

ELEMENTI DI GEOMETRIA PROIETTIVA

SANSONETTO NICOLA

1. INTRODUZIONE

Questi appunti delle Lezioni di una parte del modulo di *Elementi di Geometria* per il corso di *Algebra Lineare con Elementi di Geometria*¹ sono basati sulle note [Spera-1, Spera-2] del prof. Spera che ha tenuto questo parte del corso dal 2006 al 2012.

In questi appunti vengono fornite alcune definizioni e proprietà di base degli spazi proiettivi, con particolare enfasi sul piano proiettivo reale e complesso.

2. LO SPAZIO PROIETTIVO

Sia V un \mathbb{K} -spazio vettoriale di dimensione finita $n + 1$, con n intero positivo non nullo.

Definizione. Lo **spazio proiettivo** $\mathbb{P}(V)$ associato a V è costituito dai sottospazi di V di dimensione 1. In simboli

$$\mathbb{P}(V) = \left\{ \langle \vec{v} \rangle \mid \vec{v} \in V, \vec{v} \neq \vec{0} \right\}.$$

Per definizione la dimensione di $\mathbb{P}(V)$ è n .

Leggendo V come spazio affine su se stesso, $\mathbb{P}(V)$ può essere identificato con l'insieme delle rette per l'origine $\vec{0} = 0_V$ di V . Gli elementi di $\mathbb{P}(V)$ sono ancora chiamati punti.

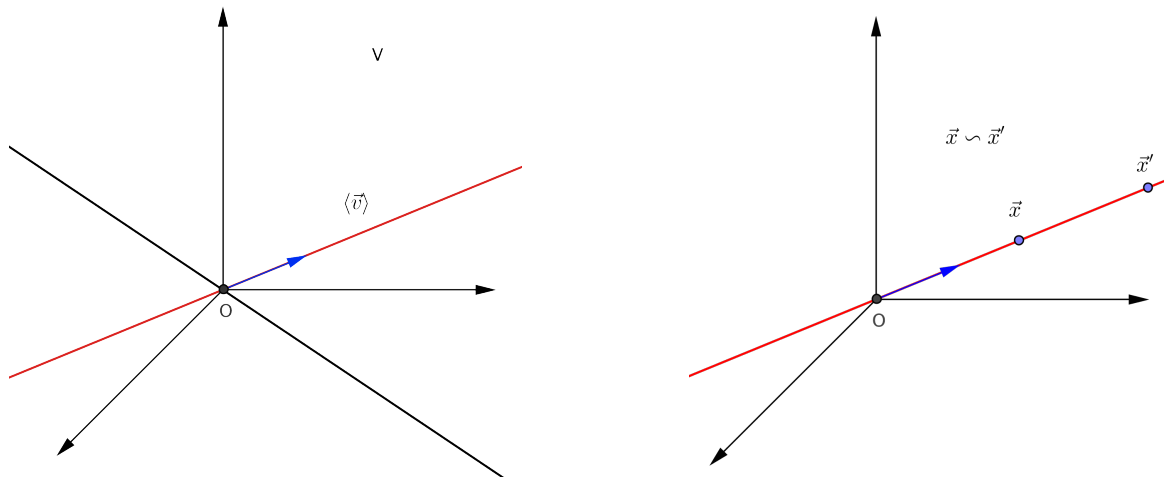


FIGURA 1.

Date: 22 dicembre 2014.

Queste note sono una versione molto preliminare delle lezioni effettuate a lezione per il modulo di *Elementi di Geometria* per la Laurea in Matematica Applicata dell'università degli Studi di Verona. Ringrazio chiunque voglia aiutarmi a scovare errori, sviste e lacune in queste note, in modo da renderle migliori per lo studio di tutti gli studenti. Se avete indicazioni scrivete all'indirizzo di posta elettronica sanosn@math.unipd.it.

¹Corso di Studi in Matematica Applicata, Università degli Studi di Verona, A.A. 2014/2015.

