Matematica e Statistica (A-E, F-O, P-Z)

Prova d'esame (23/09/2011)

Università di Verona - Laurea in Biotecnologie - A.A. 2010/11

Matematica e Statistica (A-E, F-O, P-Z)

Prova di $\boxed{\text{MATEMATICA (A-E, F-O, P-Z)}}$ (23/09/2011)

Università di Verona - Laurea in Biotecnologie - A.A. 2010/11

Cognome-Nome ______________________ Matr. __________ Corso _________
IN STAMPATELLO VR ······ A-E / F-O / P-Z

▶▶▶▶ **Test a quiz sul retro** ▶▶▶▶

(1) Nello spazio cartesiano sono dati i punti $A(0,1,0)$, $B(1,2,-2)$ e $C(-1,0,-3)$: determinare, in forma parametrica e cartesiana, il piano Π passante per essi e la retta r passante per B e ortogonale al piano $x=y$. Calcolare infine l'area e l'angolo di vertice A del triangolo ABC.

(2) Studiare l'andamento di $f(x) = \dfrac{\sin 2x}{1+\sin x}$, e tracciarne il grafico.

(3) (a) Calcolare $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx$ e $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x(1+\sin x)f(x)\,dx$, dove $f(x)$ è la funzione dell'ex. 2.

(b) Disegnare $S = \{(x,y) : |x-1|-1 \le y \le \sqrt{x+2}\,,\ x+y \le 4\}$, e calcolarne l'area.

(4) (a) Data $g(x,y) = (x+1)(x^2+y^2-2x-7)$, determinarne dominio, zeri, segno e limiti interessanti, disegnando i risultati. Trovarne i punti stazionari ed eventuali estremi locali. Calcolarne anche il piano tangente al grafico nel punto $P(0,-2)$.

(b) Calcolare gli estremi assoluti di g sul disco pieno $\mathcal{D}$ di centro l'origine e raggio 2.[1]

(5) Trovare tutte le soluzioni $y(x)$ dell'equazione differenziale $y''+y = x^2-4e^x$, e tutte quelle dell'equazione differenziale $(x+2)y'+(x-1)y^2 = 0$. Quali di queste soluzioni soddisfano alle condizioni $y(0) = -1$ e $y'(0) = \frac{1}{2}$?

[1] La circonferenza che fa da bordo al disco $\mathcal{D}$ può essere descritta come $(2\cos\theta, 2\sin\theta)$ al variare di $\theta \in [-\pi,\pi]$.

Matematica e Statistica (A-E)

Prova di STATISTICA (A-E) - Gobbi (23/09/2011)

Università di Verona - Laurea in Biotecnologie - A.A. 2010/11

Cognome-Nome ________________________________ Matr. ____________
IN STAMPATELLO VR ⋯⋯

**** Per ogni calcolo effettuato scrivere anche la formula teorica da utilizzare **** ▶▶▶▶ Test a quiz sul retro ▶▶▶▶

ESERCIZIO 1

X	Frequenza
3	25
6	63
8	38
11	74

Sulla distribuzione di frequenze presentata in tabella, calcolare:
a) le medie potenziate di ordine r = -1, r = 0 e r = 1, indicandone anche il nome;
b) la mediana e la moda, dandone una breve definizione;
c) il primo, il secondo e il terzo quartile.

ESERCIZIO 2

X	Y
1	15
6	25
8	29
9	31

Sui dati presentati in tabella calcolare:
a) i parametri della retta interpolante Y'=a+bX ;
b) il coefficiente di correlazione lineare, commentandolo brevemente.

ESERCIZIO 3

Uno studio sull'efficacia del trattamento con un nuovo antiparassitario, su un campione di 1000 piante di Malus domestica (la comune pianta del melo) coltivate nella pianura del basso veronese, (di cui 500 trattate e 500 no) ha dato i seguenti risultati:

	Nessun parassita	Presenza di parassiti
Trattamento	450	70
Nessun trattamento	155	325

Sulla base dei risultati, si può ritenere efficace il trattamento ovvero esiste una connessione fra il fatto di sottoporre a trattamento una pianta e la presenza o meno di parassiti? (livello di significatività 5%)

Allegato: valori della variabile "Chi Quadrato" che sottendono una coda destra di ammontare alpha

G.d.l.	alpha %							
	99,5	99	97,5	95	5	2,5	1	0,5
1	0,00	0,00	0,00	0,00	3,84	5,02	6,64	7,88
2	0,01	0,02	0,05	0,10	5,99	7,38	9,21	10,60
3	0,07	0,12	0,22	0,35	7,82	9,35	11,35	12,84
4	0,21	0,30	0,48	0,71	9,49	11,14	13,28	14,86
5	0,41	0,55	0,83	1,15	11,07	12,83	15,09	16,75

Matematica e Statistica (F-O, P-Z)

Prova di **STATISTICA (F-O, P-Z) - Di Palma** (23/09/2011)

Università di Verona - Laurea in Biotecnologie - A.A. 2010/11

Cognome-Nome ________________________________ Matr. ______________

IN STAMPATELLO VR ······

**** Attenzione: compiti illeggibili non verranno corretti ! **** ▶▶▶▶ Test a quiz sul retro ▶▶▶▶

Esercizio 1)
Si sono rilevati i giudizi relativi alla qualità delle lezioni di un corso di statistica seguito da 30 studenti, ottenendo le seguenti rilevazioni

Modalità (giudizio)	Ottimo	Buono	Discerto	Sufficiente	Insufficiente	Gravemente insufficiente
Frequenza assoluta	3	5	9	6	4	3

Il candidato

a) Determini la tipologia del carattere.
b) Scelga una rappresentazione grafica idonea.
c) Definisca gli indici di posizione e, se possibile, ne calcoli uno adeguato alla serie.
d) Definisca gli indici di variabilità e, se possibile, ne calcoli uno adeguato alla serie.

