Matematica – Esercizi di ricapitolazione n. 2

Integrazione - Funzioni di due o più variabili reali - Equazioni differenziali

Università di Verona - Laurea in Biotecnologie - A.A. 2011/12

Martedì 24 gennaio 2012

Degli esercizi indicati con (*) viene di seguito fornita la risoluzione dettagliata.

(1) **Integrazione.**

Si calcolino i seguenti integrali definiti:

(1.a) $\int_0^4 \sqrt{x}\, e^{1+\sqrt{x}}\, dx$, **(1.b)** $\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \frac{\sin 2x}{\sin^2 x+4\sin x+5}\, dx$, **(1.c)** $\int_{-1}^0 \frac{x^3}{x^2-6x+9}\, dx$,

(1.d)* $\int_0^1 e^{-x}(x^2+\sin 2x)\, dx$, **(1.e)*** $\int_0^1 \frac{dx}{(x^2+1)^2}$ (porre $x = \operatorname{tg} t$), **(1.f)** $\int_{-1}^0 \frac{e^{3t}}{e^t+1}\, dt$,

(1.g)* $\int_1^2 \frac{t^2-2-(2t+1)\log(3-t)}{2t^2-5t-3}\, dt$, **(1.h)** $\int_0^1 x^3 \log(x^2+3)\, dx$, **(1.i)*** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{2+\cos^2 x}\, dx$,

(1.j) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sqrt{\cos u}\, - u) \sin u\, du$, **(1.k)** $\int_1^9 \frac{\log(2\sqrt{x}-1)}{2x-\sqrt{x}}\, dx$, **(1.l)** $\int_1^e \frac{\operatorname{arctg}(1-2\log x)}{x}\, dx$.

Studiare l'andamento di $f(x)$, dire per quali $a, b \in \mathbb{R}$ è definito $\int_a^b f(x)\, dx$ e calcolarne il valore.

(1.m) $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2-x-2}$, **(1.n)*** $f(x) = 2\,\log|x| + \sqrt{x+2}$, **(1.p)** $f(x) = x\,(e^x-1)-1$.

Si disegnino le seguenti regioni finite del piano cartesiano (x, y) e si calcolino le loro aree.

(1.q) $S_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x(x-\pi) \le y \le x \sin x,\ y \ge 1-\pi\}$;

(1.r) $S_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x^2+x)y \le 2,\ |y| \le 1,\ |x| \le 3\}$;

(1.s)* $S_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \log(1-xy) \le 0,\ |y-2x| \le 1\}$;

(1.t) $S_4 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y^2-2y-3 \le x \le 1+\cos 2y,\ -\frac{\pi}{4} \le y \le \frac{\pi}{2}\}$.

(2) **Funzioni di due o più variabili reali.**

(2.a) Data la funzione $f(x,y) = 1+\log|y(x^2-2)|$, si determinino il dominio naturale, i punti nei quali si annulla e quelli in cui è positiva, disegnando tali insiemi sul piano cartesiano. Si ragioni sui limiti notevoli di f. f è limitata? Dove è differenziabile? Calcolare il differenziale totale df, la funzione lineare tangente di f (il cui grafico è il piano tangente al grafico di f) e la forma

cartesiana e parametrica del piano tangente al grafico di f nei punti $A = (1,1)$ e $B = (-1,2)$. Calcolare le derivate parziali seconde di f, verificando il teorema di Schwarz.

(2.b) Stesse domande per $g(x,y) = \frac{\sqrt{x-y^2}-x}{x+2}$, con $A = (2,-1)$ e $B = (4,0)$.

(2.c)* Stesse domande per $h(x,y) = x\,\mathrm{tg}\,(xy^3)$, con $A = (0,0)$ e $B = (\frac{\pi}{4},1)$.

(2.d)* Stesse domande per $\ell(x,y) = \mathrm{arctg}\,(|2x+y-1|-y)$, con $A = (1,1)$ e $B = (-1,\frac{3}{2})$.

(2.e) Stesse domande per $m(x,y) = \frac{x}{\sqrt{|1-x^2-2y^2|}}$ con $A = (0,0)$ e $B = (-3,2)$.

(2.f) In quali punti $P_0 = (x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$ il piano tangente al grafico di $f(x,y) = x^4 - 4x^3 - 4xy - y^2 + x$ in P_0 è parallelo al piano di equazione cartesiana $z = 5x + 2y + 1$? Calcolare la forma cartesiana e parametrica del piano tangente al grafico di f in ognuno dei punti trovati.

(2.g) Data $f(x,y) = x \log y$ descriverne il dominio, gli zeri, il segno, i limiti notevoli. Come sono fatte le sue curve di livello $f(x,y) = k$? Disegnare la curva di livello passante per $A(0,1)$ e quella passante per $B(-1,e)$. Calcolare i vettori gradienti $\nabla f(A)$ e $\nabla f(B)$, e notare come sono diretti rispetto alle suddette curve di livello.

(2.h)* Determinare la funzione $f(x,y)$ sapendo che ha derivate parziali $\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2y - 6y^2 + 7$ e $\frac{\partial f}{\partial y} = x^3 - 12xy + 2y$, e che vale $f(0,2) = -1$. Stesso problema per $g(x,y)$, sapendo che $\frac{\partial g}{\partial x} = 2x\cos xy - x^2y\sin xy - 3y^2 + 8$ e $\frac{\partial g}{\partial y} = -x^3\sin xy - 6xy - 2y$, e che vale $g(-1,0) = -3$.

(2.i)* Ricercare eventuali punti di massimo e minimo locale della funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ data da $f(x,y) = x^3y^2(1-x-y)$. Disegnare poi gli insiemi chiusi e limitati $A = \{(x,y) : |x| + |y| \le 1\}$ e $B = \{(t,-2) : |t| \le 2\}$, e determinare il massimo e minimo assoluti di f su ciascuno di essi.

(2.l) Ricercare eventuali punti di massimo e minimo locale della funzione $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ data da $g(x,y) = \dfrac{x^2\,e^{-y^2}}{1+x^4}$. Poi, notando (e se possibile dimostrando) che $\lim_{(x,y)\to\infty_2} g(x,y) = 0$, spiegare perché g deve ammettere estremi assoluti su tutto il dominio $\mathbb{R}^2$ anche se quest'ultimo non è limitato (e dunque non si può applicare Weierstrass), e dire quanto valgono.

(2.m) Disegnare l'insieme $K = \{(x,y) : y^2 - 2y \le x \le 1\}$, calcolarne l'area e determinare massimo e minimo assoluti su di esso della funzione $h(x,y) = 3x + 4y$, cercando poi di spiegare quest'ultimo risultato con un ragionamento grafico.