Ponendoci in \mathbb{K}^{n+1} e posto $\vec{v} = \begin{bmatrix} \ell_0 \\ \vdots \\ \ell_n \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ si ha $\langle \vec{v} \rangle = \left\{ t \begin{bmatrix} \ell_0 \\ \vdots \\ \ell_n \end{bmatrix}, t \in \mathbb{K} \right\}$ e le equazioni parametriche della retta corrispondente sono $\begin{cases} x_0 = t \ell_0 \\ \vdots \\ x_n = t \ell_n \end{cases}$ $t \in \mathbb{K}$ o in notazione vettoriale $\vec{x} = t \vec{v}$, in cui $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$.

Si noti che il *riscaldamento* $\ell_j \rightarrow \rho \ell_j$, con $\rho \neq 0$, lascia $\langle \vec{v} \rangle$ *invariato*: si passa semplicemente ad un nuovo generatore del sottospazio $\langle \vec{v} \rangle$, che infatti è individuato da \vec{v} a meno di un fattore di proporzionalità non nullo. Definiamo dunque la seguente relazione di equivalenza in $\mathbb{K}^{n+1} \setminus \{\vec{0}\}$

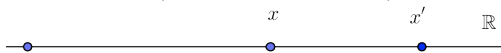
Siano $\vec{v} = [x_0 \dots x_n]^T$ e $\vec{v}' = [x'_0 \dots x'_n]^T \in \mathbb{K}^{n+1} \setminus \{\vec{0}\}$ allora $\vec{v} \sim \vec{v}' \iff x_j = \rho x'_j$, con $j = 0, 1, \dots, n$ e $\rho \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$. Quindi, in base alla costruzione effettuata, ponendo $\mathbb{P}^n := \mathbb{P}(\mathbb{K}^{n+1})$ si ha

$$\mathbb{P}^n = \frac{\mathbb{K}^{n+1} \setminus \{\vec{0}\}}{\sim}.$$

Lo spazio proiettivo su \mathbb{K}^{n+1} è cioè dato dalle classi di equivalenza determinate da \sim . Generalizzando l'idea precedente, ad uno spazio vettoriale V di dimensione finita $n+1$ possiamo associare spazio proiettivo $\mathbb{P}(V) = \frac{V \setminus \{\vec{0}\}}{\sim}$.

Dato $\vec{v} = [x_0 \dots x_n]^T \neq \vec{0}$ si pone $[[x_0 \dots x_n]^T] := [x_0, \dots, x_n] = (x_0 : x_1 : \dots : x_n)$. Le $x_0 \dots x_n$ sono dette *coordinate omogenee* o *Plückeriane* del punto P da esse rappresentato e risultano determinate a meno di un fattore di proporzionalità non nullo.

Esempio 1 (Punto proiettivo). Se $n = 0$, $\mathbb{P}^0 = \mathbb{P}(\mathbb{R})$ è un punto.



Esempio 2 (Retta proiettiva). Consideriamo il caso $n = 1$. Le rette per l'origine di \mathbb{R}^2

$$\begin{cases} x_0 = t \ell_0 \\ x_1 = t \ell_1 \end{cases} \quad [\ell_0 \ \ell_1]^T \neq [0 \ 0]^T, \text{ e } t \in \mathbb{R}.$$

sono in corrispondenza biunivoca con i punti di una retta verticale non passante per l'origine, ad esempio $x_0 = 1$, (si veda Figura 2). L'asse x_1 , ossia la retta $x_0 = 0$, ha coordinate omogenee $[0, \ell_1]$ con $\ell_1 \neq 0$ (o equivalentemente $[0, 1]$) e rappresenta il **punto all'infinito** di $x_0 = 1$.

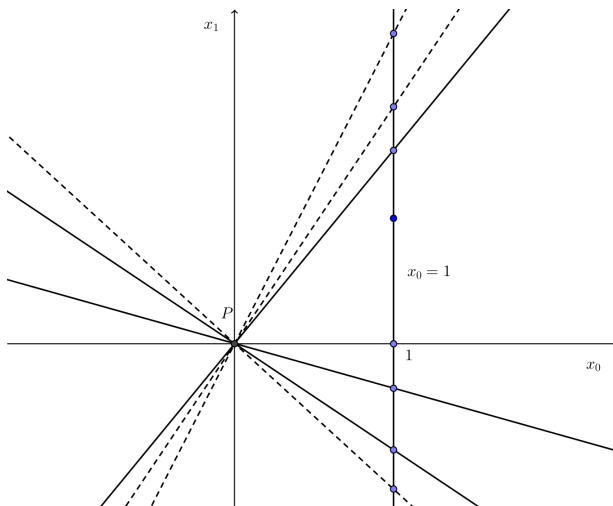


FIGURA 2. Costruzione della retta proiettiva.