Esercizio 2)
I dati descritti nell'Esercizio 1 sono stati caratterizzati considerando il genere dei votanti

		X: giudizi al corso						Tot
		Ottimo	Buono	Discerto	Sufficiente	Insufficiente	Gravemente ins	
Y: genere	Maschi		2	3	3	3		11
	Femmine	1				1		
Tot								

Il candidato

a) completi la tabella con i dati mancanti.
b) indichi e calcoli, se possibile, un opportuno indice di posizione per la serie bivariata
c) indichi e calcoli, se possibile, un opportuno indice di variabilità per la serie bivariata
d) se possibile, verifichi, ad un opportuno livello di significatività, se il genere influenza il voto senza alterare la statistica.

Esercizio 3)
Si consideri la statitistca ricavata da quella descritta nell'Esercizio 1 dove per ogni giudizio sono stati asseganti i seguenti punteggi.

Voto	Ottimo	Buono	Discerto	Sufficiente	Insufficiente	Gravemente insufficiente
Punteggio (p_i)	9	8	7	6	5	4

Il candidato consideri la v.c. P le cui osservazioni sono avvenute secondo le frequenze descritte nell'Esercizio 1 e

a) verifichi, se possibile, mediante un test di ipotesi ad una significatività del 90%, se il valor atteso di P sia è superiore al 7;
b) stimi puntualmente la varianza di P.

Esercizio 4)
Date le sue variabili casuali $X \sim Ber(0.4)$ e $Y \sim Chi(10)$, si considerino i due eventi considerati indipendenti

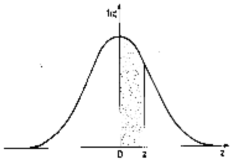
$$E_1 : X = 0 \qquad E_2 : Y < 3.94$$

Il candiato calcoli le probabilità dei seguenti eventi

a) E_1 ed E_2
b) evento E_1 intersezione E_2
c) evento E_2 condizionato E_1
d) evento E_2 unito E_1.

Tavola I

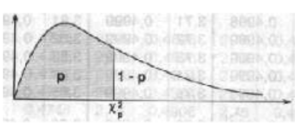
Integrali della variabile casuale normale standardizzata z



z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2517	0.2549
0.7	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4761	0.4767
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
2.1	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4854	0.4857
2.2	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884	0.4887	0.4890
2.3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
2.4	0.4918	0.4920	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936
2.5	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952
2.6	0.4953	0.4955	0.4956	0.4957	0.4959	0.4960	0.4961	0.4962	0.4963	0.4964
2.7	0.4965	0.4966	0.4967	0.4968	0.4969	0.4970	0.4971	0.4972	0.4973	0.4974
2.8	0.4974	0.4975	0.4976	0.4977	0.4977	0.4978	0.4979	0.4979	0.4980	0.4981
2.9	0.4981	0.4982	0.4982	0.4983	0.4984	0.4984	0.4985	0.4985	0.4986	0.4986
3.0	0.4987	0.4987	0.4987	0.4988	0.4988	0.4989	0.4989	0.4989	0.4990	0.4990

Tavola II

Integrali della variabile casuale chi quadrato a v gradi di libertà.



ν \ p	0,005	0,01	0,025	0,05	0,10	0,25	0,50	0,75	0,90	0,95	0,975	0,99	0,995	0,999
1	0,0000	0,0002	0,0010	0,0039	0,0158	0,102	0,455	1.32	2,71	3,84	5.02	6,63	7,88	10,8
2	0,0100	0,0201	0,0506	0,103	0,211	0,575	1,39	2,77	4,61	5,99	7,38	9,21	10,6	13,8
3	0,0717	0,115	0,216	0,352	0,584	1,21	2,37	4,11	6,25	7,81	9,35	11,3	12,8	16,3
4	0,207	0,297	0,484	0,711	1,06	1,92	3,36	5,39	7,78	9,49	11,1	13,3	14,9	18,5
5	0,412	0,554	0,831	1,15	1,61	2.67	4,35	6,63	9.24	11,1	12,8	15,1	16,7	20,5
6	0,676	0,872	1,24	1,64	2,20	3,45	5,35	7,84	10,6	12,6	14,4	16,8	18,5	22,5
7	0,989	1,24	1,69	2,17	2,83	4,25	6,35	9,04	12,0	14.1	16,0	18,5	20,3	24,3
8	1,34	1,65	2,18	2,73	3,49	5,07	7,34	10,2	13,4	15.5	17,5	20,1	22,0	26,1
9	1.73	2,09	2,70	3.33	4,17	5,90	8,34	11,4	14,7	16.9	19,0	21,7	23,6	27,9
10	2.16	2,56	3,25	3,94	4,87	6,74	9,34	12,5	16,0	18,3	20,5	23,2	25,2	29,6
11	2,60	3,05	3,82	4,57	5,58	7,58	10,3	13,7	17,3	19,7	21,9	24,7	26,8	31,3
12	3,07	3,57	4,40	5,23	6,30	8,44	11,3	14,8	18,5	21,0	23,3	26,2	28,3	32,9
13	3,57	4,11	5,01	5,89	7,04	9,30	12,3	16,0	19,8	22,4	24,7	27,7	29,8	34,5
14	4,07	4,66	5,63	6,57	7,79	10,2	13,3	17,1	21,1	23,7	26,1	29,1	31,3	36,1
15	4,60	5,23	6,26	7,26	8,55	11,0	14,3	18,2	22,3	25,0	27,5	30,6	32,8	37,7
16	5,14	5,81	6,91	7,96	9,31	11,9	15,3	19,4	23,5	26,3	28,8	32,0	34,3	39,3
17	5,70	6,41	7,56	8,67	10,1	12,8	16,3	20,5	24,8	27,6	30,2	33,4	35,7	40,8
18	6,26	7,01	8,23	9,39	10,9	13,7	17,3	21,6	26,0	28,9	31,5	34,8	37,2	42,3
19	6,84	7,63	8,91	10,1	11,7	14,6	18,3	22,7	27,2	30,1	32,9	36,2	38,6	43,8
20	7,43	8,26	9,59	10,9	12,4	15,5	19,3	23,8	28,4	31,4	34,2	37,6	40,0	45,3
21	8,03	8,90	10,3	11,6	13,2	16,3	20,3	24,9	29,6	32,7	35,5	38,9	41,4	46,8
22	8,64	9,54	11,0	12,3	14,0	17,2	21,3	26,0	30,8	33,9	36,8	40,3	42,8	48,3
23	9,26	10,2	11,7	13,1	14,8	18,1	22,3	27,1	32,0	35,2	38,1	41,6	44,2	49,7
24	9,89	10,9	12,4	13,8	15,7	19,0	23,3	28,2	33,2	36,4	39,4	43,0	45,6	51,2
25	10,5	11,5	13,1	14,6	16,5	19,9	24,3	29,3	34,4	37,7	40,6	44,3	46,9	52,6
26	11,2	12,2	13,8	15,4	17,3	20,8	25,3	30,4	35,6	38,9	41,9	45,6	48,3	54,1
27	11,8	12,9	14,6	16,2	18,1	21,7	26,3	31,5	36,7	40,1	43,2	47,0	49,6	55,5
28	12,5	13,6	15,3	16,9	18,9	22,7	27,3	32,6	37,9	41,3	44,5	48,3	51,0	56,9
29	13,1	14,3	16,0	17,7	19,8	23,6	28,3	33,7	39,1	42,6	45,7	49,6	52,3	58,3
30	13,8	15,0	16,8	18,5	20,6	24,5	29,3	34,8	40,3	43,8	47,0	50,9	53,7	59,7