(3) **Equazioni differenziali.**

(3.a) Data l'equazione differenziale $y\,y' = x\,e^{-y^2}$ si dica quali zone del piano le soluzioni $y(x)$ sono crescenti. (Facoltativo: si dica in quali zone del piano le soluzioni sono convesse; si dimostri che le soluzioni sono funzioni pari.[1]) Si calcoli infine la soluzione del problema di Cauchy con condizione iniziale $y(0) = -1$.

(3.b) Data l'equazione differenziale $2(x-2)y' = x(y^2+4)$ si dica quali zone del piano le soluzioni $y(x)$ sono crescenti, ed in quali zone del piano sono convesse. Si calcoli infine la soluzione del problema di Cauchy con condizione iniziale $y(1) = 0$.

[1] Se $\varphi(x)$ è una soluzione, si ponga $\psi(x) = \varphi(-x)$: poiché $\psi'(x) = -\varphi(-x)$, si mostri che anche $\psi(x)$ è soluzione; poi, notando che $\psi(0) = \varphi(-0) = \varphi(0)$...

(3.c)* Data l'equazione differenziale $y^2y'\sin^2 x+(y^3+1)\cos x=0$ si dica in quali zone del piano le soluzioni $y(x)$ sono crescenti. Si calcoli poi la soluzione del problema di Cauchy con condizione iniziale $y(\frac{\pi}{2})=-\sqrt[3]{2}$, e quella con condizione iniziale $y(-3)=-1$.

Risolvere le seguenti equazioni differenziali lineari del primo ordine.

(3.d) $(x+1)y'-y=\log x, \quad y(1)=0.$

(3.e) $xy'+(x+1)y=-2-2x, \quad y(1)=-1$ oppure $=-2$ (fare anche come variabili separabili)

(3.f)* $y'\sin x+y\cos x=\sin 2x, \quad y(\frac{\pi}{2})=y_0$ oppure $y(-\frac{\pi}{2})=y_1$. Per quali y_0 e y_1 si possono prolungare in $x=0$, incollandole, le due soluzioni appena trovate ottenendo una funzione derivabile?

Risolvere le seguenti equazioni differenziali del secondo ordine a coefficienti costanti.

(3.g) $y''+2y'-3y=2e^x-\cos 2x, \quad y(0)=-1,\ y'(0)=\frac{1}{2}.$

(3.h)* $4y''-4y'+y=(x+1)e^{\frac{x}{2}}, \quad y(0)=-2,\ y'(0)=0.$

(3.i) $y''+2y'+5y=2e^x\sin 2x+\sin x-5, \quad y(0)=1,\ y'(0)=-1.$

Risolvere i seguenti problemi tramite un'opportuna equazione differenziale.

(3.j) Una pallina di massa m, vincolata a stare su una guida rettilinea verticale liscia, è soggetta alla propria forza peso ed è trattenuta anche da una molla di costante elastica k; il tutto è immerso in un fluido di viscosità β. Calcolare la legge oraria del moto nei casi $(m,k,\beta)=(1,2,3)$ e $(m,k,\beta)=(1,2,2)$, supponendo che all'istante iniziale la pallina venga lasciata con velocità nulla nel punto in cui è anche attaccata la molla;[2] cercare poi di interpretare i risultati alla luce del buon senso. Se si vuole, discutere anche il caso di m,k,β qualunque.

(3.k) La velocità di crescita di una colonia di batteri è, in ogni istante, direttamente proporzionale al tempo che passa e inversamente proporzionale all'entità della colonia stessa. Sapendo che all'istante iniziale dell'esperimento erano stati messi assieme 4 batteri, e che dopo 4 secondi questi erano raddoppiati, calcolare quanti ve ne saranno dopo un'ora.

(3.l)* La sera di San Silvestro, un gruppo di amici decide di lanciare in aria un candelotto di fuochi artificiali per festeggiare l'anno nuovo. Il candelotto ha massa 1 kg, e dunque è soggetto ad una forza di gravità di (circa) 10 Newton; al momento dell'accensione esso viene spinto da una forza verso l'alto pari a 150 Newton, che decresce proporzionalmente al tempo e si esaurisce dopo 5 secondi. L'aria oppone una resistenza di tipo viscoso con coefficiente pari a 1 Newton·sec/m. Sapendo che il candelotto contiene un meccanismo programmato per causare l'esplosione dopo 3 secondi dallo spegnimento della forza propulsiva (dunque, in tutto, dopo 8 secondi dalla partenza), si dica a che altezza dal suolo (arrotondata al metro) esploderà il candelotto.

[2] Tutte le grandezze sono espresse nelle unità di misura del sistema internazionale standard MKS, e dunque la massa m è espressa in kg, la costante elastica k in Newton/m, il coefficiente di viscosità β in Newton·sec/m, e l'accelerazione di gravità g (che, se si vuole, si può arrotondare per comodità a 10) in m/sec^2. Naturalmente, converrà porre sulla guida rettilinea un sistema di coordinate ascisse x orientato verso l'alto, supponendo che la molla sia imperniata in 0: la domanda è dunque di determinare la funzione $x(t)$.

Alcune soluzioni.

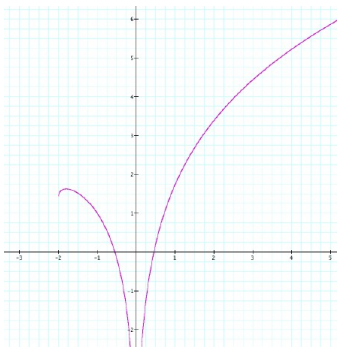
(1) **Integrazione.**

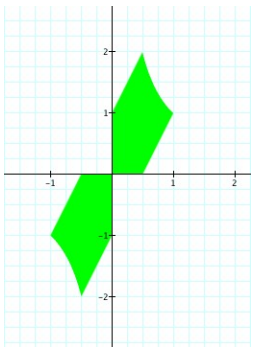
(1.d) Vale $\int e^{-x}(x^2+\sin 2x)\,dx = \int x^2e^{-x}\,dx + \int e^{-x}\sin 2x\,dx$; integrando per parti si ottiene $\int x^2e^{-x}\,dx = -x^2e^{-x}+\int 2xe^{-x}\,dx = -x^2e^{-x}+2(-xe^{-x}+\int e^{-x}\,dx) = -(x^2+2x+2)e^{-x}+k$, e $\int e^{-x}\sin 2x\,dx = -e^{-x}\sin 2x + 2\int e^{-x}\cos 2x\,dx = -e^{-x}\sin 2x + 2(-e^{-x}\cos 2x - 2\int e^{-x}\sin 2x\,dx)$, da cui $5\int e^{-x}\sin 2x\,dx = -e^{-x}\sin 2x - 2e^{-x}\cos 2x$, da cui $\int e^{-x}\sin 2x\,dx = -\frac{1}{5}e^{-x}(\sin 2x+2\cos 2x)+k$. Pertanto $\int e^{-x}(x^2+\sin 2x)\,dx = -e^{-x}(x^2+2x+2+\frac{\sin 2x+2\cos 2x}{5})+k$, e $\int_0^1 e^{-x}(x^2+\sin 2x)\,dx$ basta sottrarre i valori di tale primitiva negli estremi 1 e 0.