La retta proiettiva può essere identificata con una retta affine ampliata con l'aggiunta di un punto all'infinito.

Da un punto di vista più algebrico procediamo come segue. Pensiamo a \mathbb{R} come spazio affine su se stesso ($\mathbb{R} = \mathbb{A}^1$) e assumendo $x_0 \neq 0$ poniamo $x = \frac{x_1}{x_0}$. Quindi l'origine della retta ha coordinate $[1, 0]$ e il generico punto della retta ha coordinate $[1, x]$, (si veda Figura 3). Il punto all'infinito, invece, è individuato da $[0, 1]$. I punti al finito di \mathbb{P}^1 , detti **punti propri** sono i punti di \mathbb{A}^1 a cui si aggiunge il punto all'infinito, detto **punto improprio** di \mathbb{P}^1 :

$$\mathbb{P}^1 = \mathbb{A}^1 \cup \mathbb{P}^0.$$

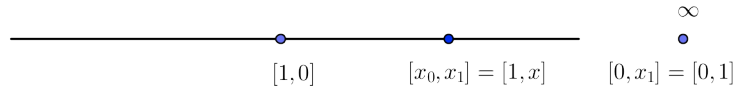


FIGURA 3.

Il centro P della proiezione, a cui non corrisponde alcun punto della retta affine \mathbb{A}^1 è il punto all'infinito. La retta proiettiva, mediante la proiezione stereografica, può quindi essere vista come una circonferenza.

Esempio 3 (Piano proiettivo). Analogamente a quanto fatto per la retta proiettiva, il piano proiettivo è può essere pensato come un piano affine ampliato con l'aggiunta di una retta *proiettiva* all'infinito (si veda Figura 4).

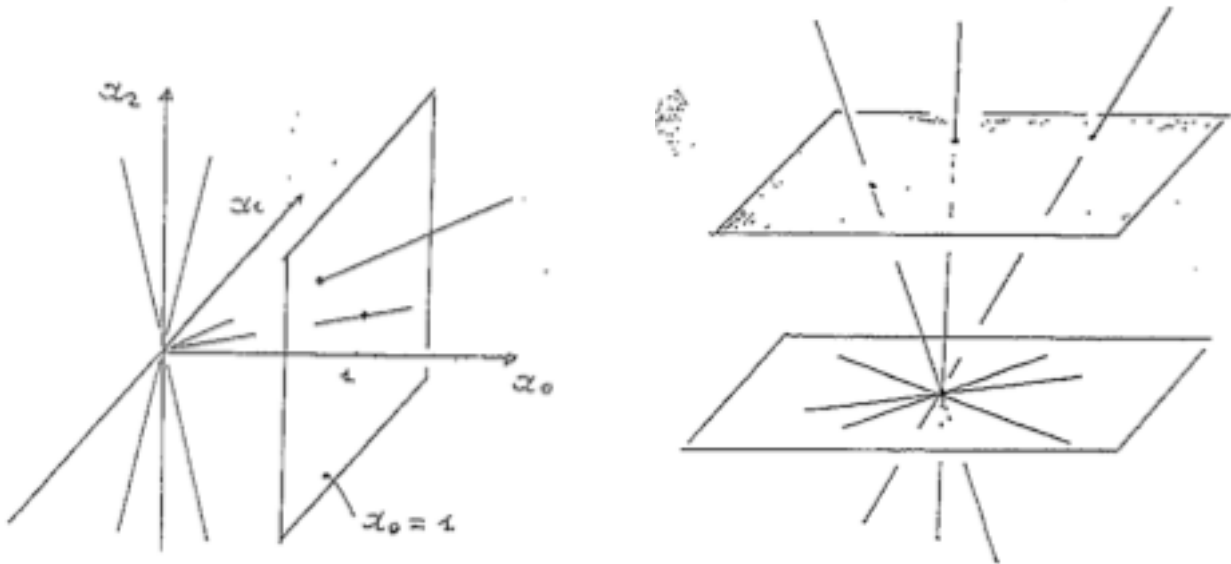


FIGURA 4. Costruzione del piano proiettivo.

