Matematica e Statistica (A-E, F-O, P-Z)

Prova d'esame (24/06/2011)

Università di Verona - Laurea in Biotecnologie - A.A. 2010/11

Tema A

Matematica e Statistica (A-E, F-O, P-Z)

Prova di $\boxed{\text{MATEMATICA (A-E, F-O, P-Z)}}$ (24/06/2011)

Università di Verona - Laurea in Biotecnologie - A.A. 2010/11

Cognome-Nome ______________________ Matr. __________ Corso __________
IN STAMPATELLO VR ······ A-E / F-O / P-Z

Tema A

**** Svolgere prima i punti* (a) *di* *tutti* *gli esercizi; solo in seguito i punti* (b). ***** ▶▶▶▶ **Test a quiz sul retro** ▶▶▶▶

(1) (a) Nello spazio cartesiano determinare, in forma parametrica e cartesiana, il piano Π passante per i punti $A(0,1,-1)$ e $B(2,-1,0)$ e parallelo al vettore $\vec{v}=(1,-2,3)$; e la retta r passante per i punti A e $C(-1,0,4)$.

(b) Tra i punti di Π che stanno sul piano orizzontale $z=0$, qual'è quello più vicino a C?

(2) (a) Studiare l'andamento di $f(x) = 2\operatorname{arctg} x + \dfrac{1}{2x^2}$, e tracciarne il grafico.[1]

(b) Calcolare il limite $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)\,\sin^{\alpha}(x)$ al variare di $\alpha\in\mathbb{R}$.

(3) (a) Calcolare $\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}} x\ f(x)\ dx$, dove $f(x)$ è la funzione dell'ex. 2.

(b) Disegnare $S=\{(x,y) : |x-3|-2\le y\le \log x\,,\ |x|\le 5\,\}$, e calcolarne l'area.

(4) Data $g(x,y)=\dfrac{x-2}{x-y^2-y}$, determinarne dominio, zeri, segno e limiti interessanti, disegnando i risultati. Trovarne i punti stazionari ed eventuali estremi locali. Determinare il piano tangente al grafico di g sopra il punto $(x_0,y_0)=(-1,0)$. Come sono fatte le curve di livello di g?

(5) (a) Trovare tutte le soluzioni $y(x)$ dell'equazione differenziale $4y''+4y'+y=3-5\sin x$, e tutte le soluzioni dell'equazione differenziale $(x+1)y'=2x-y$.

(b) Quali delle precedenti soluzioni hanno un punto di massimo locale in $x=0$?

[1] Per lo studio di zeri e segno sarà utile un confronto grafico. Non è richiesto lo studio della convessità.

Matematica e Statistica (A-E)

Prova di STATISTICA (A-E) - Gobbi (24/06/2011)

Università di Verona - Laurea in Biotecnologie - A.A. 2010/11

Cognome-Nome ______________________ Matr. ______________

IN STAMPATELLO VR ······

Tema A

**** Per ogni calcolo effettuato scrivere anche la formula teorica da utilizzare **** ▶▶▶▶ **Test a quiz sul retro** ▶▶▶▶

ESERCIZIO 1

La tabella seguente riporta la quantità in mg per litro di ione potassio presente in un campione di 200 bottiglie d'acqua.

X	Frequenza
2	25
5	60
9	75
10	40

Sulla distribuzione di frequenze presentata in tabella, calcolare:

a) le medie potenziate di ordine r = -1 e r = 0;
b) enunciare e dimostrare 2 proprietà della media aritmetica, usando eventualmente i valori della distribuzione;
c) il primo, il secondo e il terzo quartile, indicando a cosa corrisponde il secondo quartile.

ESERCIZIO 2

Sulla distribuzione di frequenze della tabella precedente, calcolare:

a) la varianza usando l'origine A=2;
b) lo scarto quadratico medio;
c) il coefficiente di variazione.

ESERCIZIO 3

Sui dati presentati in tabella effettuare un test di omogeneità fra la distribuzione di frequenze osservate f e la distribuzione teorica F ad un livello di significatività dell'1%.

X	f	F
3	40	44
6	20	25
7	12	16
11	28	15

Allegato: valori della variabile "Chi Quadrato" che sottendono una coda destra di ammontare alpha

G.d.l.	alpha %							
	99,5	99	97,5	95	5	2,5	1	0,5
1	0,00	0,00	0,00	0,00	3,84	5,02	6,64	7,88
2	0,01	0,02	0,05	0,10	5,99	7,38	9,21	10,60
3	0,07	0,12	0,22	0,35	7,82	9,35	11,35	12,84
4	0,21	0,30	0,48	0,71	9,49	11,14	13,28	14,86
5	0,41	0,55	0,83	1,15	11,07	12,83	15,09	16,75

Matematica e Statistica (F-O, P-Z)

Prova di **STATISTICA (F-O, P-Z) - Di Palma** (24/06/2011)

Università di Verona - Laurea in Biotecnologie - A.A. 2010/11

Cognome-Nome ______________________________ Matr. ______________

IN STAMPATELLO VR · · · · · ·

Tema A

**** Attenzione: compiti illeggibili non verranno corretti ! ****

▶▶▶▶ Test a quiz sul retro ▶▶▶▶

Esercizio 1)

Si vuole stabilire il livello medio di glucosio che un adulto sano presenta nel sangue durante le ore di sonno. Pertanto si è condotta una sperimentazione in cui sono stati coinvolti 10 soggetti. Per ogni soggetto si sono effettuati 3 prelievi (uno ogni due ore) ottenendo le seguenti misurazioni di concetrazione di glucosio espresse in *mg/dl* ed ordinate in maniera crescente.

140	140	140	143	145	145	147	148	148	148
148	148	149	149	149	150	151	151	151	151
152	152	152	152	152	155	156	158	160	170

Il candidato

a) Determini la tipologia del carattere.
b) Se possibile, tracci il box plot.
c) Se possibile, calcoli la varianza.
d) Se possibile, calcoli un indice di asimmetria adeguato.

Esercizio 2)

I dati raccolti nel precedente esercizio sono stati organizzati tenendo conto del diverso genere del soggetto coinvolto nella sperimentazione, ottenendo la seguente tabella.

		Y: concentrazione di glucosio mg/dl						
		fino a 142	da 143 a 149 (149 escluso)	da 149 a 152 (152 esluso)	da 152 a 155 (155 escluso)	da 155 a 160 (160 escluso)	160 ed oltre	
X: Genere	M	3	6	4				
	F				1	2	2	12
		3	9		5	3	2	

Il candidato

a) completi la tabella con i dati mancanti.
b) indichi e calcoli, se possibile, un opportuno indice di posizione per la serie bivariata
c) indichi e calcoli, se possibile, un opportuno indice di variabilità per la serie bivariata
d) se possibile, verifichi, ad un opportuno livello di significatività, se i due caratteri si possono dire indipendenti. Nel caso non fosse possibile indichi una possibile strategia per effettuare il calcolo.

Esercizio 3)

Il candidato stimi puntualmente e per intervallo il valore atteso della concentrazione di glucosio in un adulto basandosi sulle misurazioni di concentrazione riportate nell'Esercizio 1.

Esercizio 4)

Si considerino i due eventi relativi ai dati dell'Esercizio 2

E_1 : estraendo a caso un componente della sperimentazione, questa è una donna.

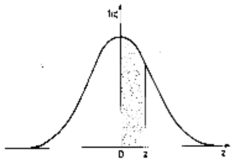
E_2 : estraendo a caso una misura di concetrazione di glucosio fra le 30 effettuate durante la sperimentazione, questa è compresa fra 152 e 155 (155 escluso).

Il candiato calcoli le probabilità dei seguenti eventi

a) E_1 ed E_2
b) evento E_1 intersezione E_2
c) evento E_2 condizionato E_1
d) evento E_2 unito E_1.

Tavola I

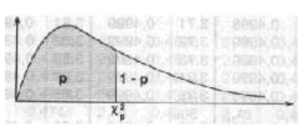
Integrali della variabile casuale normale standardizzata z



z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2517	0.2549
0.7	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4761	0.4767
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
2.1	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4854	0.4857
2.2	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884	0.4887	0.4890
2.3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
2.4	0.4918	0.4920	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936
2.5	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952
2.6	0.4953	0.4955	0.4956	0.4957	0.4959	0.4960	0.4961	0.4962	0.4963	0.4964
2.7	0.4965	0.4966	0.4967	0.4968	0.4969	0.4970	0.4971	0.4972	0.4973	0.4974
2.8	0.4974	0.4975	0.4976	0.4977	0.4977	0.4978	0.4979	0.4979	0.4980	0.4981
2.9	0.4981	0.4982	0.4982	0.4983	0.4984	0.4984	0.4985	0.4985	0.4986	0.4986
3.0	0.4987	0.4987	0.4987	0.4988	0.4988	0.4989	0.4989	0.4989	0.4990	0.4990

Tavola II

Integrali della variabile casuale chi quadrato a v gradi di libertà.



ν \ p	0,005	0,01	0,025	0,05	0,10	0,25	0,50	0,75	0,90	0,95	0,975	0,99	0,995	0,999
1	0,0000	0,0002	0,0010	0,0039	0,0158	0,102	0,455	1,32	2,71	3,84	5,02	6,63	7,88	10,8
2	0,0100	0,0201	0,0506	0,103	0,211	0,575	1,39	2,77	4,61	5,99	7,38	9,21	10,6	13,8
3	0,0717	0,115	0,216	0,352	0,584	1,21	2,37	4,11	6,25	7,81	9,35	11,3	12,8	16,3
4	0,207	0,297	0,484	0,711	1,06	1,92	3,36	5,39	7,78	9,49	11,1	13,3	14,9	18,5
5	0,412	0,554	0,831	1,15	1,61	2,67	4,35	6,63	9,24	11,1	12,8	15,1	16,7	20,5
6	0,676	0,872	1,24	1,64	2,20	3,45	5,35	7,84	10,6	12,6	14,4	16,8	18,5	22,5
7	0,989	1,24	1,69	2,17	2,83	4,25	6,35	9,04	12,0	14,1	16,0	18,5	20,3	24,3
8	1,34	1,65	2,18	2,73	3,49	5,07	7,34	10,2	13,4	15,5	17,5	20,1	22,0	26,1
9	1,73	2,09	2,70	3,33	4,17	5,90	8,34	11,4	14,7	16,9	19,0	21,7	23,6	27,9
10	2,16	2,56	3,25	3,94	4,87	6,74	9,34	12,5	16,0	18,3	20,5	23,2	25,2	29,6
11	2,60	3,05	3,82	4,57	5,58	7,58	10,3	13,7	17,3	19,7	21,9	24,7	26,8	31,3
12	3,07	3,57	4,40	5,23	6,30	8,44	11,3	14,8	18,5	21,0	23,3	26,2	28,3	32,9
13	3,57	4,11	5,01	5,89	7,04	9,30	12,3	16,0	19,8	22,4	24,7	27,7	29,8	34,5
14	4,07	4,66	5,63	6,57	7,79	10,2	13,3	17,1	21,1	23,7	26,1	29,1	31,3	36,1
15	4,60	5,23	6,26	7,26	8,55	11,0	14,3	18,2	22,3	25,0	27,5	30,6	32,8	37,7
16	5,14	5,81	6,91	7,96	9,31	11,9	15,3	19,4	23,5	26,3	28,8	32,0	34,3	39,3
17	5,70	6,41	7,56	8,67	10,1	12,8	16,3	20,5	24,8	27,6	30,2	33,4	35,7	40,8
18	6,26	7,01	8,23	9,39	10,9	13,7	17,3	21,6	26,0	28,9	31,5	34,8	37,2	42,3
19	6,84	7,63	8,91	10,1	11,7	14,6	18,3	22,7	27,2	30,1	32,9	36,2	38,6	43,8
20	7,43	8,26	9,59	10,9	12,4	15,5	19,3	23,8	28,4	31,4	34,2	37,6	40,0	45,3
21	8,03	8,90	10,3	11,6	13,2	16,3	20,3	24,9	29,6	32,7	35,5	38,9	41,4	46,8
22	8,64	9,54	11,0	12,3	14,0	17,2	21,3	26,0	30,8	33,9	36,8	40,3	42,8	48,3
23	9,26	10,2	11,7	13,1	14,8	18,1	22,3	27,1	32,0	35,2	38,1	41,6	44,2	49,7
24	9,89	10,9	12,4	13,8	15,7	19,0	23,3	28,2	33,2	36,4	39,4	43,0	45,6	51,2
25	10,5	11,5	13,1	14,6	16,5	19,9	24,3	29,3	34,4	37,7	40,6	44,3	46,9	52,6
26	11,2	12,2	13,8	15,4	17,3	20,8	25,3	30,4	35,6	38,9	41,9	45,6	48,3	54,1
27	11,8	12,9	14,6	16,2	18,1	21,7	26,3	31,5	36,7	40,1	43,2	47,0	49,6	55,5
28	12,5	13,6	15,3	16,9	18,9	22,7	27,3	32,6	37,9	41,3	44,5	48,3	51,0	56,9
29	13,1	14,3	16,0	17,7	19,8	23,6	28,3	33,7	39,1	42,6	45,7	49,6	52,3	58,3
30	13,8	15,0	16,8	18,5	20,6	24,5	29,3	34,8	40,3	43,8	47,0	50,9	53,7	59,7

