

EX 1 file A

Analisi Matematica II

$$i) \text{ Sia } f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)^3 \operatorname{arctan}^2\left(\frac{y}{x}\right) & \text{se } x \neq 0 \\ y & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

ii) Studiare la continuità di f in $(0,0)$ giustificando ogni risposta.
Definire la continuità di un campo scalare in un punto.

Ris

ii) Sia $f: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in A$

se x_0 è un punto isolato di $A \Rightarrow f$ è continua in x_0

se x_0 è di accumulazione per $A \Rightarrow f$ è continua in x_0 se

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

i) f è definita in \mathbb{R}^2 , f è continua in $A \setminus \{x=0\}$

$(0,0)$ è di accumulazione per A

Calcolo f sull'asse y $f|_{x=0}(x,y) = 0 \Rightarrow$ il limite, se \exists , vale 0.

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = l \iff \lim_{\rho \rightarrow 0} \sup_{\theta \in [0, 2\pi]} |f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) - l| = 0$$

Passo in coordinate polari di centro $(0,0)$

$$|f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)| = |(\rho^2)^3 \operatorname{atn}^2\left(\frac{\rho \sin \theta}{\rho \cos \theta}\right)| = \rho^6 |(\operatorname{atn}(\operatorname{tg} \theta))^2| = \rho^6 |\theta|^2 \leq (2\pi)^2 \rho^6$$

$$\sup_{\theta \in [0, 2\pi]} |f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) - 0| = \max_{\theta \in [0, 2\pi]} |f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)| = (2\pi)^2 \rho^6$$

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \sup_{\theta \in [0, 2\pi]} |f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) - 0| = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$$

$\Rightarrow f$ è continua in $(0,0)$.