Pensiamo ad \mathbb{R}^3 come spazio affine su se stesso e consideriamo le rette per l'origine non appartenenti al piano $x_0 = 0$.

$$\begin{cases} x_0 = t \ell_0 \\ x_1 = t \ell_1 \\ x_2 = t \ell_2 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \text{ e } \ell_0 \neq 0.$$

Esse incontrano il piano $x_0 = 1$ in un unico punto mentre le rette

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ x_1 = t \ell_1 \\ x_2 = t \ell_2 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \text{ e } (\ell_1, \ell_2) \neq (0, 0)$$

parallele al piano $x_0 = 1$ danno luogo ad una retta proiettiva, la retta all'infinito del piano $x_0 = 1$; precisamente ogni retta per l'origine appartenente al piano $x_0 = 0$ diviene un punto di una retta proiettiva, detta **retta all'infinito**.

Il piano proiettivo può essere identificato con un piano affine ampliato con l'aggiunta di una retta proiettiva all'infinito ($x_0 = 0$).

I punti ordinari del piano proiettivo hanno coordinate del tipo $[x_0, x_1, x_2] = [1, x, y]$ ($x_0 \neq 0$) e sono detti **punti propri**. I punti all'infinito o **punti impropri** hanno coordinate del tipo $[0, \ell_1, \ell_2]$, con $(\ell_1, \ell_2) \neq (0, 0)$. I punti impropri danno vita ad una retta proiettiva, retta all'infinito, che descrive le direzioni delle rette tracciate sul piano affine. (Le coordinate dei punti all'infinito sono date dalle direzioni delle rette parallele al piano $x_0 = 0$).

3. GEOMETRIA DELLO SPAZIO PROIETTIVO

Geometria del piano proiettivo. I punti del piano proiettivo hanno coordinate del tipo $[x_0, x_1, x_2] \equiv (x_0 : x_1 : x_2) \neq (0, 0, 0)$. Dividiamo questi punti in **propri** o **ordinari** di coordinate tali che $x_0 \neq 0$ e quindi in forma omogenea sono del tipo $[x_0, x_1, x_2]$ o in forma non-omogenea $[1, x, y]$ in cui $x = \frac{x_1}{x_0}$ e $y = \frac{x_2}{x_0}$ e **impropri** che hanno la prima coordinata nulla. **Diversamente dal caso della geometria affine però, nella geometria proiettiva tutti i punti vengono trattati alla stessa maniera, cioè dal punto di vista formale, non vi è alcuna distinzione tra punti propri e impropri. Tale distinzione è dovuta alla nostra necessità di differenziare tra punti al finito e punti all'infinito. Ribadiamo però che uno degli scopi della geometria proiettiva è quello di trattare tutti i punti in maniera omogenea e come vedremo, quindi, di non distinguere tra rette parallele e rette incidenti.**

Una retta nello spazio proiettivo è rappresentata da un'equazione lineare omogenea

$$r : a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 = 0$$

con $(a_0, a_1, a_2) \neq (0, 0, 0)$ dette coordinate Plückeriane della retta r . La retta $x_0 = 0$ è detta retta all'infinito e si indica usualmente con r_∞ . Faremo ora vedere che in \mathbb{P}^2 non ci sono rette parallele. **Per far ciò useremo l'algebra lineare a noi nota, dovremmo opportunamente tradurre in condizioni di sistemi lineari le condizioni proiettive note e da essere dedurre quanto voluto.**

Teorema 1. *Nel piano proiettivo \mathbb{P}^2 non esistono rette parallele, ossia due rette qualsiasi sono incidenti (o, in particolare, coincidenti).*