$\boxed{\text{Tema A}}$ - Soluzioni

$\boxed{\text{MATEMATICA (A-E, F-O, P-Z)}}$

(1) (a) Il piano Π passante per i punti $A(0,1,-1)$ e $B(2,-1,0)$ e parallelo al vettore $\vec{v}=(1,-2,3)$ sarà parallelo anche al vettore $(2,-1,0)-(0,1,-1)=(2,-2,1)$, dunque una sua forma parametrica è $\Pi=\{(0,1,-1)+s(1,-2,3)+t(2,-2,1):s,t\in\mathbb{R}\}=\{(s+2t,1-2s-2t,-1+3s+t):s,t\in\mathbb{R}\}$; da $(x,y)=(s+2t,1-2s-2t)$ si ricava $s=1-x-y$ e $t=\frac{1}{2}(-1+2x+y)$, che messi in $z=-1+3s+t$ danno la forma cartesiana $4x+5y+2z-3=0$. • La retta r passante per i punti A e $C(-1,0,4)$ sarà parallela al vettore $(0,1,-1)-(-1,0,4)=(1,1,-5)$, dunque una forma parametrica è $r=\{(0,1,-1)+t(1,1,-5):t\in\mathbb{R}\}=\{(t,1+t,-1-5t):t\in\mathbb{R}\}$; sostituendo $t=x$ in $(y,z)=(1+t,-1-5t)$ si ottiene una forma cartesiana data dal sistema tra $x-y+1=0$ e $5x+z+1=0$.

(b) I punti di Π sono del tipo $(s+2t,1-2s-2t,-1+3s+t)$ al variare di $s,t\in\mathbb{R}$; quelli che stanno sul piano orizzontale $z=0$ soddisfano a $-1+3s+t=0$, ovvero $t=1-3s$, dunque sono quelli del tipo $P(s)=(2-5s,4s-1,0)$ al variare di $s\in\mathbb{R}$. La distanza di $P(s)$ da $C(-1,0,4)$ è $d(s)=\sqrt{(2-5s-(-1))^2+(4s-1-(0))^2+(0-4)^2}=\sqrt{41s^2-38s+26}$; la derivata $d'(s)=\frac{41s-19}{\sqrt{41s^2-38s+26}}$ è ≥ 0 per $s\geq\frac{19}{41}$, dunque il punto di minima distanza cercato si ottiene quando $s=\frac{19}{41}$, ovvero $P(\frac{19}{41})=(-\frac{13}{41},\frac{35}{41},0)$.

(2) (a) (Figura 1) La funzione $f(x)=2\,\mathrm{arctg}\,x+\frac{1}{2x^2}$ è definita per $x\neq 0$, ed è derivabile infinite volte nel suo dominio; non ha parità ne' periodicità. Si ha $f(x)=0$ se e solo se $\mathrm{arctg}\,x=-\frac{1}{4x^2}$; un confronto grafico tra l'arcotangente $\mathrm{arctg}\,x$ e la potenza $-\frac{1}{4x^2}=-\frac{1}{4}x^{-2}$ mostra chiaramente che esiste un unico punto $\alpha\in\,]-1,0[$ tale che ciò vale se e solo se $x=\alpha$. Similmente si ha $f(x)>0$ se e solo se $\mathrm{arctg}\,x>-\frac{1}{4x^2}$, e il confronto grafico mostra che ciò vale se e solo se $\alpha<x<0$ oppure $x>0$. I limiti interessanti sono tutti determinati, e valgono $\lim_{x\to\mp\infty}f(x)=\mp\pi$ e $\lim_{x\to 0}f(x)=+\infty$; pertanto $x=0$ è asintoto verticale bilatero, e $y=\mp\pi$ è asintoto orizzontale a $\mp\infty$. Derivando si ottiene $f'(x)=\frac{2}{x^2+1}-\frac{1}{x^3}=\frac{2x^3-x^2-1}{x^3(x^2+1)}$: una evidente radice di $2x^3-x^2-1$ è $x=1$, e dividendo con Ruffini si ottiene $2x^3-x^2-1=(x-1)(2x^2+x+1)$. Ne ricaviamo che vale $f'(x)=0$ se e solo se $x=1$, e $f'(x)>0$ se e solo se $x<0$ oppure $x>1$: pertanto $x=1$ è un punto di minimo, con $f(1)=2\,\mathrm{arctg}\,1+\frac{1}{2}=\frac{\pi+1}{2}\sim 2{,}0$.

(b) Il limite $\lim_{x\to 0^+}f(x)\,\sin^\alpha(x)$, quando $\alpha\leq 0$ è determinato e vale $+\infty$; invece per $\alpha>0$ è in forma $\infty\cdot 0$. Occupiamoci dunque di questo caso. Si ha $f(x)\,\sin^\alpha(x)=2\,\mathrm{arctg}\,x\,\sin^\alpha(x)+\frac{1}{2}\frac{\sin^\alpha(x)}{x^2}$: il primo addendo tende a zero, mentre il limite del secondo (in forma $\frac{0}{0}$) si può scrivere come $\frac{1}{2}(\frac{\sin x}{x})^2\sin^{\alpha-2}(x)$, e ricordando il limite notevole $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ si conclude che se $\alpha-2<0$ tende a $+\infty$, se $\alpha-2=0$ tende a $\frac{1}{2}$ mentre se $\alpha-2>0$ tende a 0^+. Ricapitolando, il limite cercato vale $+\infty$ se $\alpha<2$; vale $\frac{1}{2}$ se $\alpha=2$; e vale 0^+ se se $\alpha>2$.

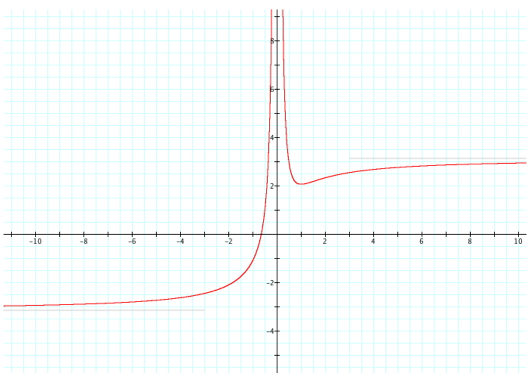
(3) (a) Integrando per parti si ha $\int x\,f(x)\,dx=\int 2x\,\mathrm{arctg}\,x\,dx+\frac{1}{2}\int\frac{1}{x}\,dx=x^2\,\mathrm{arctg}\,x-\int x^2\frac{1}{x^2+1}\,dx+\frac{1}{2}\log|x|+k=x^2\,\mathrm{arctg}\,x-\int(1-\frac{1}{x^2+1})\,dx+\frac{1}{2}\log|x|+k=(x^2+1)\,\mathrm{arctg}\,x-x+\frac{1}{2}\log|x|+k$, dunque $\int_1^{\sqrt{3}}x\,f(x)\,dx=(4\,\mathrm{arctg}\,\sqrt{3}-\sqrt{3}+\frac{1}{2}\log\sqrt{3})-(2\,\mathrm{arctg}\,1-1+\frac{1}{2}\log 1)=\frac{5}{6}\pi+\frac{1}{4}\log 3-\sqrt{3}+1\sim 2{,}2$.

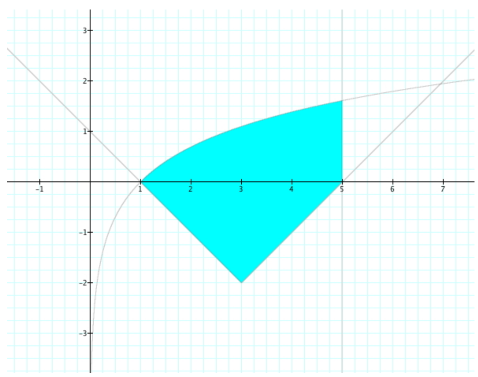
(b) (Figura 2) L'intersezione tra i grafici $y=\log x$ e $y=|x-3|-2$ che ci interessa (dunque quando quest'ultimo diventa la retta $y=1-x$) avviene per $x=1$, dunque la zona di piano $S=\{(x,y):|x-3|-2\leq y\leq\log x\,,\ |x|\leq 5\}$ ha area $\int_1^5\log x\,dx+\int_5^3(x-5)\,dx+\int_3^1(1-x)\,dx=(x(\log x-1)]_1^5+(\frac{1}{2}x^2-5x]_5^3+(x-\frac{1}{2}x^2]_3^1+=(5(\log 5-1))-(-1)+(-\frac{21}{2})-(-\frac{25}{2})+(\frac{1}{2})-(-\frac{3}{2})=5\log 5\sim 8{,}0$.