Soluzioni

MATEMATICA (A-E, F-O, P-Z)

(1) Il piano Π passante per $A(0,1,0)$, $B(1,2,-2)$ e $C(-1,0,-3)$ sarà parallelo ai vettori $\vec{u} = (1,2,-2)-(0,1,0) = (1,1,-2)$ (quello da A a B) e $\vec{v} = (-1,0,-3)-(0,1,0) = (-1,-1,-3)$ (quello da A a C), dunque una forma parametrica è $\Pi = \{(0,1,0)+s(1,1,-2)+t(-1,-1,-3) : s,t \in \mathbb{R}\} = \{(s-t, 1+s-t, -2s-3t) : s,t \in \mathbb{R}\}$; eliminando i parametri (o usando la nota fomula del piano per tre punti) si ottiene poi la forma cartesiana $x-y+1=0$. La retta r passante per B e ortogonale al piano $x=y$ (cioè $x-y=0$) sarà parallela al vettore $(1,-1,0)$, dunque ha forma parametrica $r = \{(1,2,-2)+t(1,-1,0) : t \in \mathbb{R}\} = \{(1+t, 2-t, -2) : t \in \mathbb{R}\}$; eliminando il parametro si ottiene una forma cartesiana facendo il sistema tra le equazioni $x+y=3$ e $z=-2$. • Il triangolo ABC può essere visto come la metà del parallelogramma generato da $\vec{u}$ (vettore da A a B) e $\vec{v}$ (vettore da A a C): essendo $\vec{v} \wedge \vec{w} = (-5,5,0)$ tale parallelogramma ha area $\|\vec{v} \wedge \vec{w}\| = \sqrt{(-5)^2+(5)^2+(0)^2} = 5\sqrt{2}$, dunque il triangolo ABC ha area $\frac{5}{2}\sqrt{2}$. Notiamo poi che l'angolo θ_A di vertice A è quello individuato dai vettori $\vec{u}$ e $\vec{v}$, dunque si ha la relazione $\cos\theta_A = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|} = \frac{4}{\sqrt{66}} \sim 0{,}5$, da cui $\theta_A = \arccos(\frac{4}{\sqrt{66}})$ (angolo acuto vicino a $\frac{\pi}{3}$).

(2) (Figura 1) La funzione $f(x) = \frac{\sin 2x}{1+\sin x}$ è definita per $\sin x \neq -1$, ovvero $x \neq \frac{3\pi}{2}+2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$; essa è periodica di periodo 2π, e per lo studio converrà allora scegliere l'intervallo $]-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$; non ha parità, ed è derivabile infinite volte nel suo dominio. I limiti interessanti sono $\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}^+} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x\to\frac{3\pi}{2}^-} f(x) = +\infty$. Si ha $f(x)=0$ se e solo se $\sin 2x = 0$, ovvero $2x = k\pi$, dunque nel nostro intervallo in $x=0$, $x=\frac{\pi}{2}$ e $x=\pi$. Nel dominio il denominatore è sempre >0, dunque vale $f(x)>0$ quando $\sin 2x > 0$, il che si ha per $2k\pi < 2x < \pi+2k\pi$, dunque nel nostro caso per $0<x<\frac{\pi}{2}$ o per $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$. Derivando e facendo i conti si ottiene $f'(x) = -\frac{2(\sin^2 x+\sin x-1)}{1+\sin x}$; vale dunque $f'(x)=0$ quando $\sin^2 x+\sin x-1=0$, il che accade quando $\sin x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, dunque per $x = x_1 := \arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2} \sim 0{,}7$ oppure $x = x_2 := \pi - \arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2} \sim 2{,}5$; e $f'(x)>0$ quando $\sin^2 x+\sin x-1<0$, vero quando $\sin x < \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, dunque per $-\frac{\pi}{2} < x < x_1$ oppure per $x_2 < x < \frac{3\pi}{2}$. Ne ricaviamo che x_1 e x_2 sono rispettivamente punti di massimo e minimo locale, con $f(x_1) \sim 0{,}6$ e $f(x_2) = -f(x_1) \sim -0{,}6$. Derivando ulteriormente, a conti fatti si ha $f''(x) = \frac{2(\sin^2 x+2\sin x+2)\cos x}{(1+\sin x)^2}$, dunque $f''(x) \geq 0$ se e solo se $\cos x \geq 0$: pertanto si ha un flesso in $\frac{\pi}{2}$, con $f(\frac{\pi}{2}) = 0$ e $f'(\frac{\pi}{2}) = -1$.