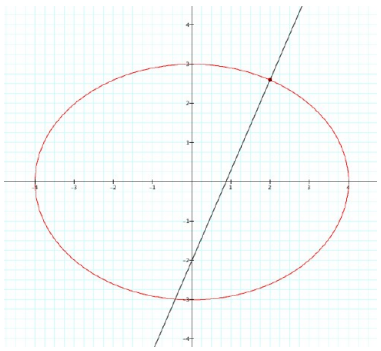
(1.e) Da $x = \operatorname{tg} t$ si ha $dx = \frac{1}{\cos^2 t}\,dt$; se $x=0$ si ha $t=0$, e se $x=1$ si ha $t=\frac{\pi}{4}$, dunque $\int_0^1 \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{(\operatorname{tg}^2 t+1)^2}\frac{1}{\cos^2 t}\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^4 x}{(\cos^2 t+\sin^2 t)^2}\frac{1}{\cos^2 t}\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 t\,dt = (\frac{t+\sin t\cos t}{2}]_0^{\frac{\pi}{4}} = (\frac{\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}}{2}) - (0) = \frac{\pi+2}{8}$.

(1.g) Si ha $2t^2-5t-3 = (2t+1)(t-3)$, dunque $\int \frac{t^2-2-(2t+1)\log(3-t)}{2t^2-5t-3}\,dt = \int \frac{t^2-2}{2t^2-5t-3}\,dt + \int \frac{\log(3-t)}{t-3}\,dt$. Iniziamo calcolando $\int \frac{t^2-2}{2t^2-5t-3}\,dt$: dividendo si ha $\frac{t^2-2}{2t^2-5t-3} = \frac{1}{2}(1+\frac{5t-1}{2t^2-5t-3})$, e poi $\frac{5t-1}{2t^2-5t-3} = \frac{1}{2t+1}+\frac{2}{t-3}$, pertanto $\int \frac{t^2-2}{2t^2-5t-3}\,dt = \frac{1}{2}(t+\frac{1}{2}\log|2t+1|+2\log|t-3|)+k$. Passando poi a $\int \frac{\log(3-t)}{t-3}\,dt$, poniamo $\tau = 3-t$, da cui (sostituendo e integrando per parti) si ottiene $d\tau = -dt$: si ha allora $\int \frac{\log(3-t)}{t-3}\,dt = \int \frac{\log\tau}{\tau}\,d\tau = \log^2\tau - \int \frac{\log\tau}{\tau}\,d\tau$, da cui $\int \frac{\log\tau}{\tau}\,d\tau = \frac{1}{2}\log^2\tau + k$, ovvero $\int \frac{\log(3-t)}{t-3}\,dt = \frac{1}{2}\log^2(3-t)+k$. A questo punto basta riunire i due integrali addendi e sottrarre i valori della primitiva così ottenuta negli estremi 2 e 1.

(1.i) Posto $t = \cos x$ si ha $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{2+\cos^2 x}\,dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x\cos x}{2+\cos^2 x}\,dx = -2\int_1^0 \frac{t}{2+t^2}\,dt = \int_0^1 \frac{2t}{2+t^2}\,dt = (\log(2+t^2)]_0^1 = \log\frac{3}{2}$.







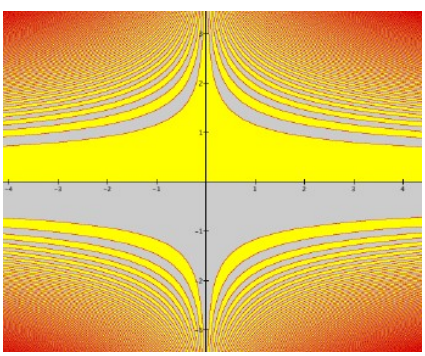
(1) Grafico di $f(x) = 2\log|x|+\sqrt{x+2}$ in (1.n); **(2)** L'insieme S_3 in (1.s); **(3)** L'ellisse $\gamma(t)$ in (2.b).

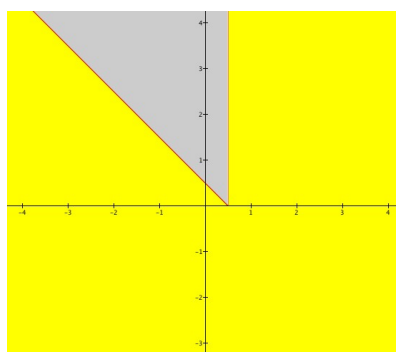
(1.n) (Figura 1) Il dominio di $f(x) = 2\log|x|+\sqrt{x+2}$ è dato da $x \geq -2$ e $x \neq 0$; la funzione non ha periodo o parità, è continua nel suo dominio e derivabile ovunque tranne che in $x=-2$ (a causa della radice). Un facile confronto grafico tra le funzioni $2\log|x|$ (il logaritmo a due falde simmetriche e raddoppiato di valore) e $-\sqrt{x+2}$ (la radice quadrata arretrata di 2 e resa negativa) mostra che f si annulla in due punti x_0 e x_1 con $-1 < x_0 < 0 < x_1 < 1$, e vale $f(x) > 0$ per $-2 \leq x < x_0$ e $x > x_1$. I limiti notevoli sono determinati e valgono $\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, mentre f è continua in -2 col valore $f(-2) = 2\log 2 \sim 1{,}4$; non vi sono asintoti a $+\infty$. Derivando (con $x \neq -2$) si ottiene $f'(x) = \frac{2}{x}+\frac{1}{2\sqrt{x+2}} = \frac{4\sqrt{x+2}+x}{2x\sqrt{x+2}}$: vale $f'(x)=0$ quando $4\sqrt{x+2} = -x$, che nell'ipotesi $-x > 0$ (cioè se $-2 \leq x < 0$) equivale a $(4\sqrt{x+2})^2 = (-x)^2$, ovvero $x^2-16x-32=0$, soddisfatta per $x = x_2 := -4(\sqrt{6}-2) \sim -1{,}8$. Passiamo ora allo studio di $f'(x) > 0$. Il numeratore è positivo quando $4\sqrt{x+2} > -x$, che se $-x < 0$ (cioè se $x > 0$) è sempre vero, mentre se $-x > 0$ (cioè se $-2 < x < 0$) equivale a $(4\sqrt{x+2})^2 > (-x)^2$, ovvero $x^2-16x-32 < 0$, soddisfatta per $x > x_2$: pertanto il numeratore è positivo per $x_2 < x < 0$ e per $x > 0$. D'altra parte il denominatore è positivo quando $x > 0$, dunque $f'(x) > 0$ per $-2 < x < x_2$ e per $x > 0$: ne ricaviamo che $x = x_2$ è un punto di massimo locale (con $f(x_2) \sim 1{,}6$). Si osservi anche che $\lim_{x\to -2^+} f'(x) = +\infty$. La derivata seconda $f''(x) = -\frac{2}{x^2}-\frac{1}{4}(x+2)^{-\frac{3}{2}}$ è sempre < 0, dunque f è concava in tutto il dominio. Dallo studio appena effettuato ricaviamo che l'integrale $\int_a^b f(x)\,dx$ ha senso quando sia a che b stanno in $[-2,0[$, oppure quando sono entrambi > 0, ed in tali casi vale $\int_a^b f(x)\,dx = (2x(\log|x|-1)+\frac{2}{3}(x+2)^{\frac{3}{2}}]_a^b$.