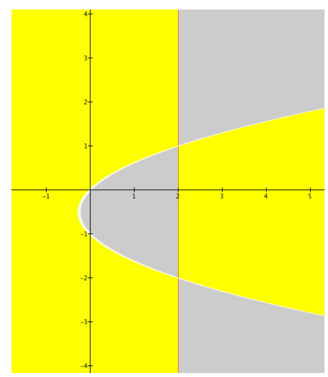
(4) (Figura 3) Il dominio di $g(x,y)=\frac{x-2}{x-y^2-y}$ è tutto il piano $\mathbb{R}^2$ meno i punti della parabola $x=y^2+y$. Si ha $g(x,y)=0$ sui punti della retta verticale $x=2$, tranne ovviamente i punti $P(2,1)$ e $Q(2,-2)$ (intersezioni tra retta e parabola) che sono esclusi dal dominio. Il numeratore $x-2$ è positivo a destra della retta $x=2$ e negativo a sinistra, il denominatore $x-y^2-y$ è positivo all'interno della parabola e negativo all'esterno, e il segno di g ne segue per quoziente. La funzione g è differenziabile (in particolare continua) in ogni punto del dominio, in quanto le derivate parziali $\frac{\partial g}{\partial x}=\frac{1(x-y^2-y)-1(x-2)}{(x-y^2-y)^2}=\frac{2-y^2-y}{(x-y^2-y)^2}$ e $\frac{\partial g}{\partial y}=-(x-2)\frac{-2y-1}{(x-y^2-y)^2}=\frac{(x-2)(2y+1)}{(x-y^2-y)^2}$ risultano continue. Per quanto riguarda i limiti interessanti, nei punti della parabola diversi da P e Q il limite vale $\mp\infty$, col segno che dipende dal fatto che si tenda al punto da fuori o da dentro la parabola (vedi Figura 3); invece in P, Q e ∞_2 il limite non esiste, perché tendendovi ad esempio lungo la retta $x=2$ si tende a 0 mentre avvicinandosi alla parabola la funzione diventa arbitrariamente grande. Dal sistema $\frac{\partial g}{\partial x}=\frac{\partial g}{\partial y}=0$ si ricavano i soli punti P e Q, che però non sono accettabili in quanto fuori dal dominio: non vi sono dunque punti stazionari, in particolare nessun estremante locale. Il piano tangente al grafico di g sopra $(-1,0)$ è $z=g(-1,0)+\frac{\partial g}{\partial x}(-1,0)\cdot(x-(-1))+\frac{\partial g}{\partial y}(-1,0)\cdot(y-(0))$, ovvero $2x - 3y - z + 5 = 0$. Infine, esaminiamo le curve di livello $g(x, y) = k$ al variare di $k \in \mathbb{R}$: si ricava $x - 2 = k(x - y^2 - y)$ ovvero $(k - 1)x = k(y^2 + y) - 2$. Se $k = 0$ si ricava (come già noto, dallo studio degli zeri) la retta $x = 2$; se $k = 1$ si ottiene $y^2 + y - 2 = 0$ ovvero l'unione delle due rette orizzontali $y = 1$ e $y = -2$; negli altri casi si ha invece $x = \frac{1}{k-1}(ky^2 + ky - 2)$, che è un fascio di parabole dipendenti da k, tutte passanti per P e Q (punti che però restano esclusi da tali curve di livello in quanto fuori dal dominio di g).

(5) (a) L'equazione differenziale $4y'' + 4y' + y = 3 - 5 \sin x$ è del secondo ordine, lineare a coefficienti costanti. L'equazione caratteristica $4t^2 + 4t + 1 = 0$ ha soluzione doppia $t = -\frac{1}{2}$, dunque lo spazio di soluzioni dell'equazione omogenea associata è $y(x) = Ae^{-\frac{x}{2}} + Bxe^{-\frac{x}{2}} = (A + Bx)e^{-\frac{x}{2}}$ al variare di $A, B \in \mathbb{R}$. Una soluzione particolare per la completa con 3 è la costante $\tilde{y}_1(x) \equiv 3$; una soluzione particolare per la completa con $-5 \sin x$ avrà la forma $\tilde{y}_2(x) = a \cos x + b \sin x$, e il calcolo dà $(a, b) = (\frac{4}{5}, \frac{3}{5})$; dunque lo spazio di soluzioni dell'equazione completa è $y(x) = (A + Bx)e^{-\frac{x}{2}} + 3 + \frac{1}{5}(4 \cos x + 3 \sin x)$ al variare di $A, B \in \mathbb{R}$. • L'equazione differenziale $(x + 1)y' = 2x - y$ è lineare del primo ordine. Limitandosi da subito al caso $x > -1$ e dividendo per $x + 1$ si ottiene la forma normale $y' + p(x)\, y = q(x)$ con $p(x) = \frac{1}{x+1}$ e $q(x) = \frac{2x}{x+1}$: essendo $P(x) = \int p(x)\, x = \log(x + 1)$ e $\int e^{P(x)} q(x)\, dx = x^2$ si ha che le soluzioni per $x > -1$ sono del tipo $y(x) = \frac{1}{x+1}(x^2 + k) = \frac{x^2+k}{x+1}$ al variare di $k \in \mathbb{R}$. Di queste, l'unica estendibile anche in $x = 0$ è quella con $k = -1$, ovvero $y(x) = x - 1$.

(b) Ricordiamo che, se una funzione $\varphi(x)$ è derivabile due volte con continuità in $x = 0$, condizione necessaria affinché φ abbia un punto di massimo locale in $x = 0$ è che $\varphi'(0) = 0$ e $\varphi''(0) \leq 0$; se inoltre $\varphi''(0) < 0$ allora la condizione è anche sufficiente, mentre il caso in cui $\varphi'(0) = \varphi''(0) = 0$ va verificato a parte (ad esempio, se in quest'ultimo caso si ha che $\varphi'''(0) \neq 0$ allora $x = 0$ non è un punto ne' di massimo ne' di minimo locale, ma solo di flesso orizzontale). • Le derivate della soluzione generale della prima equazione differenziale sono $y'(x) = (B - \frac{1}{2}A - \frac{1}{2}Bx)e^{-\frac{x}{2}} + \frac{1}{5}(3 \cos x - 4 \sin x)$ e $y''(x) = (-B + \frac{1}{4}A + \frac{1}{4}Bx)e^{-\frac{x}{2}} - \frac{1}{5}(4 \cos x + 3 \sin x)$, dunque la condizione necessaria $y'(0) = 0$ e $y''(0) \leq 0$ dà $(B - \frac{1}{2}A) + \frac{3}{5} = 0$ e $(-B + \frac{1}{4}A) - \frac{4}{5} \leq 0$, ovvero $B = \frac{1}{2}A - \frac{3}{5}$ e $A \leq -\frac{4}{5}$; se $y''(0) < 0$ (cioè se $A < -\frac{4}{5}$) la condizione è anche sufficiente, mentre nel caso $A = -\frac{4}{5}$ si dimostra direttamente che $y'''(0) \neq 0$, dunque $x = 0$ non è estremante locale (si tratta di un flesso orizzontale). • Le derivate della soluzione generale della prima equazione differenziale sono $y'(x) = \frac{x^2+2x-k}{(x+1)^2}$ e $y''(x) = \frac{2+2k}{(x+1)^3}$, dunque la condizione necessaria $y'(0) = 0$ e $y''(0) \leq 0$ dà $k = 0$ e $2 + 2k \leq 0$, assurdo. Dunque nessuna soluzione soddisfa alla richiesta.







1. Il grafico della funzione dell'ex. 2. **2.** L'insieme dell'ex. (3.b). **3.** Ex. 4: zeri (rosso), segno positivo (giallo) e negativo (grigio) della funzione g.

ESERCIZIO 1

La tabella seguente riporta la quantità in mg per litro di ione potassio presente in un campione di 200 bottiglie d'acqua.
Sulla distribuzione di frequenze presentata in tabella, calcolare:
a) le medie potenziate di ordine r = -1 e r = 0;
b) enunciare e dimostrare 2 proprietà della media aritmetica, usando eventualmente i valori della distribuzione;
c) il primo, il secondo e il terzo quartile, indicando a cosa corrisponde il secondo quartile.

X	**f**	**X*f**	**f/X**	**ln(X)**	**ln(X)*f**
2	25	50	12,5	1	17
5	60	300	12	1,6094	96,5663
9	75	675	8,3333	2,1972	164,792
10	40	400	4	2,3026	92,1034
	200	**1425**	**36,8333**	**6,8024**	**370,7902**

a) Calcolo delle medie potenziate di ordine r = -1 e r = 0:
La media potenziata di ordine r = -1 è la media armonica.
La media potenziata di ordine r = 0 corrisponde alla media geometrica.

$$\mathbf{Ma(X)} = \frac{\Sigma f}{\Sigma f/X} = \frac{200}{36{,}8333} = \mathbf{5{,}4299} \qquad r = -1$$

$$\ln(Mg(X)) = \frac{\Sigma \ln(X) * f}{\Sigma f} = \frac{370{,}7902}{200} = 1{,}854 \qquad \mathbf{Mg(X)} = e^{1{,}854} = \mathbf{6{,}385} \qquad r = 0$$

b) Dimostrazione di 2 proprietà della media aritmetica:

Proprietà della media aritmetica:
1) la somma degli scarti dalla media aritmetica è nulla;
2) la somma dei quadrati degli scarti dalla media aritmetica è minima.

Dimostrazione della prima proprietà.
La somma degli scarti dalla media aritmetica è nulla.

Calcolo della media aritmetica:

$$\mathbf{M(X)} = \frac{\Sigma X * f}{\Sigma f} = \frac{1425}{200} = \mathbf{7{,}125}$$

Calcolo degli scarti dalla media aritmetica:

X-m	f	(X-m)*f
-5,125	25	-128,125
-2,125	60	-127,5
1,875	75	140,625
2,875	40	115
	200	**0**

La somma dell'ultima colonna, riguardante gli scarti dalla media aritmetica, è zero.

Dimostrazione della seconda proprietà.
La somma dei quadrati degli scarti dalla media aritmetica è minima.

Calcolo dei quadrati degli scarti dai valori della X e dalla media:

X	f	X-2	X-5	X-9	X-10	X-m
2	25	0	-3	-7	-8	-5,125
5	60	3	0	-4	-5	-2,125
9	75	7	4	0	-1	1,875
10	40	8	5	1	0	2,875
	200					

X	f	$(X-2)^2$*f	$(X-5)^2$*f	$(X-9)^2$*f	$(X-10)^2$*f	$(X-m)^2$*f
2	25	-	225	1.225	1.600	657
5	60	540	-	960	1.500	271
9	75	3.675	1.200	-	75	264
10	40	2.560	1.000	40	-	331
	200	**6.775**	**2.425**	**2.225**	**3.175**	**1.522**

La somma dell'ultima colonna, che si riferisce ai quadrati degli scarti dalla media aritmetica, è la minore.

c) Calcolo del primo, del secondo e del terzo quartile:

Q1 = X 50° = **5**

Q2 = X 100° = **9 = corrisponde alla mediana**

Q3 = X 150° = **9**

ESERCIZIO 2

Sulla distribuzione di frequenze della tabella precedente, calcolare:
a) la varianza usando l'origine A=2;
b) lo scarto quadratico medio;
c) il coefficiente di variazione.

X	f	X-2	$(X-2)^2 * f$
2	25	0	0
5	60	3	540
9	75	7	3675
10	40	8	2560
	200		**6.775**

a) Calcolo della varianza usando l'origine A=2:

$$V(A) = \frac{6.775}{200} = \mathbf{33,875}$$

$\varepsilon^2 = (m-A)^2 =$ **26,2656**

V(X) = $V(A) - \varepsilon^2 =$ **7,6094**

b) Calcolo dello scarto quadratico medio:

Calcolo la radice quadrata della V(X):
σ(X) = RADQ (7,6094) = **2,759**

c) Calcolo del coefficiente di variazione:

$$\mathbf{Cv} = \frac{\sigma(X)}{M(X)} = \frac{2,759}{7,125} = \mathbf{0,3872}$$

ESERCIZIO 3

Sui dati presentati in tabella effettuare un test di omogeneità fra la distribuzione di frequenze osservate f e la distribuzione teorica F ad un livello di significatività dell'1%.

