Foglio 8

Consegna giovedì 5 Dicembre

Esercizio 1 (Punti 8)**.**

1. Determinare il polinomio caratteristico della matrice
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$
2. Determinare gli autovalori di A.
3. Determinare una base di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di A.
4. Determinare due matrici D e Q tali che sia D diagonale e $D = QAQ^{-1}$.

Esercizio 2 (Punti 8)**.**

1. Discutere la diagonalizzabilità della matrice
$$B_\beta = \begin{bmatrix} 1 & \beta & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \beta \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$
al variare di $\beta \in \mathbb{R}$.
2. Per $\beta = 0$ determinare una base di autovettori di $\mathbb{R}^4$.
3. Si consideri l'omomorfismo f_{B_0} associato alla matrice B_0. Scrivere la matrice associata a f_{B_0} rispetto alla base di autovettori sia su dominio che codominio.

Esercizio 3 (Punti 6)**.** Si consideri la matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

1. Si verifichi che $(1\ \ 0\ \ 1)^T$, $(1\ \ 0\ \ -1)^T$ e $(-1\ \ 2\ \ 1)^T$ sono autovettori di A.
2. La matrice A è diagonalizzabile? Si trovi una base per ciascun autospazio di A.
3. Si calcoli A^7.

Esercizio 4 (Punti 8)**.** Dire se i seguenti enunciati sono veri o falsi, motivando la risposta.

1. Sia $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$. Dimostrare che se λ è un autovalore di A e $A^2 = A$, allora $\lambda \in \{0, 1\}$.
2. Per ogni $n \geq 2$ esiste una matrice invertibile $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ tale che $A^T = -A$.
3. La matrice $A = \begin{bmatrix} 10 & \sqrt{2} & -2 & 7 \\ 0 & -1 & 2 & 54 \\ 0 & 0 & -2 & 103 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ è diagonalizzabile