Programma di Erlangen & spazi omogenei

① Geometria euclidea: propr. invarianti per isometrie

(piano)

$$\boxed{\mathbb{R}^2 \cong \frac{ISO(\mathbb{R}^2)}{SO(2)}}$$

isotropia di un pto generico

$ISO(\mathbb{R}^2) = \{ (O, a) : x \to Ox + a \}$ with $O \in SO(2)$, $a \in \mathbb{R}^2$

formalismo unificato

$$\begin{pmatrix} 1 & 0\ 0\ 0 \\ a & \boxed{O} \end{pmatrix}$$

$ds^2 = dx^2 + dy^2$

(invariante per isometrie)

② Geometria sferica

("rette" = cerchi massimi (= geodetiche)

isometrie di S^2

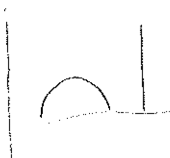
$$\boxed{S^2 \cong \frac{SO(3)}{SO(2)}}$$

$ds^2 =$ metrica naturale sulla sfera $= \sin^2\vartheta\, d\varphi^2 + d\vartheta^2$

$\cong \frac{SU(2)}{SO(2)}$

③ Geometria iperbolica

rette = geodetiche



$\mathbb{H}$

(trigonometria iperbolica - Lobachevskij)

$$\boxed{\mathbb{H} \cong \frac{SL(2,\mathbb{R})}{SO(2)}}$$

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}$$

Notare: $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{R}^2/\{e\}$ ← traslazioni

($x \mapsto x + a$ è libera)

ciò + ovviamente vero per ogni gruppo di Lie: $G \cong G/\{e\}$

Addendum 2 - Lez. XXXII