X	f	F	$(f-F)^2/F$
3	40	44	0,3636
6	20	25	1
7	12	16	1
11	28	15	11,2667
	100	**100**	**13,6303**

Calcolo del Chi Quadrato:

ChiQc = **13,6303**

Si individua sulle tavole del Chi Quadrato il valore teorico da confrontare:

ni=n-1=4-1= **3** gdl alpha = 1%

ChiQt = **11,35**

Poiché ChiQc > ChiQt si rifiuta l'ipotesi di omogeneità fra le due distribuzioni.

Esercizio 1)

a) Determini la tipologia del carattere.

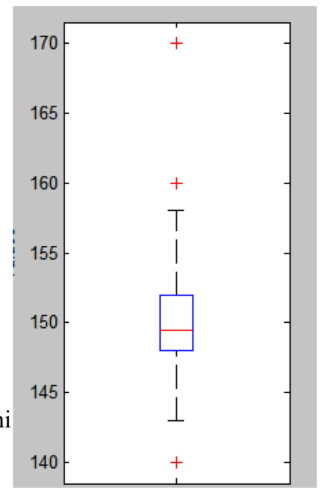
Il carattere è di tipo quantitativo (in quanto espresso da numeri) continuo (in quanto si vuole monitorare una concentrazione che concettualemente è continua).

b) Se possibile, tracci il boxplot.

Il box-plot è una rappresentazione grafica utile per rappresentare dati quantitativi siano essi continui o discreti. Deve essere infatti possibile calcolare i quartili delle osservazioni e poter svolgere semplici operazioni di conto. Come primo passo si debbono valutare i quartitili. Il primo quartile è quell'osservazione che lascia alla sua sinistra un quarto delle restanti osservazioni (ovvero $\frac{N-1}{4}=7.25$) poichè il numero non risulta tondo il primo quartile si otterra medianto l'ottava e la nona osservazione. Con una procedura analoga si ottiene che la mediana (secondo quartile) risutlata la media fra la 15^a e la 16^a osservazione mentre il terzo quartile sarà la media fra la 21^a e la 22^a osservazione. Si ha:

$$q_1=\frac{o_8+o_9}{2}=\frac{148+148}{2}=148 \qquad q_2=\frac{o_{15}+o_{16}}{2}=\frac{149+150}{2}=149.5$$

$$q_3=\frac{o_{21}+o_{22}}{2}=\frac{152+152}{2}=152$$



Per poter tracciare il box-plot si devono identificare gli estremi dei due "baffi" che completano il boxplot. Il baffo inferiore viene delimitato dal massimo fra il valore adiacente inferiore (VAI) e la minima osservazione ($o_1=140$); mentre il baffo superiore viene delimitato dal massimo fra il valore adiacente inferiore (VAI) e la massima osservazione ($o_N=170$). Posto la costante $k=1.5$ si ha che:

$$VAI=q_1-1.5*(q_3-q_1)=142 \qquad VAS=q_3+1.5*(q_3-q_1)=158$$

Da cui si ricava agevolemte diagramma a lato in cui si nota la presenza di alcuni outliers.

c*) Se possibile, calcoli la varianza.*

Lo scato quadratico medio (σ) può essere calcolato per ogni carattere quantitativo, e si ha che

$$\sigma^2=\left(\sum_{i=1}^{M} f_i*m_i^2\right)-\bar{o}^2=22536-22500=36 \quad \text{da cui} \quad \sigma=\sqrt{36}=6$$

I conti sono stati svolti nella tabella in calce.

i	**m_i**	**n_i**	**f_i**	**$m_i f_i$**	**m_i^2**	**$m_i^2 f_i$**	**$m_i-\bar{x}$**	**$(m_i-\bar{x})^3$**	**$(m_i-\bar{x})^3 f_i$**
1	140	3	0.100	14	19600	1960	-10	-1000	-100.000
2	143	1	0.033	4.77	20449	681.63	-7	-343	-11.433
3	145	2	0.067	9.67	21025	1401.67	-5	-125	-8.333
4	147	1	0.033	4.9	21609	720.3	-3	-27	-0.900
5	148	5	0.167	24.67	21904	3650.67	-2	-8	-1.333
6	149	3	0.100	14.9	22201	2220.1	-1	-1	-0.100
7	150	1	0.033	5	22500	750	0	0	0.000
8	151	4	0.133	20.13	22801	3040.13	1	1	0.133
9	152	5	0.167	25.33	23104	3850.67	2	8	1.333
10	155	1	0.033	5.17	24025	800.83	5	125	4.167
11	156	1	0.033	5.2	24336	811.2	6	216	7.200
12	158	1	0.033	5.27	24964	832.13	8	512	17.067
13	160	1	0.033	5.33	25600	853.33	10	1000	33.333
14	170	1	0.033	5.67	28900	963.33	20	8000	266.667
Totali		30	1	150	--	22536	--	--	207.8

d) Se possibile, calcoli un indice di asimmetria.
Un indice di asimmetria per caratteri quantiativi è il momento centrale terzo standardizzato

$$\gamma_1 = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = \frac{\sum_{i=1}^{M} f_i (m_i - \bar{o})^3}{\sigma^3} = \frac{207.8}{6^3} = 0.926$$

I conti sono stati svolti nella tabella riportata in precedenza.

Esercizio 2)
a) Completi la tabella con i dati mancanti.

La tabella si completa tenendo conto che la somma delle colonne deve coincidere con i dati illustrati nell'esercizio 1. Si noti che nella nuova formulazione le osservazioni sono state aggregate in classi. Le frequenze assolute richieste sono riportate nella tabella seguente (numeri non tra parentesi).

		Y: concentrazione di glucosio mg/dl						
		fino a 142	da 143 a 149 (149 escluso)	da 149 a 152 (152 esluso)	da 152 a 155 (155 escluso)	da 155 a 160 (160 escluso)	160 ed oltre	
X: Genere	M	3 (1.8)	6 (5.4)	4 (4.8)	**4 (3)**	**1 (1.8)**	**0 (1.2)**	**18**
	F	**0 (1.2)**	**3 (3.6)**	**4 (3.2)**	1 (2)	2 (1.2)	2 (0.8)	**12**
		3	**9**	**8**	**5**	**3**	**2**	**30**

b) Se possibile, indichi e calcoli per la serie ottenuta un opportuno indice di posizione

Una serie bivariata ottenuta misurando almeno un carattere qualitativo non ordinabile ammette un solo indice sintetico di posizione: la moda. La moda di una bi-variata si ottiene valutando la o le modalità della serie corrispondenti alla frequenza (assoluta o relativa) maggiore. Nel caso in esame la frequenza assoluta maggiore è 4 cui corrisponde la modalità (Maschile; da 149 a 152)

c) Se possibile, indichi e calcoli per la serie ottenuta un opportuno indice di variabilità

Una serie bivariata ottenuta misurando almeno un carattere qualitativio non ordinabile non ammette indice sintetici di variabilità in quanto non è possibile ottenere il concetto di distanza in maniera oggettiva.

d) Se possibile, verifichi, ad un opportuno livello di significatività, se i due caratteri si possono dire indipendenti, nel caso non fosse possibile indichi una possibile strategia per effettuare il calcolo.

Per verificare se i due caratteri sono indipendenti si può effettuare un test di ipotesi volto a verificare se le frequenze delle osservazioni rilevate nel campione sono sufficientemente vicine (ad un determinato livello di significatività) a quelle teoriche ottenute dall'ipotesi di indipendeza. Il test viene fatto sfruttando la distribuzione limite dello stimatore di Pizzetti Pearson che viene ad essere un chi quadrato avente gradi di libertà pari a quelli del numero di parametri liberi della distribuzione teorica. Il primo punto di questa procedura consiste nel calcolo delle frequenze teoriche ricavate dalle frequenze marginali ottenute orlando la tabella delle frequenze .

$$\hat{n}_{i,j} = n\,\hat{p}_{i,j} = \frac{n_{i,+}\, n_{+,j}}{n} \quad \forall\, i, j$$

le frequenze marginali e quelle teoriche fra parentesi sono state inserite nella tabella riportata al punto a).

A questo punto è possibile valutare la convergenza dello stimatore di Pizzetti Pearson, possibile solo se tutte le frequenze teoriche sono superiori a 5. Constatato che la condizione non è verificata si può concludere che non è possibile ricevare l'informazione richiesta dalle osservazioni fornite. Un modo per ottenere delle fequenze teoriche superiori a 5 (e quindi poter eseguire il test) è quello di accorpare più classsi nella speranza di ottenere delle frequenze attese meggiori. (si veda la soluzione della seconda fila).

Esercizio 3)
Nel testo si effettuano divese misure di una grandezza ignota da stimare. Possiamo modellare questo problema come l'estrazione di una variabile casuale

X :*concentrazione di glucosio in un adulto*

avente distribuzione ignota. Si sono effettuate $N = 30$ estrazioni in cui si son rilevate $M = 14$ modalità

a) stimare puntualmente il valore atteso.
Continuando con il modello precedentemente fatto il punto richiede di stimare E[X]. Questa stima può essere effettuata ricordando che la varianza viene stimata correttamente mediante la media campionaria. Il calcolo è gia stato effettuato nello svolgimento del primo esercizio, ottenendo

$$E[X]=\bar{o}=150$$

b) stimare per intervallo del valore atteso.
La stima del valore atteso per intervallo ha come ipotesi che considerando la distribuzione di partenza gaussiana ed n grande. Nel caso in esame considerare la distribuzione di partenza gaussiana non introduce un errore elevato (trattasi di errori di misura quindi nello specifico simmetrici) per quanto riguarda la dimensione del campione è possibile ritenere $N = 30$ una dimensione sufficiente.

Validate le ipotesi si ha che la stima per intervallo della valor atteso in caso che la varianza della popoplazione sia ignota è data dalla

$$E[X]=\left[\bar{o}-z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{s}{\sqrt{n}} \;\; ; \;\; \bar{o}+z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{s}{\sqrt{n}}\right]$$

ponendo un livello di confidenza del 95 % e ricordando la formula del calcolo della varianza campionaria si ha che:

$$s^2=\sigma^2\frac{n}{n-1}=36\frac{30}{29}=6\sqrt{\frac{30}{29}} \qquad z_{\frac{\alpha}{2}}=1.96$$

Pertanto l'intevallo richiesto è: $E[X]\in\left[150-1.96\frac{6}{\sqrt{29}} \;\; ; \;\; 150+1.96\frac{6}{\sqrt{29}}\right]=[152.18 \;\; ; \;\; 147.82]$

Esercizio 4)
a) E_1 ed E_2

Le due probabilità possono essere calcolate utilzzando la definizione frequentistica, dove gli esiti favorevoli vengono determinati dalle marginali della tebella a doppia etrata dell'esercizio 2.

$$P(E_1) = 12/30 \quad P(E_2) = 5/30$$

b) Il candiato calcoli Probabilità dell'evento E_1 intersezione E_2.