Dimostrazione. Consideriamo due rette $r \neq r'$ (non coincidenti)

$$\begin{cases} a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 = 0, & (a_0, a_1, a_2) = (0, 0, 0) \\ a'_0x_0 + a'_1x_1 + a'_2x_2 = 0, & (a'_0, a'_1, a'_2) = (0, 0, 0) \end{cases}$$

La matrice associata a tale sistema

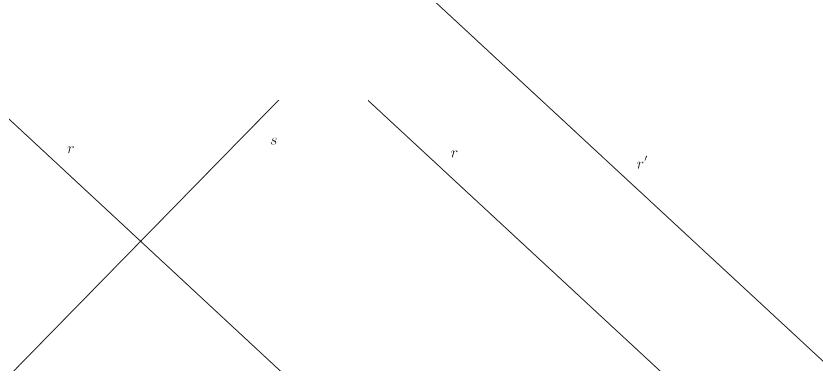
$$\begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ a'_0 & a'_1 & a'_2 \end{bmatrix}$$

ha rango 2 (le due rette non sono coincidenti e quindi le rispettive equazioni non sono proporzionali). Il sistema ammette quindi infinite soluzioni dipendenti da un parametro, cioè ogni soluzione non nulla individua il medesimo punto in \mathbb{P}^2 . Dunque due rette in \mathbb{P}^2 , se non coincidenti, si intersecano sempre. \square

Dopo aver visto che due rette si intersecano sempre in \mathbb{P}^2 è interessante capire dove si intersecano queste rette.

Proposizione 2. *Due rette in \mathbb{P}^2 si intersecano o in un punto proprio o in un punto improprio.*

Dimostrazione. Nel piano affine \mathbb{A}^2 consideriamo due rette parallele (non coincidenti) r ed r' (si veda Figura 6), di equazioni $r : ax + by + c = 0$ e $r' : a'x + b'y + c' = 0$ (con $(a, b) \neq (0, 0)$ e $(a', b') \neq (0, 0)$). Essendo r ed r' parallele esiste $\rho \in \mathbb{R}^*$ tale che $a = \rho a'$, $b = \rho b'$ e invece $c \neq \rho c'$. Per semplicità e senza perdere di generalità



assumiamo $\rho = 1$. Leggiamo ora r e r' come rette in \mathbb{P}^2 aggiungendo loro un punto improprio (la loro direzione, come vedremo) operando una **omogeneizzazione**

$$x = \frac{x_1}{x_0}, \quad y = \frac{x_2}{x_0} \quad x_0 \neq 0$$

perveniamo così a

$$r : ax_1 + bx_2 + cx_0 = 0$$

$$r' : ax_1 + bx_2 + c'x_0 = 0$$

Lasciamo ora cadere la restrizione $x_0 \neq 0$ e risolviamo il sistema formato da r e r' , arrivando a

$$(c - c')x_0 = 0$$

da cui $x_0 = 0$ e successivamente $ax_1 + bx_2 = 0$. Da cui emerge che le soluzioni sono punti impropri, precisamente i punti tali che

$$x_1 = t\ell$$

$$x_2 = tm$$

con $(\ell, m) \neq (0, 0)$ parametri direttori delle rette r ed r' . Quindi $r \cap r' = r \cap r_\infty = r' \cap r_\infty = [0, \ell, m]$. \square

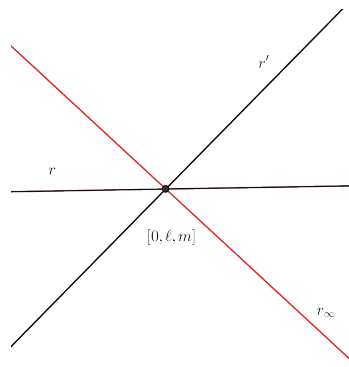


FIGURA 6. Due rette nel piano proiettivo incidenti all'infinito.