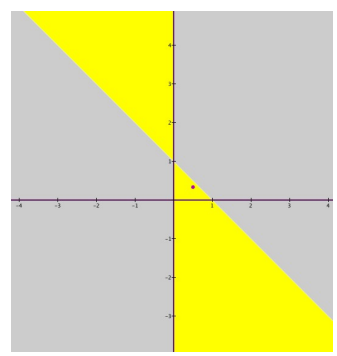
(1.s) (Figura 2) La condizione $\log(1-xy) \le 0$ richiede che $0 < 1-xy \le 1$, ovvero che $0 \le xy < 1$: si tratta delle parti di I e III quadrante strettamente comprese tra le due falde dell'iperbole equilatera $xy = 1$. Invece, la condizione $|y-2x| \le 1$ equivale a $-1 \le y-2x \le 1$, ovvero $2x-1 \le y \le 2x+1$: si tratta della fascia obliqua di piano compreso tra le due rette $y = 2x-1$ e $y = 2x+1$. L'insieme S_3 è ottenuto dall'intersezione di tali sottoinsiemi. Dal sistema tra $y = \frac{1}{x}$ e $y = 2x+1$ si ottiene $x = -1$ e $x = \frac{1}{2}$, e da quello tra $y = \frac{1}{x}$ e $y = 2x-1$ si ottiene $x = -\frac{1}{2}$ e $x = 1$: per chiare ragioni di simmetria, l'area di S_3 risulta $2(\int_0^{\frac{1}{2}} (2x+1)\,dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{x}\,dx + \int_1^{\frac{1}{2}} (2x-1)\,dx + \int_{\frac{1}{2}}^0 0\,dx) = 2((x^2+x]_0^{\frac{1}{2}} + (\log x]_{\frac{1}{2}}^1 + (x^2-x]_1^{\frac{1}{2}}) = 2\log 2 + 1 \sim 2,4$.

(2) **Funzioni di due o più variabili reali.**

(2.c) (Figura 4) Il dominio di $f(x,y) = x\,\mathrm{tg}\,(xy^3)$ è dato dalla condizione $xy^3 \ne \frac{\pi}{2} + k\pi$ (con $k \in \mathbb{Z}$): si tratta di escludere una famiglia di curve del tipo $xy^3 = \alpha$, che hanno due rami simili a quelli dell'iperbole equilatera $xy = 1$ nel primo e terzo quadrante se $\alpha > 0$, nel secondo e quarto quadrante se $\alpha < 0$, mentre se $\alpha = 0$ si ottiene l'unione dei due assi coordinati $x = 0$ e $y = 0$. Similmente, si ha $f(x,y) = 0$ per $x = 0$, $y = 0$ oppure per $xy^3 = k\pi$ (con $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$). Si ha poi $f(x,y) > 0$ nei seguenti casi: se $x > 0$, per $k\pi < xy^3 < \frac{\pi}{2} + k\pi$; e se $x < 0$, per $\frac{\pi}{2} + k\pi < xy^3 < \pi + k\pi$ (con $k \in \mathbb{Z}$). Quando il punto (x,y) si avvicina ad una delle curve escluse dal dominio, $f(x,y)$ diverge a $\pm\infty$; dunque f non è limitata. La funzione è differenziabile su tutto il suo dominio; le derivate parziali sono $\frac{\partial f}{\partial x} = \mathrm{tg}\,(xy^3) + x\frac{y^3}{\cos^2(xy^3)}$ e $\frac{\partial f}{\partial y} = x\frac{3xy^2}{\cos^2(xy^3)}$. Essendo $f(0,0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$, sia la funzione lineare tangente in $(0,0)$ che il differenziale $df_{(0,0)}(x,y)$ sono 0; essendo invece $f(\frac{\pi}{4},1) = \frac{\pi}{4}$, poi $\frac{\partial f}{\partial x}(\frac{\pi}{4},1) = 1 + \frac{\pi}{4}\frac{1}{\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{2} + 1$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(\frac{\pi}{4},1) = \frac{\pi}{4}\frac{\frac{3\pi}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{3\pi^2}{8}$, si ha $df_{(\frac{\pi}{4},1)}(x,y) = (\frac{\pi}{2}+1)x + \frac{3\pi^2}{8}y$ e la funzione lineare tangente $\frac{\pi}{4} + (\frac{\pi}{2}+1)(x-\frac{\pi}{4}) + \frac{3\pi^2}{8}(y-1) = (\frac{\pi}{2}+1)x + \frac{3\pi^2}{8}y - \frac{\pi^2}{2}$. Le derivate seconde sono $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2\frac{y^3}{\cos^2(xy^3)} + 2xy^6\frac{\sin(xy^3)}{\cos^3(xy^3)} = \frac{2y^3(\cos(xy^3)+y^3\sin(xy^3))}{\cos^3(xy^3)}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 3x^2\frac{2y\cos^2(xy^3)+2y^2\cdot 3xy^2\sin(xy^3)\cos(xy^3)}{\cos^4(xy^3)} = \frac{6x^2y(\cos(xy^3)+3xy^3\sin(xy^3))}{\cos^3(xy^3)}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial x}) = \frac{3xy^2}{\cos^2(xy^3)} + x\frac{3y^2\cos^2(xy^3)+y^3\cdot 2\sin(xy^3)\cos(xy^3)\cdot 3xy^2}{\cos^4(xy^3)} = \frac{6xy^2(\cos(xy^3)+xy^3\sin(xy^3))}{\cos^3(xy^3)}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial y}) = 2x\frac{3y^2}{\cos^2(xy^3)} + x^2\cdot 3y^2\frac{2y^3\sin(xy^3)}{\cos^3(xy^3)} = \frac{6xy^2(\cos(xy^3)+xy^3\sin(xy^3))}{\cos^3(xy^3)}$: notare che $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$, come prescrive Schwarz.