(3) (a) Posto $t = \sin x$ (da cui $dt = \cos x\,dx$) e ricordato che $\sin 2x = 2\sin x\cos x$, vale $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{1+\sin x}\,dx = \int_0^1 \frac{2t}{t+1}\,dt = 2\int_0^1 (1-\frac{1}{t+1})\,dt = 2(t-\log|t+1|]_0^1 = 2((1-\log 2)-(0)) = 2(1-\log 2) \sim 0{,}6$. • Vale $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x(1+\sin x)f(x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin 2x\,dx = (x(-\frac{1}{2}\cos 2x)]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}}(-\frac{1}{2}\cos 2x)\,dx = (\frac{\pi}{4})-(0)+(\frac{1}{4}\sin 2x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4} \sim 0{,}75$.

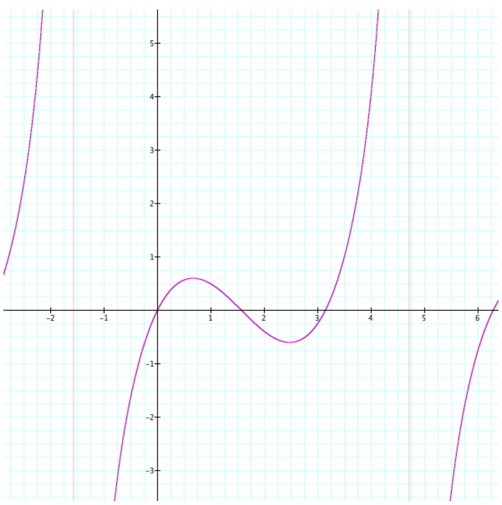
(b) (Figura 2) La zona di piano $S = \{(x,y) : |x-1|-1 \leq y \leq \sqrt{x+2}\,,\ x+y \leq 4\}$ è quella in figura, dunque ha area $\int_{-1}^2 \sqrt{x+2}\,dx + \int_2^3 (4-x)\,dx + \int_3^1 (x-2)\,dx + \int_1^{-1}(-x)\,dx = (\frac{2}{3}(x+2)^{\frac{3}{2}}]_{-1}^2 + (4x-\frac{1}{2}x^2]_2^3 + (\frac{1}{2}x^2-2x]_3^1 + (-\frac{1}{2}x^2]_1^{-1} = (\frac{16}{3})-(\frac{2}{3})+(\frac{15}{2})-(6)+(-\frac{3}{2})-(-\frac{3}{2})+(-\frac{1}{2})-(-\frac{1}{2}) = \frac{37}{6} \sim 6{,}1$.

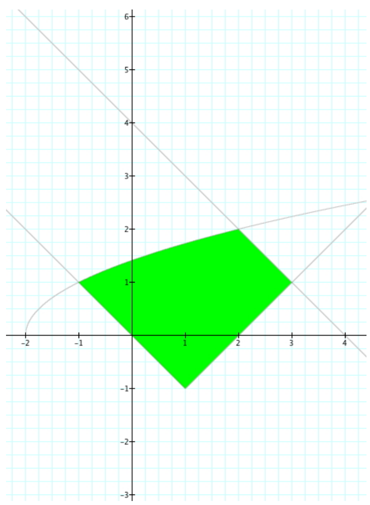
(4) (Figura 3) La funzione $g(x,y) = (x+1)(x^2+y^2-2x-7)$ ha come dominio tutto il piano $\mathbb{R}^2$, ed è differenziabile perché le sue derivate parziali $\frac{\partial g}{\partial x} = 3x^2+y^2-2x-9$ e $\frac{\partial g}{\partial y} = 2(x+1)y$ sono evidentemente continue. Si ha $g(x,y)=0$ sui punti della circonferenza $x^2+y^2-2x-7=0$ (centro $(1,0)$ e raggio $2\sqrt{2}$) e della retta verticale $x=-1$. Il fattore $x+1$ è positivo a destra della retta $x=-1$ e negativo a sinistra, il fattore x^2+y^2-2x-7 è positivo all'esterno della circonferenza e negativo all'interno, e il segno di g ne segue per prodotto. L'unico limite interessante è quello in ∞_2, che non esiste: infatti tendendovi lungo la retta $x=-1$ la funzione è nulla, mentre ad esempio tendendovi lungo l'asse y la funzione tende a $+\infty$. Dal sistema $\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial y} = 0$ si ricavano i punti stazionari $P(-1,2)$, $Q(-1,-2)$, $A(0, \frac{2\sqrt{7}+1}{3})$ e $B(0, -\frac{2\sqrt{7}-1}{3})$; la matrice hessiana è $\mathsf{H}_g(x,y) = \begin{pmatrix} 6x-2 & 2y \\ 2y & 2(x+1) \end{pmatrix}$: essendo $\mathsf{H}_g(P) = \begin{pmatrix} -8 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathsf{H}_g(Q) = \begin{pmatrix} -8 & -4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathsf{H}_g(A) = \begin{pmatrix} 4\sqrt{7} & 0 \\ 0 & \frac{4(\sqrt{7}+2)}{3} \end{pmatrix}$ e $\mathsf{H}_g(B) = \begin{pmatrix} -4\sqrt{7} & 0 \\ 0 & -\frac{4(\sqrt{7}-2)}{3} \end{pmatrix}$, il relativo criterio dice che P e Q sono punti di sella, A è di minimo locale e B di massimo locale.