La probabilità dell'evento intersezione di due eventi (ovvero che i due eventi si verifichino entrambi) è ottenibile mediante la definizione frequentistica della probabilità. Si ha infatti ottenuti i casi favorevoli dalla tabella a doppia entrata (casella in posizione 2,4) si ha che

$$P(E_1\cap E_2)=\frac{1}{30}$$

c) Il candiato calcoli Probabilità dell'evento E_2 condizionato E_1

Applicando la defenzione di probabilità condizionata si ha che:

$$P(E_2|E_1)=P\frac{(E_1\cap E_2)}{P(E_1)}=\frac{1/30}{5/30}=\frac{1}{5}$$

d) Il candiato calcoli la Probabilità dell'evento E_1 unito E_2..
Note le probabilità degli eventi elementari e dell'evento intersezione si ha che

$$P(E_1\cup E_2)=P(E_1)+P(E_2)-P(E_1\cap E_2)=\frac{12}{30}+\frac{5}{30}-\frac{1}{30}=\frac{16}{30}=\frac{8}{15}$$

Matematica e Statistica (A-E, F-O, P-Z)

Prova d'esame (24/06/2011)

Università di Verona - Laurea in Biotecnologie - A.A. 2010/11

Tema B

Matematica e Statistica (A-E, F-O, P-Z)

Prova di $\boxed{\text{MATEMATICA (A-E, F-O, P-Z)}}$ (24/06/2011)

Università di Verona - Laurea in Biotecnologie - A.A. 2010/11

Cognome-Nome ______________________ Matr. __________ Corso _________
IN STAMPATELLO VR ······ A-E / F-O / P-Z

Tema B

**** Svolgere prima i punti* (a) *di* *<u>tutti</u> gli esercizi; solo in seguito i punti* (b). ***** **▶▶▶▶ Test a quiz sul retro ▶▶▶▶**

(1) (a) Sono dati, nello spazio cartesiano tridimensionale, il vettore $\vec{v} = (1, -2, 3)$ e i punti $A(2, -1, 0)$, $B(0, 1, -1)$ e $C(-1, 0, 4)$. Determinare, in forma parametrica e cartesiana, il piano Π passante per A e B e parallelo a $\vec{v}$; e la retta r passante per i punti B e C.

(b) Tra i punti di Π che stanno sul piano orizzontale $z = 0$, qual'è quello più vicino a C?

(2) (a) Studiare l'andamento di $f(x) = \dfrac{1}{2x^2} + 2\,\mathrm{arctg}\,x$, e tracciarne il grafico.(1)

(b) Calcolare il limite $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} f(x)\,\sin^\alpha(x)$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

(3) (a) Calcolare $\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}} x\, f(x)\, dx$, dove $f(x)$ è la funzione dell'ex. 2.

(b) Disegnare $S = \{(x, y) : |x - 3| - 2 \le y \le \log x\, ,\ |x| \le 5\,\}$, e calcolarne l'area.

(4) Data $g(x, y) = \dfrac{x - 2}{x - y^2 - y}$, determinarne dominio, zeri, segno e limiti interessanti, disegnando i risultati. Trovarne i punti stazionari ed eventuali estremi locali. Determinare il piano tangente al grafico di g sopra il punto $(x_0, y_0) = (-1, 0)$. Come sono fatte le curve di livello di g?

(5) (a) Trovare tutte le soluzioni $y(x)$ dell'equazione differenziale $4y'' + 4y' + y = 3 - 5 \sin x$, e tutte le soluzioni dell'equazione differenziale $(x + 1)y' = 2x - y$.

(b) Quali delle precedenti soluzioni hanno un punto di massimo locale in $x = 0$?

(1) Per lo studio di zeri e segno sarà utile un confronto grafico. Non è richiesto lo studio della convessità.

Matematica e Statistica (A-E)

Prova di STATISTICA (A-E) - Gobbi (24/06/2011)

Università di Verona - Laurea in Biotecnologie - A.A. 2010/11

Cognome-Nome ______________________________ Matr. ______________
IN STAMPATELLO VR ······

Tema B

**** Per ogni calcolo effettuato scrivere anche la formula teorica da utilizzare **** ▶▶▶▶ **Test a quiz sul retro** ▶▶▶▶

ESERCIZIO 1

La tabella seguente riporta la quantità in mg per litro di ione cloruro presente in un campione di 200 bottiglie d'acqua.

X	Frequenza
3	20
5	40
6	65
12	75

Sulla distribuzione di frequenze presentata in tabella, calcolare:

a) le medie potenziate di ordine r = -1 e r = 0;
b) enunciare e dimostrare 2 proprietà della media aritmetica, usando eventualmente i valori della distribuzione;
c) il primo, il secondo e il terzo quartile, indicando a cosa corrisponde il secondo quartile.

ESERCIZIO 2

Sulla distribuzione di frequenze della tabella precedente, calcolare:

a) la varianza usando l'origine A=2;
b) lo scarto quadratico medio;
c) il coefficiente di variazione.

ESERCIZIO 3

Sui dati presentati in tabella effettuare un test di omogeneità fra la distribuzione di frequenze osservate f e la distribuzione teorica F ad un livello di significatività del 2,5%.

X	f	F
3	17	15
6	12	14
7	15	13
11	6	8

Allegato: valori della variabile "Chi Quadrato" che sottendono una coda destra di ammontare alpha

G.d.l.	alpha %							
	99,5	**99**	**97,5**	**95**	**5**	**2,5**	**1**	**0,5**
1	0,00	0,00	0,00	0,00	3,84	5,02	6,64	7,88
2	0,01	0,02	0,05	0,10	5,99	7,38	9,21	10,60
3	0,07	0,12	0,22	0,35	7,82	9,35	11,35	12,84
4	0,21	0,30	0,48	0,71	9,49	11,14	13,28	14,86
5	0,41	0,55	0,83	1,15	11,07	12,83	15,09	16,75

Matematica e Statistica (F-O, P-Z)

Prova di | STATISTICA (F-O, P-Z) - Di Palma | (24/06/2011)

Università di Verona - Laurea in Biotecnologie - A.A. 2010/11

Cognome-Nome ______________________________ Matr. ______________

IN STAMPATELLO VR ······

Tema B

**** Attenzione: compiti illeggibili non verranno corretti ! **** ▶▶▶▶ **Test a quiz sul retro** ▶▶▶▶

Esercizio 1)
Si vuole stabilire il livello medio di glucosio che un adulto sano presenta nel sangue durante le ore di sonno. Pertanto si è condotta una sperimentazione in cui sono stati coinvolti 10 soggetti. Per ogni soggetto si sono effettuati 3 prelievi (uno ogni due ore) ottenendo le seguenti misurazioni di concetrazione di glucosio espresse in *mg/dl* ed ordinate in maniera crescente.

140	140	140	143	145	145	147	148	148	148
148	148	149	149	149	150	151	151	151	151
152	152	152	152	152	155	156	158	160	170

Il candidato

a) Determini la tipologia del carattere.
b) Se possibile, tracci l'istogramma.
c) Se possibile, calcoli un indice di curtosi adeguato.
d) Se possibile, calcoli la varianza.

Esercizio 2)
I dati raccolti nel precedente esercizio sono stati organizzati tenendo conto del diverso genere del soggetto coinvolto nella sperimentazione, ottenendo la seguente tabella.

		Y: concentrazione di glucosio mg/dl		Marginali
		da 149 a 150 (150 esluso)	da 150 a 170 (170 incluso)	
X: Genere	Maschile	11		
	Femminile			12
	Marginali		15	

Il candidato

a) completi la tabella con i dati mancanti.
b) indichi e calcoli, se possibile, un opportuno indice di posizione per la serie bivariata
c) indichi e calcoli, se possibile, un opportuno indice di variabilità per la serie bivariata
d) se possibile, verifichi, ad un opportuno livello di significatività, se i due caratteri si possono dire indipendenti. Nel caso non fosse possibile indichi una possibile strategia per effettuare il calcolo.

Esercizio 3)
Il candidato stimi puntualmente e per intervallo la varianza della concentrazione di glucosio in un adulto basandosi sulle misurazioni di concentrazione riportate nell'Esercizio 1.

Esercizio 4)
Si considerino i due eventi relativi ai dati dell'Esercizio 2

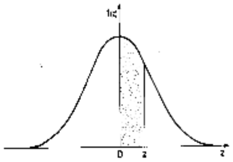
E_1 : estraendo a caso un componente della sperimentazione, questo è un uomo.
E_2 : estraendo a caso una misura di concetrazione di glucosio fra le 30 effettuate durante la sperimentazione, questa è maggiore di 139.

Il candiato valuti calcoli le probabilità dei seguenti eventi

a) le probabilità di E_1 ed E_2
b) la probabilità dell'evento E_1 intersezione E_2
c) se i due eventi sono statisticamente indipendenti

Tavola I

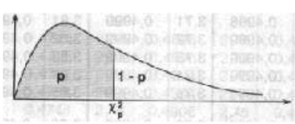
Integrali della variabile casuale normale standardizzata z



z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2517	0.2549
0.7	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4761	0.4767
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
2.1	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4854	0.4857
2.2	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884	0.4887	0.4890
2.3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
2.4	0.4918	0.4920	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936
2.5	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952
2.6	0.4953	0.4955	0.4956	0.4957	0.4959	0.4960	0.4961	0.4962	0.4963	0.4964
2.7	0.4965	0.4966	0.4967	0.4968	0.4969	0.4970	0.4971	0.4972	0.4973	0.4974
2.8	0.4974	0.4975	0.4976	0.4977	0.4977	0.4978	0.4979	0.4979	0.4980	0.4981
2.9	0.4981	0.4982	0.4982	0.4983	0.4984	0.4984	0.4985	0.4985	0.4986	0.4986
3.0	0.4987	0.4987	0.4987	0.4988	0.4988	0.4989	0.4989	0.4989	0.4990	0.4990

Tavola II

Integrali della variabile casuale chi quadrato a v gradi di libertà.