(4) Segno di $x\,\mathrm{tg}\,(xy^3)$ in (2.c); **(5)** Segno di $\mathrm{arctg}\,(|2x+y-1|-y)$ in (2.d); **(6)** Segno di $x^3y^2(1-x-y)$ in (2.i); in porpora i punti stazionari.

(2.d) (Figura 5) Il dominio di $\ell(x,y) = \mathrm{arctg}\,(|2x+y-1|-y)$ è tutto $\mathbb{R}^2$; vale $\ell(x,y) = 0$ quando $|2x+y-1| = y$: nell'ipotesi che $y \ge 0$, ciò equivale a $2x+y-1 = y$ (ovvero $x = \frac{1}{2}$) oppure $2x+y-1 = -y$ (ovvero $y = -x+\frac{1}{2}$), pertanto ℓ si annulla sui tratti delle rette $x = \frac{1}{2}$ e $y = -x+\frac{1}{2}$ che stanno nel semipiano $y \ge 0$. Quanto al segno, vale $\ell(x,y) > 0$ quando $|2x+y-1| > y$; ciò è sempre vero se $y < 0$, mentre se $y \ge 0$ equivale a $2x+y-1 < -y$ (ovvero $y < -x+\frac{1}{2}$) oppure $2x+y-1 > y$ (ovvero $x > \frac{1}{2}$): pertanto ℓ è positiva su tutto il piano $\mathbb{R}^2$ tranne il settore del semipiano $y > 0$ compreso tra le rette $x = \frac{1}{2}$ e $y = -x+\frac{1}{2}$. La funzione ℓ è certamente limitata, perché $|\ell(x,y)| < \frac{\pi}{2}$; da quanto detto sopra, si evince che il limite a ∞ non esiste. La funzione è certamente differenziabile in tutti i punti che non stanno sulla retta $2x+y-1$ (a causa del modulo). Dove $2x+y-1 > 0$ (ovvero sopra la retta $y = -2x+1$) la funzione diventa $\ell(x,y) = \mathrm{arctg}\,((2x+y-1)-y) = \mathrm{arctg}\,(2x-1)$, dunque costante rispetto a y, con derivate parziali $\frac{\partial \ell}{\partial x} = \frac{2}{1+(2x-1)^2} = \frac{1}{2x^2-2x+1}$ e $\frac{\partial \ell}{\partial y} \equiv 0$. Il punto $A = (1,1)$ sta in tale parte del dominio: essendo $\ell(1,1) = \mathrm{arctg}\,(1) = \frac{\pi}{4}$ e $\frac{\partial \ell}{\partial x}(1,1) = 1$, si ha $d\ell_{(1,1)}(x,y) = x$ e la funzione lineare tangente $\frac{\pi}{4} + (x-1) = x + \frac{\pi}{4} - 1$. Dove invece $2x+y-1 < 0$ (ovvero sotto la retta $y = -2x+1$) la funzione diventa $\ell(x,y) = \mathrm{arctg}\,(-(2x+y-1)-y) = \mathrm{arctg}\,(1-2x-2y)$, con derivate parziali $\frac{\partial \ell}{\partial x} = \frac{\partial \ell}{\partial y} = \frac{-2}{1+(1-2x-2y)^2} = -\frac{1}{2x^2+2y^2+4xy-2x-2y+1}$. Il punto $B = (-1,\frac{3}{2})$ sta in tale parte del dominio: essendo $\ell(-1,\frac{3}{2}) = \mathrm{arctg}\,(0) = 0$ e $\frac{\partial \ell}{\partial x}(-1,\frac{3}{2}) = \frac{\partial \ell}{\partial y}(-1,\frac{3}{2}) = -2$, si ha $d\ell_{(-1,\frac{3}{2})}(x,y) = -2x-2y$ e la funzione lineare

tangente $0-2(x-(-1))-2(y-\frac{3}{2})=-2x-2y+1$. Guardiamo ora i punti sulla retta "incriminata" $y=-2x+1$, ovvero quelli della forma $(x_0,-2x_0+1)$: la derivata parziale $\frac{\partial \ell}{\partial y}$ ha (ovviamente) limite 0 tendendo ad un tale punto da sopra la retta, ed ha limite $-\frac{1}{2(x_0)^2+2(-2x_0+1)^2+4x_0(-2x_0+1)-2x_0-2(-2x_0+1)+1}=-\frac{1}{2x_0^2-2x_0+1}$ tendendovi da sotto: si noti che tale ultimo limite non è mai nullo, dunque $\frac{\partial \ell}{\partial y}$ non esiste in nessuno dei punti della retta. Ciò dimostra senza dubbio che ℓ, pur essendo continua sui punti della retta, non è differenziabile in nessuno di essi (se lo fosse, dovrebbero anche esistere entrambe le derivate parziali). Le derivate seconde sopra la retta $y=-2x+1$ sono $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=-\frac{2(2x-1)}{(2x^2-2x+1)^2}$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\equiv 0$; sotto la retta $y=-2x+1$ sono invece $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=\frac{2(2x+2y-1)}{(2x^2+2y^2+4xy-2x-2y+1)^2}$. In entrambi i casi il teorema di Schwarz è confermato.

