Prof. Francesca Mantese
Università di Verona, 2018/2019
Corso di Laurea in Matematica Applicata

# Esercizi per il Corso di

## ALGEBRA LINEARE ED ELEMENTI DI GEOMETRIA

**Foglio 6**
15 Dicembre 2018

1. Sia $V$ uno spazio vettoriale di dimensione 5, e sia $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ una base di $V$. Sia $V_1$ il sottospazio generato dai vettori $\{v_1, v_2 - v_1\}$ e $V_2$ il sottospazio generato da $\{v_3, 2v_4 + v_3, v_5 + v_3\}$. Si dimostri che $V = V_1 + V_2$. Si trovino le dimensioni di $V_1$, di $V_2$ e di $V_1 \cap V_2$.

*(6 punti)*

2. Per ogni $\alpha \in \mathbb{C}$ si consideri la funzione $f_\alpha : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ definita da

$$[x,\ y,\ z]^T = [x + y + z,\ x - y + \alpha,\ (\alpha - 1)z]^T$$

   (a) per quali valori di $\alpha \in \mathbb{C}$, $f_\alpha$ è un'applicazione lineare?
   (b) per tali valori determinare $\ker f_\alpha$ e l'immagine di $f_\alpha$
   (c) per tali valori, trovare tutti gli elementi $v \in \mathbb{C}^3$ tali che $f_\alpha(v) = [-1,\ 1,\ 1]^T$

*(6 punti)*

3. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definita da $[x,\ y,\ z,\ t]^T \longmapsto [x + 2y - z + t,\ y - x + 2z,\ x - z - t]^T$.

   (a) Provare che $f$ è un'applicazione lineare.
   (b) Determinare una base e la dimensione di $\ker f$ e dell'immagine di $f$.
   (c) $v = [1 \quad 0 \quad -1 \quad -1]^T$ è un elemento di $\ker f$?
   (d) $w = [1 \quad 2 \quad 1]^T$ è un elemento dell'immagine di $f$?

*(6 punti)*

4. Si consideri l'applicazione lineare $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ definita da $T(x, y, z)^T = \begin{bmatrix} x & 0 \\ z - y & -x \end{bmatrix}$.

   (a) Determinare una base di $\mathrm{Ker}T$ e dell'immagine di $T$.
   (b) Data la matrice $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$, trovare tutti gli elementi $v \in \mathbb{R}^3$ tali che $T(v) = B$. La matrice $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ appartiene all'immagine di $T$?

*(6 punti)*

5. Si consideri l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definita da $v \longmapsto Av$, dove $A$ è la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

   (a) Si trovino l'immagine $Im(f)$ e il nucleo $Ker(f)$ di $f$, e per ciascuno dei due sottospazi si trovi una base.

   (b) Si completino tali base a una base di $\mathbb{R}^3$ e di $\mathbb{R}^4$, rispettivamente.

*(6 punti)*

**Consegna: Venerdì 21 Dicembre**