ν \ p	0,005	0,01	0,025	0,05	0,10	0,25	0,50	0,75	0,90	0,95	0,975	0,99	0,995	0,999
1	0,0000	0,0002	0,0010	0,0039	0,0158	0,102	0,455	1,32	2,71	3,84	5,02	6,63	7,88	10,8
2	0,0100	0,0201	0,0506	0,103	0,211	0,575	1,39	2,77	4,61	5,99	7,38	9,21	10,6	13,8
3	0,0717	0,115	0,216	0,352	0,584	1,21	2,37	4,11	6,25	7,81	9,35	11,3	12,8	16,3
4	0,207	0,297	0,484	0,711	1,06	1,92	3,36	5,39	7,78	9,49	11,1	13,3	14,9	18,5
5	0,412	0,554	0,831	1,15	1,61	2,67	4,35	6,63	9,24	11,1	12,8	15,1	16,7	20,5
6	0,676	0,872	1,24	1,64	2,20	3,45	5,35	7,84	10,6	12,6	14,4	16,8	18,5	22,5
7	0,989	1,24	1,69	2,17	2,83	4,25	6,35	9,04	12,0	14,1	16,0	18,5	20,3	24,3
8	1,34	1,65	2,18	2,73	3,49	5,07	7,34	10,2	13,4	15,5	17,5	20,1	22,0	26,1
9	1,73	2,09	2,70	3,33	4,17	5,90	8,34	11,4	14,7	16,9	19,0	21,7	23,6	27,9
10	2,16	2,56	3,25	3,94	4,87	6,74	9,34	12,5	16,0	18,3	20,5	23,2	25,2	29,6
11	2,60	3,05	3,82	4,57	5,58	7,58	10,3	13,7	17,3	19,7	21,9	24,7	26,8	31,3
12	3,07	3,57	4,40	5,23	6,30	8,44	11,3	14,8	18,5	21,0	23,3	26,2	28,3	32,9
13	3,57	4,11	5,01	5,89	7,04	9,30	12,3	16,0	19,8	22,4	24,7	27,7	29,8	34,5
14	4,07	4,66	5,63	6,57	7,79	10,2	13,3	17,1	21,1	23,7	26,1	29,1	31,3	36,1
15	4,60	5,23	6,26	7,26	8,55	11,0	14,3	18,2	22,3	25,0	27,5	30,6	32,8	37,7
16	5,14	5,81	6,91	7,96	9,31	11,9	15,3	19,4	23,5	26,3	28,8	32,0	34,3	39,3
17	5,70	6,41	7,56	8,67	10,1	12,8	16,3	20,5	24,8	27,6	30,2	33,4	35,7	40,8
18	6,26	7,01	8,23	9,39	10,9	13,7	17,3	21,6	26,0	28,9	31,5	34,8	37,2	42,3
19	6,84	7,63	8,91	10,1	11,7	14,6	18,3	22,7	27,2	30,1	32,9	36,2	38,6	43,8
20	7,43	8,26	9,59	10,9	12,4	15,5	19,3	23,8	28,4	31,4	34,2	37,6	40,0	45,3
21	8,03	8,90	10,3	11,6	13,2	16,3	20,3	24,9	29,6	32,7	35,5	38,9	41,4	46,8
22	8,64	9,54	11,0	12,3	14,0	17,2	21,3	26,0	30,8	33,9	36,8	40,3	42,8	48,3
23	9,26	10,2	11,7	13,1	14,8	18,1	22,3	27,1	32,0	35,2	38,1	41,6	44,2	49,7
24	9,89	10,9	12,4	13,8	15,7	19,0	23,3	28,2	33,2	36,4	39,4	43,0	45,6	51,2
25	10,5	11,5	13,1	14,6	16,5	19,9	24,3	29,3	34,4	37,7	40,6	44,3	46,9	52,6
26	11,2	12,2	13,8	15,4	17,3	20,8	25,3	30,4	35,6	38,9	41,9	45,6	48,3	54,1
27	11,8	12,9	14,6	16,2	18,1	21,7	26,3	31,5	36,7	40,1	43,2	47,0	49,6	55,5
28	12,5	13,6	15,3	16,9	18,9	22,7	27,3	32,6	37,9	41,3	44,5	48,3	51,0	56,9
29	13,1	14,3	16,0	17,7	19,8	23,6	28,3	33,7	39,1	42,6	45,7	49,6	52,3	58,3
30	13,8	15,0	16,8	18,5	20,6	24,5	29,3	34,8	40,3	43,8	47,0	50,9	53,7	59,7

$\boxed{\text{Tema B}}$ - Soluzioni

MATEMATICA (A-E, F-O, P-Z)

(1) (a) Il piano Π passante per i punti $A(2,-1,0)$ e $B(0,1,-1)$ e parallelo al vettore $\vec{v}=(1,-2,3)$ sarà parallelo anche al vettore $(2,-1,0)-(0,1,-1)=(2,-2,1)$, dunque una sua forma parametrica è $\Pi=\{(0,1,-1)+s(1,-2,3)+t(2,-2,1) : s,t\in\mathbb{R}\}=\{(s+2t,1-2s-2t,-1+3s+t) : s,t\in\mathbb{R}\}$; da $(x,y)=(s+2t,1-2s-2t)$ si ricava $s=1-x-y$ e $t=\frac{1}{2}(-1+2x+y)$, che messi in $z=-1+3s+t$ danno la forma cartesiana $4x+5y+2z-3=0$. • La retta r passante per i punti B e $C(-1,0,4)$ sarà parallela al vettore $(0,1,-1)-(-1,0,4)=(1,1,-5)$, dunque una forma parametrica è $r=\{(0,1,-1)+t(1,1,-5) : t\in\mathbb{R}\}=\{(t,1+t,-1-5t) : t\in\mathbb{R}\}$; sostituendo $t=x$ in $(y,z)=(1+t,-1-5t)$ si ottiene una forma cartesiana data dal sistema tra $x-y+1=0$ e $5x+z+1=0$.

(b) I punti di Π sono del tipo $(s+2t,1-2s-2t,-1+3s+t)$ al variare di $s,t\in\mathbb{R}$; quelli che stanno sul piano orizzontale $z=0$ soddisfano a $-1+3s+t=0$, ovvero $t=1-3s$, dunque sono quelli del tipo $P(s)=(2-5s,4s-1,0)$ al variare di $s\in\mathbb{R}$. La distanza di $P(s)$ da $C(-1,0,4)$ è $d(s)=\sqrt{(2-5s-(-1))^2+(4s-1-(0))^2+(0-4)^2}=\sqrt{41s^2-38s+26}$; la derivata $d'(s)=\frac{41s-19}{\sqrt{41s^2-38s+26}}$ è ≥ 0 per $s\geq\frac{19}{41}$, dunque il punto di minima distanza cercato si ottiene quando $s=\frac{19}{41}$, ovvero $P(\frac{19}{41})=(-\frac{13}{41},\frac{35}{41},0)$.

(2) (a) (Figura 1) La funzione $f(x)=\frac{1}{2x^2}+2\operatorname{arctg}x$ è definita per $x\neq 0$, ed è derivabile infinite volte nel suo dominio; non ha parità ne' periodicità. Si ha $f(x)=0$ se e solo se $\operatorname{arctg}x=-\frac{1}{4x^2}$; un confronto grafico tra l'arcotangente $\operatorname{arctg}x$ e la potenza $-\frac{1}{4x^2}=-\frac{1}{4}x^{-2}$ mostra chiaramente che esiste un unico punto $\alpha\in\,]-1,0[$ tale che ciò vale se e solo se $x=\alpha$. Similmente si ha $f(x)>0$ se e solo se $\operatorname{arctg}x>-\frac{1}{4x^2}$, e il confronto grafico mostra che ciò vale se e solo se $\alpha<x<0$ oppure $x>0$. I limiti interessanti sono tutti determinati, e valgono $\lim_{x\to\mp\infty}f(x)=\mp\pi$ e $\lim_{x\to 0}f(x)=+\infty$; pertanto $x=0$ è asintoto verticale bilatero, e $y=\mp\pi$ è asintoto orizzontale a $\mp\infty$. Derivando si ottiene $f'(x)=\frac{2}{x^2+1}-\frac{1}{x^3}=\frac{2x^3-x^2-1}{x^3(x^2+1)}$: una evidente radice di $2x^3-x^2-1$ è $x=1$, e dividendo con Ruffini si ottiene $2x^3-x^2-1=(x-1)(2x^2+x+1)$. Ne ricaviamo che vale $f'(x)=0$ se e solo se $x=1$, e $f'(x)>0$ se e solo se $x<0$ oppure $x>1$: pertanto $x=1$ è un punto di minimo, con $f(1)=2\operatorname{arctg}1+\frac{1}{2}=\frac{\pi+1}{2}\sim 2{,}0$.

(b) Il limite $\lim_{x\to 0^+}f(x)\,\sin^\alpha(x)$, quando $\alpha\leq 0$ è determinato e vale $+\infty$; invece per $\alpha>0$ è in forma $\infty\cdot 0$. Occupiamoci dunque di questo caso. Si ha $f(x)\sin^\alpha(x)=2\operatorname{arctg}x\,\sin^\alpha(x)+\frac{1}{2}\frac{\sin^\alpha(x)}{x^2}$: il primo addendo tende a zero, mentre il limite del secondo (in forma $\frac{0}{0}$) si può scrivere come $\frac{1}{2}(\frac{\sin x}{x})^2\sin^{\alpha-2}(x)$, e ricordando il limite notevole $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ si conclude che se $\alpha-2<0$ tende a $+\infty$, se $\alpha-2=0$ tende a $\frac{1}{2}$ mentre se $\alpha-2>0$ tende a 0^+. Ricapitolando, il limite cercato vale $+\infty$ se $\alpha<2$; vale $\frac{1}{2}$ se $\alpha=2$; e vale 0^+ se se $\alpha>2$.

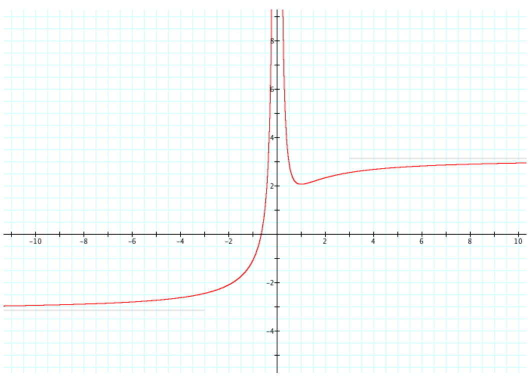
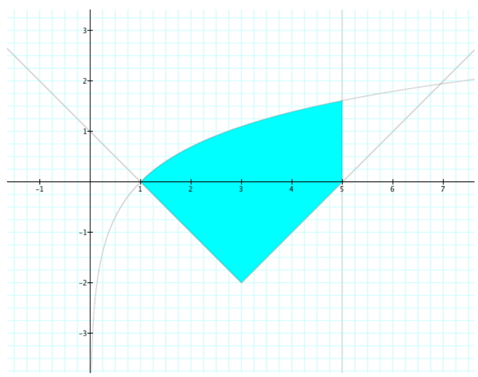
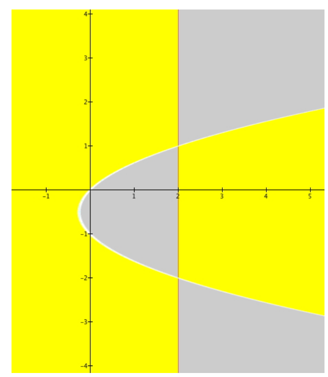
(3) (a) Integrando per parti si ha $\int x\,f(x)\,dx=\int 2x\operatorname{arctg}x\,dx+\frac{1}{2}\int\frac{1}{x}\,dx=x^2\operatorname{arctg}x-\int x^2\frac{1}{x^2+1}\,dx+\frac{1}{2}\log|x|+k=x^2\operatorname{arctg}x-\int(1-\frac{1}{x^2+1})\,dx+\frac{1}{2}\log|x|+k=(x^2+1)\operatorname{arctg}x-x+\frac{1}{2}\log|x|+k$, dunque $\int_1^{\sqrt{3}}x\,f(x)\,dx=(4\operatorname{arctg}\sqrt{3}-\sqrt{3}+\frac{1}{2}\log\sqrt{3})-(2\operatorname{arctg}1-1+\frac{1}{2}\log 1)=\frac{5}{6}\pi+\frac{1}{4}\log 3-\sqrt{3}+1\sim 2{,}2$.

(b) (Figura 2) L'intersezione tra i grafici $y=\log x$ e $y=|x-3|-2$ che ci interessa (dunque quando quest'ultimo diventa la retta $y=1-x$) avviene per $x=1$, dunque la zona di piano $S=\{(x,y) : |x-3|-2\leq y\leq\log x\,,\ |x|\leq 5\}$ ha area $\int_1^5\log x\,dx+\int_5^3(x-5)\,dx+\int_3^1(1-x)\,dx=(x(\log x-1)]_1^5+(\frac{1}{2}x^2-5x]_5^3+(x-\frac{1}{2}x^2]_3^1+=(5(\log 5-1))-(-1)+(-\frac{21}{2})-(-\frac{25}{2})+(\frac{1}{2})-(-\frac{3}{2})=5\log 5\ \sim\ 8{,}0$.