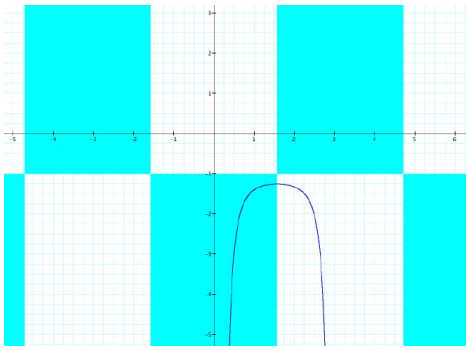
(2.h) Poiché $\frac{\partial f}{\partial x}=3x^2y-6y^2+7$, integrando rispetto a x dovrà essere $f(x,y)=x^3y-6xy^2+7x+\varphi(y)$ per una certa funzione $\varphi(y)$ da determinare; essendo poi $\frac{\partial f}{\partial y}=x^3-12xy+2y$, integrando rispetto a y si ottiene $x^3-12xy+\varphi'(y)=x^3-12xy+2y$, da cui $\varphi'(y)=2y$, da cui $\varphi(y)=y^2+k$ con $k\in\mathbb{R}$ costante da determinare, e dunque $f(x,y)=x^3y-6xy^2+7x+y^2+k$; infine, da $f(0,2)=-1$ si ricava $4+k=-1$, dunque $k=-5$, e perciò $f(x,y)=x^3y-6xy^2+7x+y^2-5$. In modo simile, poiché $\frac{\partial g}{\partial x}=2x\cos xy-x^2y\sin xy-3y^2+8$ dovrà essere $g(x,y)=x^2\cos xy-3xy^2+8x+\varphi(y)$ per una certa funzione $\varphi(y)$ da determinare; essendo poi $\frac{\partial g}{\partial y}=-x^3\sin xy-6xy-2y$ si ottiene $-x^3\sin xy-6xy+\varphi'(y)=-x^3\sin xy-6xy-2y$, da cui $\varphi'(y)=-2y$, da cui $\varphi(y)=-y^2+k$ con $k\in\mathbb{R}$ costante da determinare, e dunque $g(x,y)=x^2\cos xy-3xy^2+8x-y^2+k$; infine, da $g(-1,0)=-3$ si ricava $1-8+k=-3$, dunque $k=5$, e perciò $g(x,y)=x^2\cos xy-3xy^2+8x-y^2+5$.
Si noti che in generale, se vengono assegnate le derivate parziali $\frac{\partial f}{\partial x}=\alpha(x,y)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}=\beta(x,y)$, il teorema di Schwarz implica che deve essere $\frac{\partial \alpha}{\partial y}=\frac{\partial \beta}{\partial x}$ (condizioni di *chiusura*). Per maggiori dettagli, si veda la parte finale facoltativa delle note sulle funzioni di più variabili reali.

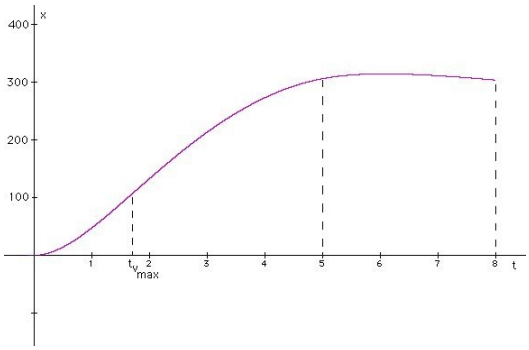
(2.i) (Figura 6) Gli eventuali punti di massimo e minimo locale in $\mathbb{R}^2$ di $f(x,y)=x^3y^2(1-x-y)$ si trovano tra i punti stazionari, dunque iniziamo col cercare questi ultimi. Dal sistema tra $\frac{\partial f}{\partial x}=3x^2y^2(1-x-y)-x^3y^2=0$ e $\frac{\partial f}{\partial y}=2x^3y(1-x-y)-x^3y^2=0$, ovvero tra $x^2y^2(3-4x-3y)=0$ e $x^3y(2-2x-3y)=0$, si trovano tutti i punti degli assi coordinati e il punto $P(\frac{1}{2},\frac{1}{3})$. La matrice hessiana è $H_f(x,y)=\begin{pmatrix} 6xy^2(1-2x-y) & x^2y(6-8x-9y) \\ x^2y(6-8x-9y) & x^3(2-2x-6y)\end{pmatrix}$, dunque $H_f(P)=\begin{pmatrix} -\frac{1}{9} & -\frac{1}{12} \\ -\frac{1}{12} & -\frac{1}{8}\end{pmatrix}$ ci dice che P è un punto di massimo locale stretto (con $f(P)=\frac{1}{432}$). D'altra parte, nei punti degli assi coordinati l'hessiano ha determinante nullo, dunque il criterio non dà informazioni precise; tuttavia, poiché sugli assi f è nulla, l'esame del segno di f (riportato in figura) ci dice subito che i punti $(x_0,0)$ dell'asse x sono di massimo locale non stretto se $x_0<0$ oppure $x_0>1$ e di minimo locale non stretto se $0<x_0<1$, mentre i punti $(0,0)$, $(1,0)$ e tutti i punti dell'asse y sono delle selle.
L'insieme $A=\{(x,y):|x|+|y|\le 1\}$ è il rombo pieno (lati compresi) di vertici $Q_1(1,0)$, $Q_2(0,1)$, $Q_3(-1,0)$ e $Q_4(0,-1)$, mentre $B=\{(t,-2):|t|\le 2\}$ è il tratto di segmento orizzontale tra i punti $R_1(-2,-2)$ e $R_2(2,-2)$: essendo entrambi gli insiemi chiusi e limitati in $\mathbb{R}^2$, f ammetterà estremi assoluti su ciascuno di essi per Weierstrass. Iniziando da A, i punti interni candidati ad essere estremanti per f sono quelli per cui $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial y}=0$, e sono dunque i già noti P (in cui $f(P)=\frac{1}{432}$) e quelli sugli assi (nei quali $f=0$). Nei quattro vertici si ha pure $f(Q_1)=f(Q_2)=f(Q_3)=f(Q_4)=0$. Sul lato Q_1Q_2 si ha $\phi_1(t)=f(t,1-t)\equiv 0$; sul lato Q_2Q_3 si ha $\phi_2(t)=f(t,t+1)=-2t^4(t+1)^2$ con $-1<t<0$, e ponendo $\phi_2'(t)=-4t^3(t+1)(3t+2)=0$ si ottiene $t=-\frac{2}{3}$, ovvero il punto $(-\frac{2}{3},\frac{1}{3})$ in cui f vale $-\frac{32}{729}$; sul lato Q_3Q_4 si ha $\phi_3(t)=f(t,-1-t)=2t^3(t+1)^2$ con $-1<t<0$, e ponendo $\phi_3'(t)=2t^2(t+1)(5t+3)=0$ si ottiene $t=-\frac{3}{5}$, ovvero il punto $(-\frac{3}{5},-\frac{2}{5})$ in cui f vale $-\frac{216}{3125}$; infine, sul lato Q_4Q_1 si ha $\phi_4(t)=f(t,t-1)=-2t^3(t-1)^3$ con $0<t<1$, e ponendo $\phi_4'(t)=-6t^2(t-1)^2(2t-1)=0$ si ottiene $t=\frac{1}{2}$, ovvero il punto $(\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$ in cui f vale $\frac{1}{32}$. Pertanto, essendo $-\frac{216}{3125}<-\frac{32}{729}<0<\frac{1}{432}<\frac{1}{32}$, il minimo assoluto di f su A è $-\frac{216}{3125}$ (assunto in $(-\frac{3}{5},-\frac{2}{5})$) e il massimo assoluto è $\frac{1}{32}$ (assunto in $(\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$).
Passiamo ora a B. Negli estremi si ha $f(R_1)=-160$ e $f(R_2)=32$, mentre negli altri punti si ha $\phi(t)=f(t,-2)=4t^3(3-t)$ con $-2<t<2$: ponendo $\phi'(t)=4t^2(9-4t)=0$ si ottiene solo $t=0$ (invece $t=\frac{9}{4}$ non interessa perché >2), ovvero il punto $(0,-2)$ in cui f vale 0. Pertanto il minimo assoluto di f su B è -160 (assunto in R_1) e il massimo assoluto è 32 (assunto in R_2).