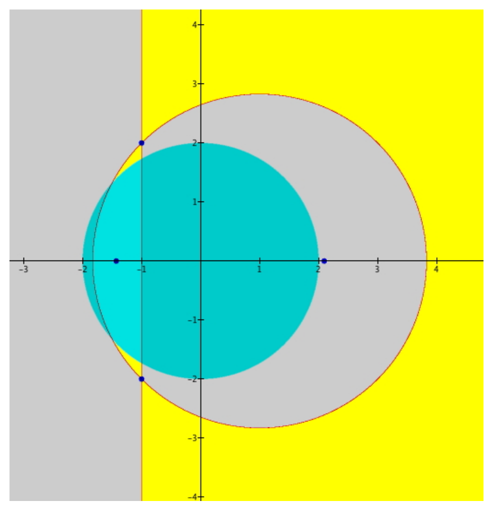
(b) (Figura 3) Per la ricerca degli estremi assoluti di g su $\mathcal{D}$ (che esistono in base a Weierstrass) dividiamo $\mathcal{D}$ nelle zone $\mathcal{D}_0$ dei suoi punti interni e $\mathcal{D}_1$ della sua circonferenza bordo. • Se massimo o minimo assoluti fossero assunti in un punto di $\mathcal{D}_0$, tale punto dovrebbe essere in particolare stazionario per g: come visto prima i soli punti stazionari sono P, Q, A e B, e (dopo un'attenta verifica delle distanza dall'origine) l'unico punto che giace in $\mathcal{D}_0$ è $B(0, -\frac{2\sqrt{7}-1}{3})$, che va dunque tenuto presente. • Sulla circonferenza $\mathcal{D}_1$, descritta come $(2\cos\theta, 2\sin\theta)$

al variare di $\theta \in [-\pi, \pi]$, la funzione vale $\varphi_1(\theta) := g(2\cos\theta, 2\sin\theta) = -(2\cos\theta + 1)(4\cos\theta + 3)$ con $-\pi < \theta < \pi$. Se massimo o minimo assoluti fossero assunti in un punto di $\mathcal{T}_1$, in tale punto dovrebbe annullarsi la derivata $\varphi_1(\theta) = -(-2\sin\theta(4\cos\theta + 3) - 4\sin\theta(2\cos\theta + 1)) = 2\sin\theta(8\cos\theta + 5)$: ciò avviene quando $\sin\theta = 0$ (cioè per $\theta = 0$ e $\theta = \pi$) o quando $\cos\theta = -\frac{5}{8}$ (cioè per $\theta = \mp\arccos(-\frac{5}{8})$), che danno luogo ai punti $C(-2, 0)$, $D(2, 0)$, $E(-\frac{5}{4}, \frac{\sqrt{39}}{4})$ e $F(-\frac{5}{4}, -\frac{\sqrt{39}}{4})$. • Gli estremi assoluti di g su $\mathcal{D}$ potranno dunque assunti solo nell'ambito dei cinque punti B, C, D, E, F: poiché $g(B) = \frac{16}{27}(7\sqrt{7} - 17) \sim 0{,}9$, $g(C) = -1$, $g(D) = -21$ e $g(E) = g(F) = \frac{1}{8} \sim 0{,}1$, si può concludere che il massimo assoluto di g su $\mathcal{D}$ è $\frac{16}{27}(7\sqrt{7} - 17)$ (assunto in B) e il minimo è -21 (in D).

(5) L'equazione differenziale $y'' + y = x^2 - 4e^x$ è del secondo ordine, lineare a coefficienti costanti. L'equazione caratteristica $t^2 + 1 = 0$ ha soluzioni $t = \mp i$, dunque lo spazio di soluzioni dell'equazione omogenea associata è $y(x) = A\cos x + B\sin x$ al variare di $A, B \in \mathbb{R}$. Una soluzione particolare per la completa con x^2 avrà la forma $\tilde{y}_1(x) = ax^2 + bx + c$, e il calcolo dà $(a, b, c) = (1, 0, -2)$; una soluzione particolare per la completa con $-4e^x$ avrà la forma $\tilde{y}_2(x) = ce^x$, e il calcolo dà $c = -2$; dunque lo spazio di soluzioni dell'equazione completa è $y(x) = A\cos x + B\sin x + x^2 - 2 - 2e^x$ al variare di $A, B \in \mathbb{R}$. • L'equazione differenziale $(x+2)y' + (x-1)y^2 = 0$ è del primo ordine a variabili separabili. Dopo aver notato che la costante $y \equiv 0$ è soluzione, separando le variabili e integrando si ottiene $\int(-\frac{1}{y^2})\,dy = \int \frac{x-1}{x+2}\,dx$ ovvero $\frac{1}{y} = x - 3\log|x+2| + k$, ovvero $y(x) = \frac{1}{x-3\log|x+2|+k}$ al variare di $k \in \mathbb{R}$. • Imponendo che $y(0) = -1$ e $y'(0) = \frac{1}{2}$ nella prima famiglia di soluzioni si ottiene $(A, B) = (3, \frac{5}{2})$, ovvero l'unica soluzione $y(x) = 3\cos x + \frac{5}{2}\sin x + x^2 - 2 - 2e^x$. Quanto alla seconda famiglia, chiedendo che $y(0) = -1$ si ottiene $k = 3\log 2 - 1$; essendo poi in generale $y' = -\frac{x-1}{x+2}y^2$, nel nostro caso si ricava $y'(0) = -\frac{0-1}{0+2}y(0)^2 = \frac{1}{2}$ e dunque, anche se un po' fortunosamente, la soluzione con $k = 3\log 2 - 1$ (ovvero $y(x) = \frac{1}{x-3\log|\frac{x}{2}+1|-1}$) soddisfa ai requisiti richiesti.