(4) (Figura 3) Il dominio di $g(x,y)=\frac{x-2}{x-y^2-y}$ è tutto il piano $\mathbb{R}^2$ meno i punti della parabola $x=y^2+y$. Si ha $g(x,y)=0$ sui punti della retta verticale $x=2$, tranne ovviamente i punti $P(2,1)$ e $Q(2,-2)$ (intersezioni tra retta e parabola) che sono esclusi dal dominio. Il numeratore $x-2$ è positivo a destra della retta $x=2$ e negativo a sinistra, il denominatore $x-y^2-y$ è positivo all'interno della parabola e negativo all'esterno, e il segno di g ne segue per quoziente. La funzione g è differenziabile (in particolare continua) in ogni punto del dominio, in quanto le derivate parziali $\frac{\partial g}{\partial x}=\frac{1(x-y^2-y)-1(x-2)}{(x-y^2-y)^2}=\frac{2-y^2-y}{(x-y^2-y)^2}$ e $\frac{\partial g}{\partial y}=-(x-2)\frac{-2y-1}{(x-y^2-y)^2}=\frac{(x-2)(2y+1)}{(x-y^2-y)^2}$ risultano continue. Per quanto riguarda i limiti interessanti, nei punti della parabola diversi da P e Q il limite vale $\mp\infty$, col segno che dipende dal fatto che si tenda al punto da fuori o da dentro la parabola (vedi Figura 3); invece in P, Q e ∞_2 il limite non esiste, perché tendendovi ad esempio lungo la retta $x=2$ si tende a 0 mentre avvicinandosi alla parabola la funzione diventa arbitrariamente grande. Dal sistema $\frac{\partial g}{\partial x}=\frac{\partial g}{\partial y}=0$ si ricavano i soli punti P e Q, che però non sono accettabili in quanto fuori dal dominio: non vi sono dunque punti stazionari, in particolare nessun estremante locale. Il piano tangente al grafico di g sopra $(-1,0)$ è $z=g(-1,0)+\frac{\partial g}{\partial x}(-1,0)\cdot(x-(-1))+\frac{\partial g}{\partial y}(-1,0)\cdot(y-(0))$, ovvero $2x - 3y - z + 5 = 0$. Infine, esaminiamo le curve di livello $g(x,y) = k$ al variare di $k \in \mathbb{R}$: si ricava $x - 2 = k(x - y^2 - y)$ ovvero $(k-1)x = k(y^2 + y) - 2$. Se $k = 0$ si ricava (come già noto, dallo studio degli zeri) la retta $x = 2$; se $k = 1$ si ottiene $y^2 + y - 2 = 0$ ovvero l'unione delle due rette orizzontali $y = 1$ e $y = -2$; negli altri casi si ha invece $x = \frac{1}{k-1}(ky^2 + ky - 2)$, che è un fascio di parabole dipendenti da k, tutte passanti per P e Q (punti che però restano esclusi da tali curve di livello in quanto fuori dal dominio di g).

(5) (a) L'equazione differenziale $4y'' + 4y' + y = 3 - 5\sin x$ è del secondo ordine, lineare a coefficienti costanti. L'equazione caratteristica $4t^2 + 4t + 1 = 0$ ha soluzione doppia $t = -\frac{1}{2}$, dunque lo spazio di soluzioni dell'equazione omogenea associata è $y(x) = Ae^{-\frac{x}{2}} + Bxe^{-\frac{x}{2}} = (A + Bx)e^{-\frac{x}{2}}$ al variare di $A, B \in \mathbb{R}$. Una soluzione particolare per la completa con 3 è la costante $\tilde{y}_1(x) \equiv 3$; una soluzione particolare per la completa con $-5\sin x$ avrà la forma $\tilde{y}_2(x) = a\cos x + b\sin x$, e il calcolo dà $(a,b) = (\frac{4}{5}, \frac{3}{5})$; dunque lo spazio di soluzioni dell'equazione completa è $y(x) = (A+Bx)e^{-\frac{x}{2}} + 3 + \frac{1}{5}(4\cos x + 3\sin x)$ al variare di $A, B \in \mathbb{R}$. • L'equazione differenziale $(x+1)y' = 2x - y$ è lineare del primo ordine. Limitandosi da subito al caso $x > -1$ e dividendo per $x+1$ si ottiene la forma normale $y' + p(x)\, y = q(x)$ con $p(x) = \frac{1}{x+1}$ e $q(x) = \frac{2x}{x+1}$: essendo $P(x) = \int p(x)\, x = \log(x+1)$ e $\int e^{P(x)} q(x)\, dx = x^2$ si ha che le soluzioni per $x > -1$ sono del tipo $y(x) = \frac{1}{x+1}(x^2 + k) = \frac{x^2+k}{x+1}$ al variare di $k \in \mathbb{R}$. Di queste, l'unica estendibile anche in $x = 0$ è quella con $k = -1$, ovvero $y(x) = x - 1$.

(b) Ricordiamo che, se una funzione $\varphi(x)$ è derivabile due volte con continuità in $x = 0$, condizione necessaria affinché φ abbia un punto di massimo locale in $x = 0$ è che $\varphi'(0) = 0$ e $\varphi''(0) \leq 0$; se inoltre $\varphi''(0) < 0$ allora la condizione è anche sufficiente, mentre il caso in cui $\varphi'(0) = \varphi''(0) = 0$ va verificato a parte (ad esempio, se in quest'ultimo caso si ha che $\varphi'''(0) \neq 0$ allora $x = 0$ non è un punto ne' di massimo ne' di minimo locale, ma solo di flesso orizzontale). • Le derivate della soluzione generale della prima equazione differenziale sono $y'(x) = (B - \frac{1}{2}A - \frac{1}{2}Bx)e^{-\frac{x}{2}} + \frac{1}{5}(3\cos x - 4\sin x)$ e $y''(x) = (-B + \frac{1}{4}A + \frac{1}{4}Bx)e^{-\frac{x}{2}} - \frac{1}{5}(4\cos x + 3\sin x)$, dunque la condizione necessaria $y'(0) = 0$ e $y''(0) \leq 0$ dà $(B - \frac{1}{2}A) + \frac{3}{5} = 0$ e $(-B + \frac{1}{4}A) - \frac{4}{5} \leq 0$, ovvero $B = \frac{1}{2}A - \frac{3}{5}$ e $A \leq -\frac{4}{5}$; se $y''(0) < 0$ (cioè se $A < -\frac{4}{5}$) la condizione è anche sufficiente, mentre nel caso $A = -\frac{4}{5}$ si dimostra direttamente che $y'''(0) \neq 0$, dunque $x = 0$ non è estremante locale (si tratta di un flesso orizzontale). • Le derivate della soluzione generale della prima equazione differenziale sono $y'(x) = \frac{x^2+2x-k}{(x+1)^2}$ e $y''(x) = \frac{2+2k}{(x+1)^3}$, dunque la condizione necessaria $y'(0) = 0$ e $y''(0) \leq 0$ dà $k = 0$ e $2 + 2k \leq 0$, assurdo. Dunque nessuna soluzione soddisfa alla richiesta.

1. Il grafico della funzione dell'ex. 2. **2.** L'insieme dell'ex. (3.b). **3.** Ex. 4: zeri (rosso), segno positivo (giallo) e negativo (grigio) della funzione g.

ESERCIZIO 1

La tabella seguente riporta la quantità in mg per litro di ione cloruro presente in un campione di 200 bottiglie d'acqua.
Sulla distribuzione di frequenze presentata in tabella, calcolare:
a) le medie potenziate di ordine r = -1 e r = 0;
b) enunciare e dimostrare 2 proprietà della media aritmetica, usando eventualmente i valori della distribuzione;
c) il primo, il secondo e il terzo quartile, indicando a cosa corrisponde il secondo quartile.

X	f	X*f	f/X	ln(X)	ln(X)*f
3	20	60	6,6667	1	22
5	40	200	8	1,6094	64,3775
6	65	390	10,8333	1,7918	116,464
12	75	900	6,25	2,4849	186,3680
	200	**1550**	**31,75**	**6,9847**	**389,1821**

a) Calcolo delle medie potenziate di ordine r = -1 e r = 0:
La media potenziata di ordine r = -1 è la media armonica.
La media potenziata di ordine r = 0 corrisponde alla media geometrica.

Ma(X) = $\frac{\Sigma f}{\Sigma f/X} = \frac{200}{31,75} =$ **6,2992** r = -1

ln(Mg(X))= $\frac{\Sigma \ln(X) * f}{\Sigma f} = \frac{389,1821}{200} = 1,9459$ **Mg(X)** = $e^{1,9459} =$ **7** r = 0

b) Dimostrazione di 2 proprietà della media aritmetica:

Proprietà della media aritmetica:
1) la somma degli scarti dalla media aritmetica è nulla;
2) la somma dei quadrati degli scarti dalla media aritmetica è minima.

Dimostrazione della prima proprietà.
La somma degli scarti dalla media aritmetica è nulla.

Calcolo della media aritmetica:

M(X) = $\frac{\Sigma X * f}{\Sigma f} = \frac{1550}{200} =$ **7,750**

Calcolo degli scarti dalla media aritmetica:

X-m	f	(X-m)*f
-4,750	20	-95
-2,750	40	-110
-1,750	65	-113,75
4,250	75	319
	200	**0**

La somma dell'ultima colonna, riguardante gli scarti dalla media aritmetica, è zero.

Dimostrazione della seconda proprietà.
La somma dei quadrati degli scarti dalla media aritmetica è minima.

Calcolo dei quadrati degli scarti dai valori della X e dalla media:

X	f	X-3	X-5	X-6	X-12	X-m
3	20	0	-2	-3	-9	-4,750
5	40	2	0	-1	-7	-2,750
6	65	3	1	0	-6	-1,750
12	75	9	7	6	0	4,250
	200					

X	f	$(X-3)^2$*f	$(X-5)^2$*f	$(X-6)^2$*f	$(X-12)^2$*f	$(X-m)^2$*f
3	20	-	80	180	1.620	451
5	40	160	-	40	1.960	303
6	65	585	65	-	2.340	199
12	75	6.075	3.675	2.700	-	1.355
	200	**6.820**	**3.820**	**2.920**	**5.920**	**2.308**

La somma dell'ultima colonna, che si riferisce ai quadrati degli scarti dalla media aritmetica, è la minore.

c) Calcolo del primo, del secondo e del terzo quartile:

Q1 = X 50° = **5**

Q2 = X 100° = **6 = corrisponde alla mediana**

Q3 = X 150° = **12**

ESERCIZIO 2

Sulla distribuzione di frequenze della tabella precedente, calcolare:
a) la varianza usando l'origine A=2;
b) lo scarto quadratico medio;
c) il coefficiente di variazione.

X	f	X-2	$(X-2)^2$*f
3	20	1	20
5	40	3	360
6	65	4	1040
12	75	10	7500
	200		**8.920**

a) Calcolo della varianza usando l'origine A=2:

$$V(A) = \frac{8.920}{200} = \mathbf{44,6}$$

$\varepsilon^2 = (m-A)^2 =$ **33,0625**

$$\mathbf{V(X) =} \quad V(A) - \varepsilon^2 = \mathbf{11,5375}$$

b) Calcolo dello scarto quadratico medio:

Calcolo la radice quadrata della V(X):
σ(X) = RADQ (11,5375) = **3,397**

c) Calcolo del coefficiente di variazione:

$$\mathbf{Cv =} \frac{\sigma(X)}{M(X)} = \frac{3,397}{7,750} = \mathbf{0,4383}$$

ESERCIZIO 3

Sui dati presentati in tabella effettuare un test di omogeneità fra la distribuzione di frequenze osservate f e la distribuzione teorica F ad un livello di significatività del 2,5%.