N.B. *In conclusione i parametri direttori delle rette divengono le coordinate proiettive del punto all'infinito e due rette parallele si incontrano in tale punto. Questo risultato conferisce significato all'affermazione che due rette parallele si incontrano all'infinito oppure che hanno in comune la direzione. In definitiva due rette determinano sempre un punto, la loro intersezione, proprio o improprio (in quest'ultimo caso tali rette, se viste sul piano affine, sono parallele).*

Osservazione. Tale risultato fa inoltre intuire l'origine e il legame tra geometria proiettiva e prospettiva. Rinviamo però ad altre letture o ad altra sede un approfondimento su tali tematiche.

Da quanto appena detto si ricava immediatamente il seguente

Corollario 3. *Due punti distinti individuano una e una sola retta.*

Dimostrazione. Semplice, si lascia per esercizio. □

Si noti che se i punti P_1 e P_2 sono propri la retta si trova nel solito modo.

- Formula della retta per due punti nel piano e poi omogeneizzare.
- Fascio proprio di rette per uno dei due punti, poi imporre il passaggio per il secondo punto e infine omogeneizzare l'equazione ottenuta.
- Come il punto precedente ma usando le equazioni parametriche.

Se entrambi i punti P_1 e P_2 sono impropri, essi determinano la retta impropria r_∞ di equazione $x_0 = 0$. Se invece uno dei punti è proprio e l'altro improprio (P_1 proprio e P_2 improprio, per fissare le idee) la retta per P_1 e P_2 è la retta che passa per P_1 e di direzione P_2 con l'aggiunta di P_2 stesso (si veda Figura 7). (In questo caso, quindi, conviene usare le equazioni parametriche della retta.)

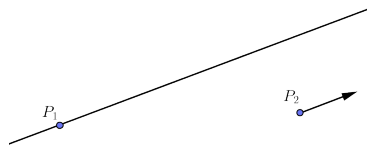


FIGURA 7. Retta per due punti, di cui uno improprio.

Dualità proiettiva. In questo caso si usa dire che *due punti distinti e una retta oppure due rette distinte e un punto si appartengono.*

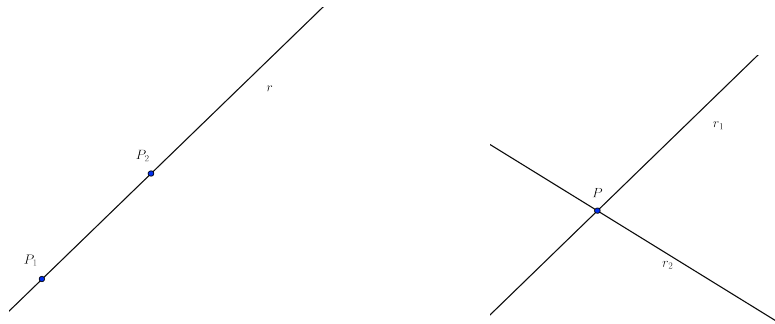


FIGURA 8. Dualità proiettiva.

Nel piano proiettivo quindi, cade la distinzione tra fasci di rette propri e impropri: si ha un solo tipo di fascio. Se il centro P del fascio è proprio ad ogni retta è aggiunto un punto all'infinito (la sua direzione), se invece il centro P_∞ del fascio è improprio il fascio consta della retta all'infinito r_∞ e di tutte le rette aventi per direzione la retta individuata da P_∞ .

Osservazione. L'equazione omogenea $r : a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 = 0$ con $(a_0, a_1, a_2) \neq (0, 0, 0)$, che in \mathbb{P}^2 rappresenta una retta, letta in \mathbb{R}^3 rappresenta ovviamente un piano passante per l'origine. L'intersezione con il piano $x_0 = 1$ produce i punti propri della retta proiettiva in questione. Ponendo $x_0 = 1$, $x_1 = x$ e $x_2 = y$ l'equazione affine di r è $a_0 + a_1x + a_2y = 0$. Nella descrizione affine è perduto il punto improprio $[0, -a_2, a_1]$: tale punto corrisponde alla retta r' parallela ad r e passante per l'origine.

