di una matrice

- 16.1 Definizione di autovalore e autovettore
- 16.2 Esempi
- 16.3 Osservazione
- 16.4 Definizione di polinomio caratteristico.
- 16.5 Teorema
- 16.6 Corollario:  $A$  possiede  $n$  autovalori (non necessariamente reali, né necessariamente distinti)
- 16.7 Autospazi e molteplicità algebriche e geometriche
- 16.8 Esempi
- 16.9 Proprietà del polinomio caratteristico
- 16.10 Teorema di Cayley-Hamilton (senza dimostrazione)

## §17. Diagonalizzazione di una matrice

- 17.1 Osservazione
- 17.2 Definizione: matrici diagonalizzabili
- 17.3 Teorema sulla diagonalizzazione.
- 17.4 Esempi
- 17.5 Proprietà delle matrici simili.
- 17.6 Corollario
- 17.7 Esempio

## §18. Criteri di diagonalizzazione

- 18.1 Lemma sugli autospazi
- 18.2 Corollario:  $A \in M_{n \times n}$  è diagonalizzabile se possiede  $n$  autovalori distinti.
- 18.3 Lemma sulle molteplicità
- 18.4 Teorema:  $A \in M_{n \times n}$  è diagonalizzabile su  $\mathbb{C}$  se e solo se  $m_\lambda = d_\lambda$  per ogni autovalore  $\lambda$ .
- 18.5 Algoritmo per la diagonalizzazione
- 18.6 Osservazione

(vedi [GS, Capitolo V])

## §19. Prodotti interni e norme

- 19.1 Esempio
- 19.2 Prodotto scalare canonico su  $\mathbb{K}^n$
- 19.3 Prodotto interno
- 19.4 Esempi
- 19.5 Spazio vettoriale metrico, norma associata a  $\langle \cdot, \cdot \rangle$
- 19.6 Teorema di Pitagora, Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz
- 19.7 Definizione assiomatica di norma

## §20. Basi ortonormali

- 20.1 ortogonale, ortonormale
- 20.2 Le coordinate di un vettore rispetto a una base ortonormale
- 20.3 Esempi
- 20.4 Algoritmo di Gram-Schmidt
- 20.5 Corollario: Esistenza di basi ortonormali
- 20.6 proiezione ortogonale, complemento ortogonale
- 20.7 Teorema: Per un sottospazio  $U \subset V$  si ha  $\mathbb{K}^n = U \oplus U^\perp$
- 20.8 Esempio: Per  $A \in M_{m \times n}$  si ha  $N(A) = C(A^H)^\perp$

(vedi [GS, Capitolo III], [A, Capitolo 10])

## §21. Matrici ortogonali e unitarie

- 21.1 Osservazione sulle matrici unitarie
- 21.2 Matrici unitarie e matrici ortogonali
- 21.3 Determinante e autovalori di una matrice unitaria
- 21.4 Teorema di Schur
- 21.5 Corollario
- 21.6 Esempio
- 21.7 Matrici hermitiane e matrici normali
- 21.8 Esempi
- 21.9 Teorema Spettrale
- 21.10 Corollario sulle matrici simmetriche in  $M_{n \times n}(\mathbb{R})$

(vedi [GS, Capitolo VI], [A, Capitolo 11])

### Bibliografia:

[A] M. ABATE, Algebra lineare, McGraw-Hill 2000.

[GS] E. GREGORIO, L. SALCE: Algebra lineare. Libreria Progetto, 2005.

PRECORSO ON-LINE: sito web <http://precorso.dicom.uninsubria.it/>