1. Il grafico della funzione dell'ex. 2. **2.** L'insieme dell'ex. (3.b). **3.** Ex. 4: zeri (rosso), segno positivo (giallo) e negativo (grigio) della funzione g. Il disco $\mathcal{D}$ (azzurro). Si notano anche i quattro punti stazionari (blu).

ESERCIZIO 1

Sulla distribuzione di frequenze presentata in tabella, calcolare:
a) le medie potenziate di ordine r = -1, r = 0 e r = 1, indicandone anche il nome;
b) la mediana e la moda, dandone una breve definizione;
c) il primo, il secondo e il terzo quartile.

x	f	x*f	f/x	ln(x)	ln(x)*f
3	25	75	8	1,0986	27,4653
6	63	378	11	1,7918	112,8808
8	38	304	5	2,0794	79,0188
11	74	814	7	2,3979	177,4443
	200	**1571**	**30**	**7,3677**	**396,8092**

a) le medie potenziate di ordine r = -1, r = 0 e r = 1, indicandone anche il nome:

Ma(X) = $\frac{\Sigma f}{\Sigma f/x} = \frac{200}{30} =$ **6,5984** r = -1

ln(Mg(X))= $\frac{\Sigma \ln(x) * f}{\Sigma f} = \frac{396,8092}{200} =$ **1,9840** **Mg(X)** = $e^{1,984} =$ **7,2721** r = 0

M(X) = $\frac{\Sigma x * f}{\Sigma f} = \frac{1571}{200} =$ **7,8550** r = 1

La media potenziata di ordine r = -1 è la media armonica.
La media potenziata di ordine r = 0 corrisponde alla media geometrica.
La media potenziata di ordine r = 1 è la media aritmetica.

b) Calcolo della mediana e della moda:

x100°=< mediana =<x101°: **me = 8** E' il valore che si trova a metà della distribuzione ordinata dei valori.

moda = **11** E' il valore che presenta la frequenza maggiore.

c) Calcolo del primo, del secondo e del terzo quartile:

Q1 = X 50°= **6**

Q2 = X 100°= **8 = mediana**

Q3 = X 150°= **11**

ESERCIZIO 2

X	Y	X * Y	X^2	Y^2
1	15	15	1	225
6	25	150	36	625
8	29	232	64	841
9	31	279	81	961
24	**100**	**676**	**182**	**2652**

Sui dati presentati in tabella calcolare:
a) i parametri della retta interpolante Y'=a+bX ;
b) il coefficiente di correlazione lineare, commentandolo brevemente.

a) Calcolo dei parametri della retta interpolante Y'=a+bX :

Calcolo attraverso le formule dirette (ma si poteva anche sviluppare il sistema):

$$b = \frac{Cov(X;Y)}{V(X)} \qquad a = M(Y) - bM(X)$$

$$M(X) = \frac{24}{4} = \mathbf{6}$$

$$M(Y) = \frac{100}{4} = \mathbf{25}$$

$$Cov(X;Y) = M(X*Y) - M(X)*M(Y) = \frac{676}{4} - 6 * 25 = \mathbf{19}$$

$$V(X) = M(X^2) - M(X)^2 = \frac{182}{4} - 6\text{^}2 = \mathbf{9{,}5}$$

$$\mathbf{b} = \frac{Cov(X;Y)}{V(X)} = \frac{19}{9{,}5} = \mathbf{2}$$

$$\mathbf{a} = M(Y) - bM(X) = 25 - (2)*6 = \mathbf{13}$$

b) Calcolo del coefficiente di correlazione lineare e suo breve commento:

$$r = \frac{Cov(X;Y)}{\sigma(X)\,\sigma(Y)}$$

$$V(Y) = \frac{2652}{4} - 25\text{^}2 = \mathbf{38}$$

$$\sigma(Y) = RADQ(38) = \mathbf{6{,}1644}$$

$$\sigma(X) = RADQ(9{,}5) = \mathbf{3{,}0822}$$

$$\mathbf{r} = \frac{19}{6{,}1644 * 3{,}0822} = \mathbf{1}$$

Si registra una perfetta relazione lineare diretta

ESERCIZIO 3

Uno studio sull'efficacia del trattamento con un nuovo antiparassitario su un campione di 1000 piante di *Malus domestica* (la comune pianta del melo) coltivate nella pianura del basso veronese (di cui 500 trattate e 500 no) ha dato i seguenti risultati:

Modalità	**Nessun parassita**	**Presenza di parassiti**
Trattamento	450	70
Nessun trattamento	155	325

Sulla base dei risultati, si può ritenere efficace il trattamento ovvero esiste una connessione fra il fatto di sottoporre a trattamento una pianta e la presenza o meno di parassiti? (livello di significatività 5%)

