NOTE SULLA DIFFERENZIAZIONE DI FUNZIONI A VALORI VETTORIALI

MARCO CALIARI AND ANTONIO MARIGONDA

1. Operazioni tra matrici

Definizione 1.1 (Simbolo di Kronecker). Siano $i_1, \dots, i_n \in \mathbb{N}$. Il *simbolo di Kronecker* è definito da

$$\delta_{i_1 \dots i_n} = \begin{cases} 1, & \text{se } i_1 = \dots = i_n \\ 0, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Definizione 1.2 (Prodotto scalare). Siano $v, w \in \mathbb{R}^n$, $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$. Definiamo il *prodotto scalare* di v e w ponendo

$$\boxed{\langle v, w \rangle = \sum_{i=1}^{n} v_i w_i = \langle w, v \rangle}$$

Scriveremo anche $v \cdot w$ per indicare il prodotto scalare di v e w.

Definizione 1.3 (Base canonica). Indichiamo con $\{e_i : i = 1, \dots, n\}$ la base canonica di $\mathbb{R}^n$, ovvero e_i è una n-upla di numeri reali tutti nulli, ad eccezione dell'i-esimo elemento, che vale 1, o anche

$$e_i = \begin{pmatrix} \delta_{1i} \\ \vdots \\ \delta_{ni} \end{pmatrix}$$

Definizione 1.4. Sia $A \in \mathrm{Mat}_{n\times m}(\mathbb{R})$ una matrice a n righe e m colonne a coefficienti reali. Indicato con $a_{ij} \in \mathbb{R}$ l'elemento alla riga i e alla colonna j con $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$, useremo le seguenti notazioni

$$A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,m}} = \sum_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,m}} a_{ij}\, e_i \otimes e_j.$$

Definiamo:

(1) il **prodotto di matrici** (o prodotto *righe per colonne*): date due matrici $A \in \mathrm{Mat}_{n\times m}(\mathbb{R})$, $B \in \mathrm{Mat}_{m\times p}(\mathbb{R})$, $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,m}}$, $B = (b_{kh})_{\substack{k=1,\dots,m \\ h=1,\dots,p}}$, si ha che $AB \in \mathrm{Mat}_{n\times p}(\mathbb{R})$ è definito da

$$AB = \sum_{\substack{i=1,\dots,n \\ h=1,\dots,p}} \left(\sum_{q=1}^{m} a_{iq} b_{qh} \right) e_i \otimes e_h,$$

equivalentemente, $C = AB = (c_{ih})_{\substack{i=1,\dots,n \\ h=1,\dots,p}}$, è definita da

$$c_{ih} = \sum_{q=1}^{m} a_{iq} b_{qh},$$

quindi l'elemento di riga i e colonna h di AB è il prodotto scalare della i-esima riga di A (che possiede m elementi) con la h-esima colonna di B (che possiede anch'essa m elementi). È importante osservare che
- per definire il prodotto righe per colonne il numero di colonne della prima matrice deve essere lo stesso del numero di righe della seconda;
- in generale, date $A, B \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$, si ha $AB \neq BA$.

(2) il **prodotto di Hadamard** (o prodotto *entrata per entrata*): date due matrici $A, B \in \mathrm{Mat}_{n\times m}(\mathbb{R})$ $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,n\\ j=1,\dots,m}}$, $B = (b_{ij})_{\substack{i=1,\dots,n\\ j=1,\dots,m}}$, si ha che $A \circ_H B \in \mathrm{Mat}_{n\times m}(\mathbb{R})$ è definito da

$$A \circ_H B = \sum_{\substack{i=1,\dots,n\\ j=1,\dots,m}} a_{ij}b_{ij}\, e_i \otimes e_j,$$

equivalentemente, $C = A \circ_H B = (c_{ij})_{\substack{i=1,\dots,n\\ j=1,\dots,m}}$, è definita da

$$c_{ij} = a_{ij}b_{ij},$$

quindi l'elemento di riga i e colonna h di $A \circ_H B$ è il prodotto tra gli elementi di A e B posti entrambi alla i-esima riga e alla h-esima colonna di B (che possiede anch'essa m elementi). È importante osservare che
- per definire il prodotto di Hadamard le due matrici devono avere lo stesso numero di righe e lo stesso numero di colonne;
- il prodotto di Hadamard è commutativo: date due matrici $A, B \in \mathrm{Mat}_{n\times m}(\mathbb{R})$, si ha $A \circ_H B = B \circ_H A$.