(3) **Equazioni differenziali.**

(3.c) (Figura 7) Per discutere la crescenza delle soluzioni bisogna ricavare esplicitamente y', ma ciò richiede di dividere per $y^2\sin^2 x$: iniziamo dunque discutendo brevemente cosa accade quando tale divisione non è possibile. Dalla forma dell'equazione si deduce che se $y(x)$ è una soluzione e $y(x)=0$, si ottiene $\cos x=0$: ovvero, se una soluzione si annulla in un punto x allora tale punto dev'essere necessariamente della forma $\frac{\pi}{2}+k\pi$ con $k\in\mathbb{Z}$; viceversa, nei punti x della forma $\frac{\pi}{2}+k\pi$ si ha $\pm y^2(x)y'(x)=0$, dunque o $y(x)=0$ (come appena detto) o $y'(x)=0$, ovvero si ha un punto stazionario, probabile estremante locale. Sempre dalla forma dell'equazione si deduce anche che se una soluzione è definita in qualche punto x del tipo $k\pi$, dev'essere $y^3(x)+1=0$, ovvero in tale punto la soluzione deve valere -1. Escludendo ora i punti del piano in cui $y=0$ oppure $x=k\pi$, otteniamo

finalmente $y' = -\frac{(y^3+1)\cos x}{y^2 \sin^2 x}$: pertanto $y'(x) = 0$ o se $y(x) = -1$ o se $\cos x = 0$ (ovvero per $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$), mentre $y'(x) > 0$ se $(y^3+1)\cos x < 0$, ovvero se $y > -1$ e $\frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$ oppure se $y < -1$ e $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi$. Se la condizione iniziale è $y(-3) = -1$, la soluzione è la funzione costante $y(x) \equiv 1$; occupiamoci invece del caso in cui la condizione iniziale sia $y(\frac{\pi}{2}) = -\sqrt[3]{2}$. Separando le variabili, si ottiene $\frac{y^2}{y^3+1} y' = -\frac{\cos x}{\sin^2 x}$, da cui integrando si ha $\frac{1}{3}\log|y^3+1| = \frac{1}{\sin x} + k$; imponendo la condizione iniziale si ha $0 = 1 + k$, da cui $k = -1$ e perciò $\frac{1}{3}\log|y^3+1| = \frac{1}{\sin x} - 1$. Si ha dunque $|y^3+1| = e^{3(\frac{1}{\sin x}-1)}$, ovvero $y^3 + 1 = \pm e^{3(\frac{1}{\sin x}-1)}$: ma la condizione iniziale impone $-1 = \pm 1$, e dunque va scelto il segno "$-$", da cui $y^3 = -1 - e^{3(\frac{1}{\sin x}-1)}$, da cui $y = -\sqrt[3]{1 + e^{3(\frac{1}{\sin x}-1)}}$.





(7) Zone di crescenza e grafico della soluzione di (3.c); **(8)** Il grafico della legge oraria del moto di (3.l).

(3.f) Per risolvere l'equazione è necessario per il momento escludere i punti in cui $\sin x = 0$, ovvero i punti del tipo $k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$. In tale caso, l'equazione diventa $y' + p(x)\,y = q(x)$ con $p(x) = \operatorname{cotg} x$ e $q(x) = 2\cos x$. Come noto, una primitiva di $p(x)$ è $P(x) = \log|\sin x|$; bisogna poi calcolare $\int e^{P(x)} q(x)\,dx$, ovvero $\int |\sin x| \cdot 2\cos x\,dx = (\operatorname{sign}(\sin x)) \int 2\sin x \cos x\,dx = -(\operatorname{sign}(\sin x))\cos^2 x$. Si ha dunque l'integrale generale $y(x) = e^{-P(x)}(\int e^{P(x)} q(x)\,dx + k) = \frac{1}{|\sin x|}(-(\operatorname{sign}(\sin x))\cos^2 x + k) = \frac{k}{|\sin x|} - \frac{\cos^2 x}{\sin x}$.
Imponendo la condizione iniziale $y(\frac{\pi}{2}) = y_0$ si ottiene $k = y_0$ e dunque $y(x) = \frac{y_0}{|\sin x|} - \frac{\cos^2 x}{\sin x} = \frac{y_0 - \cos^2 x}{\sin x}$, definita in $]0, \pi[$; imponendo invece la condizione iniziale $y(-\frac{\pi}{2}) = y_1$ si ottiene $k = y_1$ e dunque $y(x) = \frac{y_1}{|\sin x|} - \frac{\cos^2 x}{\sin x} = \frac{-y_1 - \cos^2 x}{\sin x}$, definita in $]-\pi, 0[$. L'unico caso in cui si può sperare di prolungare in $x = 0$, incollandole, le due soluzioni appena trovate è quando $y_0 = 1$ e $y_1 = -1$ (se queste due condizioni non sono soddisfatte contemporaneamente, entrambe oppure una delle due soluzioni divergono quando x tende a 0). In tal caso si ottiene la funzione $\frac{1-\cos^2 x}{\sin x} = \sin x$ sia a sinistra che a destra, e tale funzione può essere ovviamente prolungata come funzione derivabile (anzi, addirittura come funzione $\mathcal{C}^\infty$) in $x = 0$ col valore $\sin 0 = 0$. (D'altra parte, con un po' di occhio, si poteva riconoscere fin da subito che $y(x) = \sin x$ è una soluzione dell'equazione differenziale data.)