Si effettua il test di indipendenza sui risultati della tabella a doppia entrata:

Frequenze osservate f:

f	**Nessun parassita**	**Presenza di parassiti**	
Trattamento	450	70	**520**
Nessun trattamento	155	325	**480**
	605	**395**	**1000**

Calcolo delle frequenze teoriche f* sulla base delle frequenze marginali (somme di riga * colonna divise per il totale):

f*	**Nessun parassita**	**Presenza di parassiti**	
Trattamento	314,6	205,4	**520**
Nessun trattamento	290,4	189,6	**480**
	605	**395**	**1000**

f	**f***	**$(f-f^*)^2/f^*$**
450	314,6	58,2745
70	205,4	89,2559
155	290,4	63,1307
325	189,6	96,6939
		307,3550

Chi quadrato calcolato = 307,355

Calcolo del Chi quadrato teorico con $\nu = (r-1)*(c-1) = (2-1)*(2-1) = 1$ g.d.l.

Dalla tabella del Chi quadrato, a livello di significatività alpha dell'5% e con 1 g.d.l., risulta un valore teorico di **3,84**

Poiché il Chi quadrato calcolato è nettamente maggiore del Chi quadrato teorico, si rifiuta l'ipotesi di indipendenza e si conferma la presenza di una connessione fra trattamento e presenza o meno di parassiti.

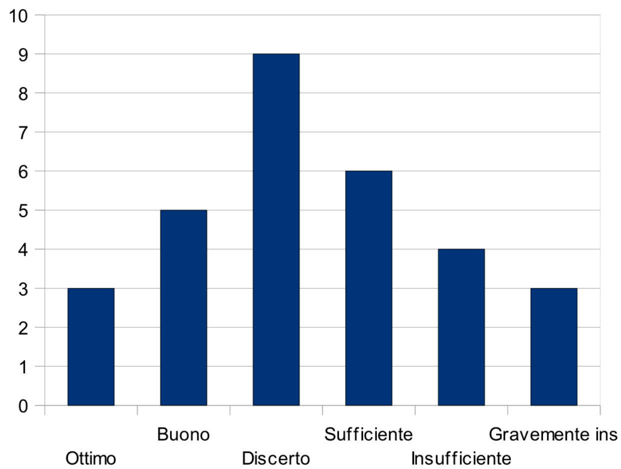
Esercizio 1)

a) Determini la tipologia del carattere.

Il carattere è di tipo qualitativo (in quanto espresso da giudizio) ordinabile (in quanto è possibile dare un ordine alle modalità).

b) Se possibile, tracci una rappresentazione adeguata.

Essendo il dato qualitativo solo alcune rappresentazioni grafiche sono possibili. Una rappresentazione efficace per dati ordinabili è il diagramma a barre. Questo diagramma si rappresenta inserendo dei rettangoli (barre) nel primo quadrante di un piano catesiano in cui nell'asse delle ascisse sono riportate le modalità mentre in quello dello ordinate le frequenze (relative o assolute). I diversi rettangoli sono posti in corrispondenza delle varie modalità ottenendo un diagramma come quello riportato a lato.



c*) Definisca gli indici di posizione e, se possibile, ne calcoli uno adeguato alla serie..*

Gli indici di posizione sono tre: la media (ricavata dalla sequente formula $\bar{o}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} o_i=3$), la mediana (ovvero l'osservazione che bipartisce le osservazioni ordinate) e la moda (ovvero l'osservazione con frequenza più elevata).

Per questa serie l'unico indice non calcolabile è la media. Gli altri indici sono

- Moda = Disceto (la frequenza assoluta è la maggiore 9)
- Mediana = Discerto (Poiche vi sono 30 ossevazioni la mediana è la media fra la *15*^{a} e la *16*^{a} osservazione. Poichè esse coincidono con la modalità "Discreto" esse coincidono con la mediana.)

d) Definisca gli indici di variabilità e, se possibile, ne calcoli uno adeguato alla serie.

Gli indici di variabilità indicano quanto le osservazioni si discostino dal valor centrale.
Nel corso sono stati illustrati i seguenti indici.

- Il campo di variazione: l'osservazione massima meno l'osservazione minima
- La distanza interquartile: la differenze fra il terzo ed il primo quartile
- Lo scato quadratico medio (σ): radice quadrata della media degli scarti dalla media

In questo caso nessun indice è calcolabile.

Esercizio 2)

a) Completi la tabella con i dati mancanti.

La tabella si completa tenendo conto dei totali di colonna sono dati all punto 1e che il numero totale della osservazioni deve essere 30. Le frequenze assolute teoriche sono riportate nella tabella seguente (numeri non tra parentesi).

		X: giudizi al corso						Tot
		Ottimo	Buono	Discerto	Sufficiente	Insufficiente	Gravemente ins	
Y: genere	Maschile	2 (8/5)	2 (8/3)	3 (24/5)	3 (16/5)	3 (36/15)	3 (8/5)	16
	Femminile	1 (7/5)	3 (7/3)	6 (21/5)	3 (14/5)	1 (28/15)	0 (8/5)	14
Tot		3	5	9	6	4	3	30

b) Se possibile, indichi e calcoli per la serie ottenuta un opportuno indice di posizione

Una serie bivariata ottenuta misurando almeno un carattere qualitativo non ordinabile ammette un solo indice sintetico di posizione: la moda. La moda di una bi-variata si ottiene valutando la o le modalità della serie corrispondenti alla frequenza (assoluta o relativa) maggiore. Nel caso in esame la frequenza assoluta maggiore è 6 cui corrisponde la modalità (Discreto; Femminile)

c) Se possibile, indichi e calcoli per la serie ottenuta un opportuno indice di variabilità

Una serie bivariata ottenuta misurando almeno un carattere qualitativio non ordinabile non ammette indice sintetici di variabilità in quanto non è possibile ottenere il concetto di distanza in maniera oggettiva.

d) Se possibile, verifichi, ad un opportuno livello di significatività, se il genere influenza il voto senza alterare la statistica.