(3) il **prodotto di Kronecker** (o prodotto *tensoriale* di matrici): date due matrici $A \in \mathrm{Mat}_{n\times m}(\mathbb{R})$, $B \in \mathrm{Mat}_{p\times q}(\mathbb{R})$, $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,n\\ j=1,\dots,m}}$, $B = (b_{hk})_{\substack{h=1,\dots,p\\ k=1,\dots,q}}$, si ha che $AB \in \mathrm{Mat}_{np\times mq}(\mathbb{R})$ è definito dalla matrice a blocchi

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & \dots & a_{1m}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}B & \dots & a_{nm}B \end{pmatrix},$$

ovvero posto $C = A \otimes B = (c_{rs})_{\substack{r=1,\dots,np\\ s=1,\dots,mq}}$, si ha

$$c_{p(i-1)+h,q(j-1)+k} = a_{ij}b_{hk}$$

ovvero

$$A \otimes B = \sum_{\substack{i=1,\dots,n\\ j=1,\dots,m\\ h=1,\dots,p\\ k=1,\dots,q}} a_{ij}b_{hk}\; e_{p(i-1)+h} \otimes e_{q(j-1)+k}.$$

È importante osservare che
- il prodotto di Kronecker può essere definito tra matrici qualsiasi;
- in generale, date due matrici $A \in \mathrm{Mat}_{n\times m}(\mathbb{R})$, $B \in \mathrm{Mat}_{m\times p}(\mathbb{R})$, si ha $A \otimes B \neq B \otimes A$.

Definizione 1.5 (Trasposta di una matrice)**.** Data $S = (s_{kh})_{\substack{k=1,\dots,q\\ h=1,\dots,p}} \in \mathrm{Mat}_{q\times p}(\mathbb{R})$, la matrice trasposta di S è $S^T \in \mathrm{Mat}_{p\times q}(\mathbb{R})$, definita da $S^T = (c_{hk})_{\substack{h=1,\dots,n\\ k=1,\dots,m}}$, con $c_{hk} = s_{kh}$ per ogni $h = 1, \dots, p$, $k = 1, \dots, q$.

Osservazione 1.6. Un vettore $v \in \mathbb{R}^n$, $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$, verrà sistematicamente identificato con la matrice $A = (a_{i1})_{i=1,\dots,n} \in \mathrm{Mat}_{n\times 1}(\mathbb{R})$ definita da $a_{i1} = v_i$, $i = 1, \dots, n$, pertanto dati $v, w \in \mathbb{R}^n$, si ha

$$\boxed{\langle v, w\rangle = w^T v = v^T w}$$

Proposizione 1.7. *Siano*

$$A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m\\ j=1,\dots,n}} \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{R}), \qquad v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \dots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n, \qquad w = \begin{pmatrix} w_1 \\ \dots \\ w_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m.$$

Allora si ha

$$\boxed{\langle \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_m \end{pmatrix}, A \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \rangle = \langle (w_1, \dots, w_m)A, \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \rangle = \langle A^T \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_m \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \rangle}$$

ovvero

$$\boxed{\langle w, Av\rangle = \langle w^T A, v\rangle = \langle A^T w, v\rangle}$$

dove in generale

Dimostrazione. In generale, posto $B = (b_{ij})_{\substack{i=1,\dots,p\\ j=1,\dots,q}} \in \mathrm{Mat}_{p\times q}(\mathbb{R})$ si ha

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_p \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_q \end{pmatrix},$$

se e solo se $z_i = \sum_{j=1}^{q} b_{ij} v_j$ per ogni $i = 1, \dots, p$, quindi

$$\langle w, Av\rangle = \langle w, z\rangle = \sum_{\substack{i=1,\dots,m\\ j=1,\dots,n}} w_i a_{ij} v_j = \sum_{j=1}^{n} \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{m} w_i a_{ij}\right)}_{j\text{-esima componente di } wA} v_j = \langle wA, v\rangle$$

$$= \sum_{\substack{k=1,\dots,m\\ h=1,\dots,n}} a_{kh} w_k v_h = \sum_{h=1}^{n} \underbrace{\left(\sum_{k=1,\dots,m} c_{hk} w_k\right)}_{h\text{-esima componente di } A^T w} v_h = \langle A^T w, v\rangle$$