(3.h) L'equazione caratteristica è $4\lambda^2 - 4\lambda + 1 = 0$, che ha soluzione doppia $\lambda = \frac{1}{2}$: dunque la soluzione generale dell'equazione omogenea associata $4y'' - 4y' + y = 0$ è data da $y(x) = (A + Bx)e^{\frac{x}{2}}$ al variare di $A, B \in \mathbb{R}$. Cerchiamo ora una soluzione particolare $\tilde{y}(x)$ dell'equazione completa $4y'' - 4y' + y = (x+1)e^{\frac{x}{2}}$: in questo caso, il metodo dei coefficienti indeterminati ci dice che si potrà trovare del tipo $\tilde{y}(x) = x^2 e^{\frac{x}{2}}(mx + q) = (mx^3 + qx^2)e^{\frac{x}{2}}$. Derivando, si ottiene $\tilde{y}'(x) = (\frac{m}{2}x^3 + (\frac{q}{2} + 3m)x^2 + 2qx)e^{\frac{x}{2}}$ e $\tilde{y}''(x) = (\frac{m}{4}x^3 + (\frac{q}{4} + 3m)x^2 + (2q + 6m)x + 2q)e^{\frac{x}{2}}$, ed imponendo che sia soluzione si trova allora $4\tilde{y}'' - 4\tilde{y}' + \tilde{y} = (24mx + 8q)e^{\frac{x}{2}} = (x+1)e^{\frac{x}{2}}$, da cui $m = \frac{1}{24}$ e $q = \frac{1}{8}$ e dunque $\tilde{y}(x) = \frac{x^3 + 3x^2}{24} e^{\frac{x}{2}}$. L'integrale generale dell'equazione completa è dunque $y(x) = (A + Bx + \frac{x^3+3x^2}{24})e^{\frac{x}{2}}$ al variare di $A, B \in \mathbb{R}$, da cui $y'(x) = (\frac{1}{2}A + B + (\frac{1}{2}B + \frac{1}{4})x + \frac{3}{16}x^2 + \frac{1}{48}x^3)e^{\frac{x}{2}}$. Imponendo le condizioni iniziali, si trova $y(0) = A = -2$ e $y'(0) = \frac{1}{2}A + B = 0$, da cui $B = 1$, e dunque finalmente la soluzione $y(x) = \frac{x^3+3x^2+24x-48}{24} e^{\frac{x}{2}}$.

(3.l) (Figura 8) In base a quanto detto, l'intensità della forza propulsiva è data dalla funzione continua $F : [0, 8] \to \mathbb{R}$ data da $F(t) = 150(1 - \frac{1}{5}t) = 150 - 30t$ (per $0 \le t \le 5$) e $F(t) \equiv 0$ (per $5 \le t \le 8$). Fissiamo ora un sistema di coordinate ascisse x orientato verso l'alto con il valore $x = 0$ sul suolo. Dall'istante iniziale $t = 0$ all'istante $t = 5$ il moto $x(t)$ obbedisce dunque all'equazione $x'' = -10 - x' + (150 - 30t)$, ovvero $x'' + x' = 140 - 30t$, con condizioni iniziali $x(0) = 0$ e $x'(0) = 0$ (il candelotto parte da terra con velocità nulla). Una prima integrazione dà $x' + x = 140t - 15t^2 + k$ con k da determinare; ma le condizioni iniziali danno necessariamente $k = 0$. Si ottiene allora l'equazione lineare del primo ordine $x' + x = 140t - 15t^2$. Ponendo $p(t) = 1$ e $q(t) = 140t - 15t^2$, una primitiva di $p(t)$ è $P(t) = t$, e $\int e^{P(t)} q(t)\,dt = \int (140t - 15t^2)e^t\,dt = (140t - 15t^2)e^t - \int (140 - 30t)e^t\,dt = (140t - 15t^2)e^t - (140 - 30t)e^t + \int (-30)e^t\,dt = (170t - 15t^2 - 170)e^t$.

L'integrale generale è dunque $x(t) = e^{-t}((170t - 15t^2 - 170)e^t + h) = 170t - 15t^2 - 170 + he^{-t}$ con h da determinare; da $x(0) = 0$ si ricava $-170 + h = 0$, ovvero $h = 170$, da cui la soluzione $x(t) = 170(t - 1 + e^{-t}) - 15t^2$. Ribadiamo che questa legge vale solo fino a $t = 5$, in cui l'altezza raggiunta vale $x(5) \sim 306$ m, e la velocità è $x'(5) = [170(1 - e^{-t}) - 30t]_{t=5} \sim 19$ m/sec (corrispondenti a circa 68 km/h).
Dall'istante iniziale $t = 5$ all'istante $t = 8$ la forza propulsiva sparisce, ed il moto $x(t)$ obbedisce dunque all'equazione $x'' = -10 - x'$, ovvero $x'' + x' = -10$, con le nuove condizioni iniziali $x(5) = 306$ m e $x'(5) = 19$ m/sec ereditate dal moto precedente. Procedendo ancora come prima, una prima integrazione dà $x' + x = -10t + k$ con k da determinare, e le condizioni iniziali danno $19 + 306 = -50 + k$, da cui $k = 375$. Si ottiene allora l'equazione lineare del primo ordine $x' + x = -10t + 375$. Ponendo $p(t) = 1$ e $q(t) = 375 - 10t$, una primitiva di $p(t)$ è ancora $P(t) = t$, e $\int e^{P(t)} q(t)\, dt = \int (375 - 10t)e^t\, dt = (375 - 10t)e^t - \int (-10)e^t\, dt = (385 - 10t)e^t$. L'integrale generale è dunque $x(t) = e^{-t}((385 - 10t)e^t + h) = 385 - 10t + he^{-t}$ con h da determinare; da $x(5) = 306$ si ricava $385 - 50 + he^{-5} = 306$, ovvero $h = -29e^5 \sim -4304$, da cui la soluzione $x(t) = 385 - 10t - 4304e^{-t}$, che vale per $5 \leq t \leq 8$. L'altezza finale raggiunta all'istante dello scoppio, ovvero all'istante dell'inizio dello spettacolo dei fuochi d'artificio, è dunque $x(8) \sim 303$ m. (Terminiamo, per curiosità, con alcune osservazioni. La velocità massima toccata dal candelotto si ha quando $(x'(t))' = x''(t) = 170e^{-t} - 30 = 0$, ovvero dopo $\tilde{t} = \log \frac{17}{3} \sim 1,73$ secondi dalla partenza, quando diventa $x'(\tilde{t}) \sim 88$ m/sec, ovvero circa 317 km/h. L'altezza massima raggiunta durante l'ascesa si ha quando $x'(t) = -10 + 4304e^{-t} = 0$, ovvero dopo $\hat{t} = \log \frac{2152}{5} \sim 6,06$ secondi dalla partenza, alla quota $x(\hat{t}) \sim 314$ m; infatti, all'istante dello scoppio il candelotto sta già scendendo, con velocità $x'(\hat{t}) \sim -8,55$ m/sec, circa -31 km/h. È pure curioso notare che, in base al modello adottato in questo problema, se il candelotto non fosse esploso la velocità di discesa si sarebbe stabilizzata velocemente sui -10 m/sec, circa -36 km/h, raggiungendo nuovamente il suolo quando $385 - 10t - 4304e^{-t} = 0$, ovvero dopo circa $t_1 \sim 38,5$ secondi.)