Geometria dello spazio proiettivo \mathbb{P}^3 . L'equazione $a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$, con $(a_1, a_2, a_3, a_4) \neq (0, 0, 0, 0)$ rappresenta un piano proiettivo in \mathbb{P}^3 . L'equazione $x_0 = 0$ rappresenta il piano improprio π_∞ . Due piani distinti individuano sempre una retta (proiettiva), che può essere propria o impropria. In quest'ultimo caso tale retta è una retta di π_∞ e quindi individua una giacitura.

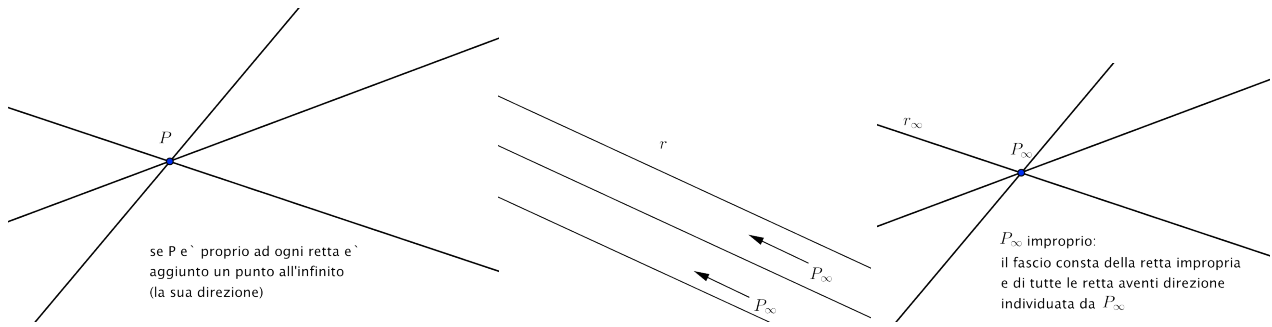


FIGURA 9. Fasci di rette nel piano proiettivo.

4. RICAPITOLANDO

Possiamo quindi costruire ricorsivamente gli spazi proiettivi $\mathbb{P}^n = \mathbb{A}^n \cup \mathbb{P}^{n-1}$, per $n \geq 1$, infatti

- per $n = 1$, si ha $\mathbb{P}^1 = \mathbb{A} \cup \mathbb{P}^0$
- per $n = 2$, si ha $\mathbb{P}^2 = \mathbb{A} \cup \mathbb{P}^1$
- per $n = 3$, si ha $\mathbb{P}^3 = \mathbb{A} \cup \mathbb{P}^2$

Si noti che l'oggetto aggiunto nel riferimento dato ha di volta in volta equazione $x_0 = 0$: per \mathbb{P}^1 si aggiunge il punto all'infinito $[0, 1]$; per \mathbb{P}^2 si aggiunge la retta all'infinito $r_\infty : x_0 = 0$ e per \mathbb{P}^3 si aggiunge il piano all'infinito $\pi_\infty : x_0 = 0$.

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

- [Candilera] M. Candilera, *Dispensa di Geometria*. Reperibile alla pagina web http://www.math.unipd.it/candilera/mat_tre.html
- [Cornalba] M. Cornalba *Piccola introduzione alla geometria proiettiva*. Reperibile alla pagina web <http://mate.unipv.it/cornalba/dispense/proj.pdf>
- [Sernesi] E. Sernesi, *Geometria 1*. Bollati Boringhieri.
- [Spera-1] M. Spera, *Note di Elementi di Geometria*. Non pubblicate.
- [Spera-2] M. Spera, *Note del Corso di Geometria*. Libreria Progetto.
- [Spera-3] M. Spera, *Note di Geometria Computazionale*. Non pubblicate.
- [Spera-4] M. Spera, *Comunicazioni private*.