Nel caso il genere non influenzi il voto, vorrebbe dire che le due variabili sono scorrelate, pertanto un buom modo per vedere se vi sia un legame fra le variabili e verificarne la dipendenza mediante un test di indipendenza. Il test viene fatto sfruttando la distribuzione limite dello stimatore di Pizzetti Pearson che viene ad essere un chi quadrato avente gradi di libertà pari a quelli del numero di parametri liberi della distribuzione teorica. Il primo punto di questa procedura consiste nel calcolo delle frequenze teoriche ricavate dalle frequenze marginali ottenute orlando la tabella delle frequenze .

$$\hat{n}_{i,j} = n\,\hat{p}_{i,j} = \frac{n_{i,+}\,n_{+,j}}{n} \qquad \forall\, i, j$$

le frequenze teoriche sono state inserite fra parentesi nella tabella riportata al punto a).
A questo punto è possibile valutare la convergenza dello stimatore di Pizzetti Pearson, possibile solo se tutte le frequenze teoriche sono superiori a 5. Constatato che questa non è verificata si può conludere che non è possibile verificare l'indipendenza senza alterare la statistica.

Esercizio 3)

Nel risolvere questo esercizio si ipotizza che il voto espresso dagli studenti sia modellabile mediante una V.C. *X* da cui sono state effettuate diverse estrazioni i.i.d. .
a) verifichi, se possibile, mediante un test di ipotesi ad una significatività del 90%, se il valor atteso di P sia è superiore al 7;
Il punto richiede di verificare l'ipotesi alternativa H_1: E[*P*]>7 contro l'ipotesi H_0: E[*P*]=7. La verifica di quest'ipotesi può essere realizzata, utilizzando gli strumenti forniti nel corso, solo se la dimensione del campione è pari o superiore a 30. Verificata questa ipotesi si procede al calcolo della media e della varianza campionaria (stimatori puntuali rispettiavemente di valore atteso e varianza). I conti sono riporati nella tabella seguente

$$\bar{p} = \sum_{i=1}^{6} f_i\,p_i = 6.6 \qquad s^2 = \sigma^2 \frac{n}{n-1} = \frac{n}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{6} f_i\,p_i^2 - \bar{p}^2\right) = \frac{30}{29}\left(45.6 - 6.6^2\right) = 2.11$$

p_i	9	8	7	6	5	4	Tot
n_i	3	5	9	6	4	3	30
f_i	1/10	1/6	3/10	1/5	2/15	1/10	
$v_i f_i$	3/10	4/3	21/10	6/5	2/3	2/5	6.6
p^2_i	81	64	49	36	25	16	
$p^2_i f_i$	81/10	20/3	147/10	36/5	8/3	6/5	45.6

Noti questi valori è possibile standardizzare il valore di riferimento (7) ottenendo

$$z_7 = \frac{7-\bar{p}}{\sqrt{\frac{s^2}{n}}} = \frac{7-6.6}{\sqrt{\frac{2.11}{30}}} = 1.5$$

Questo valore va confrontato con la ragione di accettazione del test. Trattandosi di un test ad una coda con un intervallo di signinficatività pari al 90% essa è pari a *A* = *[-∞; 1.28]*. Poiche il valore è esterno alla regione di accettazione possiamo considerare buona l'ipotesi alternativa.

b) stimi puntualmente la varianza della concentrazione dell'acqua borica fornita
Una stima puntale corretta della varianza di una V.C. mediante osservazioni i.i.d. può essere ottenuta mediante la varianza campionaria s^2 ottenuta al punto precedente. Pertanto la stima richiest è $Var[P]= 2.11$

Esercizio 4)

a) E_1 ed E_2

L'evento E_1 si verifica quando una v.c. Bernoulliana avente p=0.4 vale 0. Poichè il parametro p indica la probabilità che la v.c. ha valore 1 si ha che

$$P(E_1) = 1 - P(\overline{E}_1) = 1- P(X=1) = 1- p = 0.6$$

La probabilità dell'evento E2 è ottenibile direttamente dalle tavole dei Chi quadrato. Infatti condsiderando un Chi quadrato a 10 gradi di libertà si ha che in corrispondenza del valore 3.94 l'area sottesa dalla curva della d.d.p. vale 0.05. Pertanto si ha che

$$P(E_2)=P(Y<3.94)=\int_0^{3.94} f(y)dy=0.05$$

b) Il candiato calcoli Probabilità dell'evento E_1 intersezione E_2.

La probabilità dell'evento intersezione di due eventi (ovvero che i due eventi si verifichino entrambi) indipendenti è pari al prodotto delle probabilità.

$$P(E_1 \cap E_2)=P(E_1)P(E_2)=0.6*0.05=0.03$$

c) Il candiato calcoli Probabilità dell'evento E_2 condizionato E_1

Applicando la defınzione di probabilità condizionata si ha che:

$$P(E_2|E_1)=P\frac{(E_1\cap E_2)}{P(E_1)}=\frac{0.03}{0.6}=0.05$$

d) Il candiato calcoli la Probabilità dell'evento E_1 unito E_2..

Note le probabilità degli eventi elementari e dell'evento intersezione si ha che

$$P(E_1\cup E_2)=P(E_1)+P(E_2)-P(E_1\cap E_2)=0.6+0.05-0.03=0.62$$