X	**f**	**F**	**$(f-F)^2/F$**
3	17	15	0,2667
6	12	14	0,2857
7	15	13	0,3077
11	6	8	0,5
	50	**50**	**1,3601**

Calcolo del Chi Quadrato:

ChiQc = **1,3601**

Si individua sulle tavole del Chi Quadrato il valore teorico da confrontare:

ni=n-1=4-1= **3** gdl alpha = 2,5%

ChiQt = **9,35**

Poiché ChiQc < ChiQt si accetta l'ipotesi di omogeneità fra le due distribuzioni.

Esercizio 1)

a) Determini la tipologia del carattere.

Il carattere è di tipo quantitativo (in quanto espresso da numeri) continuo (in quanto si vuole monitorare una concentrazione che concettualemente è continua).

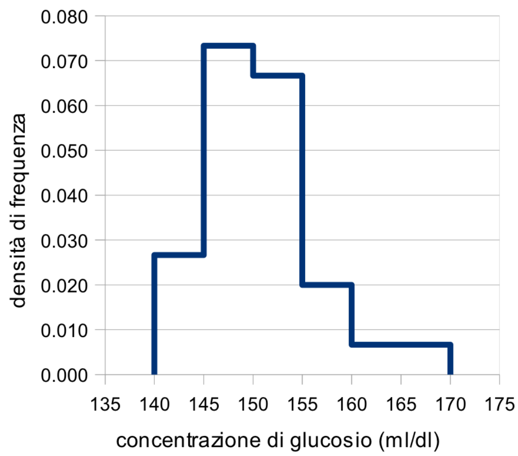
b) Se possibile, tracci si tracci l'istogramma.

Il box-plot è una rappresentazione utilizzata per rappresentare dati quantitativi continui raggruppati in classi. Pertanto per ottenere l'istogramma i dati debbono essere raccolti in classi. Per determinare il numero delle classi C si può utilizzare le seguente formula empirica.

$$C=1+\log_2 N=1+\log_2 30=1+4.907\approx 6$$

Utilizzando classi aventi eguale ampiezza si ha che l'ampiezza di una classe è

$$sup_i-inf_i=\frac{o_N-o_1}{C}=\frac{170-140}{6}=5$$



Procedendo con i conti riportati nella tabella sotto indicata si ha l'istogramma a lato.

i	inf_i	sup_i	sup_i-inf_i	n_i	f_i	f_i /(sup_i-inf_i)
1	140	145	5	4	0.13	0.027
2	145	150	5	11	0.37	0.073
3	150	155	5	10	0.33	0.067
4	155	160	5	3	0.1	0.020
5	160	165	5	1	0.03	0.007
6	165	170	5	1	0.03	0.007
Totali			---	30	1.00	---

N.b. gli estremi superiori sono da riternersi esclusi dalla classe per ogni classe tranne l'ultima per cui è incluso.

c) Se possibile, calcoli la varianza.

La varianza può essere calcolata per ogni carattere quantitativo, quindi anche nel caso in esame e si ha che $\sigma^2=\left(\sum_{i=1}^{M} f_i * m_i^2\right)-\bar{o}^2=22536-22500=36$ I conti sono stati svoli nella tabella in calce.

i	m_i	n_i	f_i	$m_i\ f_i$	m_i^2	$m_i^2\ f_i$	$m_i - \bar{x}$	$(m_i - \bar{o})^4$	$(m_i - \bar{o})^4 f_i$
1	140	3	0.100	14	19600	1960	-10	10000	1000.000
2	143	1	0.033	4.77	20449	681.63	-7	2401	80.033
3	145	2	0.067	9.67	21025	1401.67	-5	625	41.667
4	147	1	0.033	4.9	21609	720.3	-3	81	2.700
5	148	5	0.167	24.67	21904	3650.67	-2	16	2.667
6	149	3	0.100	14.9	22201	2220.1	-1	1	0.100
7	150	1	0.033	5	22500	750	0	0	0.000
8	151	4	0.133	20.13	22801	3040.13	1	1	0.133
9	152	5	0.167	25.33	23104	3850.67	2	16	2.667
10	155	1	0.033	5.17	24025	800.83	5	625	20.833
11	156	1	0.033	5.2	24336	811.2	6	1296	43.200
12	158	1	0.033	5.27	24964	832.13	8	4096	136.533
13	160	1	0.033	5.33	25600	853.33	10	10000	333.333
14	170	1	0.033	5.67	28900	963.33	20	160000	5333.333
Totali		30	1	150	--	22536	--	--	6997.2

d) Se possibile, calcoli un indice di curtosi.

Un indice di curtosi per caratteri quantiativi è il momento centrale quarto standardizzato

$$\gamma_1 = \frac{\mu_4}{\sigma^4} = \frac{\sum_{i=1}^{M} f_i (m_i - \bar{o})^4}{(\sigma^2)^2} = \frac{6997.2}{36^2} = 5.40$$

I conti sono stati svolti nella tabella riportata in precedenza.

Esercizio 2)

a) Completi la tabella con i dati mancanti.

La tabella si completa tenendo conto che la somma delle colonne deve coincidere con i dati illustrati nell'esercizio 1. Si noti che nella nuova formulazione le osservazioni sono state aggregate in classi in maniera diversa da quanto fatto nel primo esercizio.

		Y: concentrazione di glucosio mg/dl		Marginali
		da 149 a 150 (150 esluso)	da 150 a 170 (170 incluso)	
X: Genere	Maschile	11 (9)	**7 (9)**	**18**
	Femminile	**4 (6)**	**8 (6)**	12
	Marginali	**15**	15	**30**

b) Se possibile, indichi e calcoli per la serie ottenuta un opportuno indice di posizione

Una serie bivariata ottenuta misurando almeno un carattere qualitativo non ordinabile ammette un solo indice sintetico di posizione: la moda. La moda di una bi-variata si ottiene valutando la o le modalità della serie corrispondenti alla frequenza (assoluta o relativa) maggiore. Nel caso in esame la frequenza assoluta maggiore è 12 cui corrisponde la modalità (Femminile; da 149 a 152)

c) Se possibile, indichi e calcoli per la serie ottenuta un opportuno indice di variabilità

Una serie bivariata ottenuta misurando almeno un carattere qualitativio non ordinabile non ammette indice sintetici di variabilità in quanto non è possibile ottenere il concetto di distanza in maniera oggettiva.

d) Se possibile, verifichi, ad un opportuno livello di significatività, se i due caratteri si possono dire indipendenti, nel caso non fosse possibile indichi una possibile strategia per effettuare il calcolo.

Per verificare se i due caratteri sono indipendenti si può effettuare un test di ipotesi volto a verificare se le frequenze delle osservazioni rilevate nel campione sono sufficientemente vicine (ad un determinato livello di significatività) a quelle teoriche ottenute dall'ipotesi di indipendeza. Il test viene fatto sfruttando la distribuzione limite dello stimatore di Pizzetti Pearson che viene ad essere un chi quadrato avente gradi di libertà pari a quelli del numero di parametri liberi della distribuzione teorica.

Il primo punto di questa procedura consiste nel calcolo delle frequenze teoriche ricavate dalle frequenze marginali ottenute orlando la tabella delle frequenze .

$$\hat{n}_{i,j} = n \hat{p}_{i,j} = \frac{n_{i,+} n_{+,j}}{n} \quad \forall i, j$$

A questo punto è possibile valutare la convergenza dello stimatore di Pizzetti Pearson, possibile solo se tutte le frequenze teoriche sono superiori a 5. Constatato che la condizione è verificata si ha la convergenza dello stimatore

$$\hat{n}_{i,j} > 5 \Rightarrow \sum_{i=1}^{M} \frac{(n_{i,j} - \hat{n}_{i,j})^2}{\hat{n}_{i,j}} \sim \chi^2((M_x - 1)(M_y - 1)).$$

Poichè entrambi i caratteri della bivarianta hanno 2 modalità ($M_x = M_y = 2$), la regione di accettazione per un test al 5 % è la seguente.

$$A = [0; \chi^2_{0.95}(1)] = [0; 3.84]$$

Non rimane che da calcolare il valore dello stimatore e verificare se appartiene alla regione di accettazione.

Il valore dello stimatore è

$$\sum_{i=1}^{4} \frac{(n_{i,j} - \hat{n}_{i,j})^2}{\hat{n}_{i,j}} = \frac{(11-9)^2}{9} + \frac{(7-9)^2}{9} + \frac{(4-6)^2}{6} + \frac{(8-6)^2}{6} = \frac{8}{9} + \frac{4}{3} = \frac{20}{9}$$

e risulta interno ad *A*. Quindi l'ipotesi di indipendenza viene accettata.

Esercizio 3)

Nel testo si effettuano divese misure di una grandezza ignota da stimare. Possiamo modellare questo problema come l'estrazione di una variabile casuale

X :*concentrazione di glucosio in un adulto*

avente distribuzione ignota. Si sono effettuate $N = 30$ estrazioni in cui si son rilevate $M = 14$ modalità

a) stimare puntualmente la varianza.

Continuando con il modello precedentemente fatto il punto richiede di stimare Var[X]. Questa stima può essere effettuata ricordando che la varianza viene stimata correttamente mediante la varianza campionaria. Ricordando il legame fra la varianza di un campione e la varianza campionaria si ha che

$$s^2 = \sigma^2 \frac{N}{N-1} = 36\frac{30}{29} = 37.24$$

(si ricorda che la varianza è stata calcolata nel primo esercizio)

b) stimare per intervallo del valore atteso.

La stima del valore atteso per intervallo ha come ipotesi che considerando la distribuzione di partenza gaussiana ed *n* grande. Nel caso in esame considerare la distribuzione di partenza gaussiana è un ipotesi un po forte ma legittima mentre per quanto riguarda la dimensione del campione è possibile ritenere $N = 30$ una dimensione sufficiente.

Validate le ipotesi si ha che la stima per intervallo della varianza è data dalla

$$Var[X] \in \left[\frac{(N-1)s^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(N-1)} ; \frac{(N-1)s^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(N-1)} \right]$$

ponendo un livello di confidenza del *95 %* si ha che:

$$Var[X] \in \left[\frac{(29)36\frac{30}{29}}{47.5} ; \frac{(29)36\frac{30}{29}}{16.0} \right] = \left[\frac{1080}{47.5} ; \frac{1080}{16.0} \right] = [22.74 ; 67.5]$$

Esercizio 4)

a) E_1 ed E_2

Le due probabilità possono essere calcolate utilzzando la definizione frequentistica, dove gli esiti favorevoli vengono determinati dalle marginali della tebella a doppia etrata dell'esercizio 2.

$$P(E_1) = 18/30 = 1/5 = 0.2 \quad P(E_1) = 30/30$$

Si nota come l'evento sia l'evento certo.

b) Il candiato calcoli Probabilità dell'evento E_1 intersezione E_2.

La probabilità dell'evento intersezione di un evento con l'evento certo coincide con la probabilità del'evento non certo

$$P(E_1 \cap E_2) = \frac{1}{5}$$

c) Il candiato valuti se i due eventi sono indipendenti

Avere informazioni su un qualunque evento non può influenzare la probabilità dell'evento certo (esso si verifica sempre)... quindi i due eventi sono per definizioni indipendenti.