□

Osservazione 1.8 (Matrici elementari). Osserviamo che se e_r è l'r-esimo vettore della base canonica di $\mathbb{R}^n$ ed $\hat{e}_s$ è l's-esimo vettore della base canonica di $\mathbb{R}^m$, identificato e_r con una matrice $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,n\\ j=1}} \in \mathrm{Mat}_{n\times 1}(\mathbb{R})$, ovvero con una colonna e n righe, e similmente $\hat{e}_s^T$ con una matrice $B = (b_{hk})_{\substack{h=1\\ k=1,\dots,m}} \in \mathrm{Mat}_{1\times m}(\mathbb{R})$ con una riga e m colonne. A questo punto, eseguendo il prodotto di Kronecker $A \otimes B = e_r \otimes \hat{e}_s{}^T$ si ha che è una matrice $e_r \otimes \hat{e}_s^T \in \mathrm{Mat}_{n\times m}(\mathbb{R})$. Le entrate di tale matrice sono tutti nulle ad eccezione dell'elemento nella riga r e nella colonna s che è uguale a 1, infatti utilizzando la formula precedentemente data con $m = j = 1$, $p = h = 1$, si ha

$$c_{ik} = a_{i1} b_{1k},$$

e quindi $c_{ik} = 0$ per $i \neq r$ oppure $k \neq s$, e $c_{rs} = 1$. Le matrici $E(r, s) := e_r \otimes \hat{e}_s^T$, $r = 1, \dots, n$, $s = 1, \dots, m$ prendono il nome di *matrici elementari*, e costituiscono una base per lo spazio vettoriale $\mathrm{Mat}_{n\times m}(\mathbb{R})$, pertanto ogni matrice si scrive in modo unico come combinazione lineare di matrici elementari. Con un abuso di notazione, in questo caso scriveremo semplicemente $e_r \otimes e_s$ in luogo di $e_r \otimes \hat{e}_s^T$ per alleggerire la notazione. Ciò giustifica la notazione introdotta all'inizio della Definizione 1.4.

Definizione 1.9. Definiamo $\mathrm{diag}:\mathbb{R}^n \to \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ ponendo $\mathrm{diag}(e_i) = e_i \otimes e_i$ ed estendendo il risultato per linearità: dato $v \in \mathbb{R}^n$, $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ si ha

$$\mathrm{diag}(v) := \begin{pmatrix} v_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & v_2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & v_{n-1} & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & v_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n v_i e_i \otimes e_i,$$

ovvero $\mathrm{diag}(v)$ è una matrice quadrata i cui elementi sono tutti nulli ad eccezione della diagonale principale, e l'i-esimo elemento della diagonale principale coincide con la i-esima componente di v. Questo implica che, posto $\mathrm{diag}(v) = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$, si ha $a_{ij} = v_i\delta_{ij}$. Osserviamo l'importante proprietà

$$\boxed{v \circ_H w = \mathrm{diag}(v)w = \mathrm{diag}(w)v = w \circ_H v, \text{ per ogni } v, w \in \mathbb{R}^n}$$

Infatti si ha

$$\mathrm{diag}(v)w = \sum_{i,j=1}^n v_i\delta_{ij}w_je_i = \sum_{i=1}^n v_iw_ie_i = v\circ_H w = w \circ_H v = \sum_{i,j=1}^n w_i\delta_{ij}v_je_i = \mathrm{diag}(w)v.$$

Definizione 1.10 (Simbolo di Levi-Civita)**.** Sia $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$. Per ogni $I := (i_1,\dots,i_n) \in (\mathbb{N}\setminus\{0\})^n$ definiamo il *simbolo di Levi-Civita*

$$\varepsilon_I = \varepsilon_{i_1,\dots,i_n} = \begin{cases} +1, & \text{se } (i_1,\dots,i_n) \text{ è una permutazione pari di } (1,\dots,n), \\ -1, & \text{se } (i_1,\dots,i_n) \text{ è una permutazione dispari di } (1,\dots,n), \\ 0, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Ricordiamo che $(i_1,\dots,i_n)$ è una permutazione pari (risp. dispari) di $(1,\dots,n)$ se si può ottenere $(i_1,\dots,i_n)$ da $(1,\dots,n)$ mediante un numero pari (risp. dispari) di scambi tra componenti.

Definizione 1.11 (Determinante)**.** Data $A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n} \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ definiamo il *determinante* di A ponendo

$$\boxed{\begin{aligned} \det(A) &= \sum_{i_1,\dots,i_n=1}^n \varepsilon_{i_1,\dots,i_n} a_{1i_1}\cdot\ldots\cdot a_{ni_n} \\ &= \frac{1}{n!}\sum_{\substack{i_1,\dots,i_n=1,\dots,n\\ j_1,\dots,j_n=1,\dots,n}} \varepsilon_{i_1,\dots,i_n}\varepsilon_{j_1,\dots,j_n} a_{i_1j_1}\cdot\ldots\cdot a_{i_nj_n} \end{aligned}}$$

Definizione 1.12 (Prodotto vettoriale)**.** Sia $\mathscr{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$. Dati $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$, definiamo il prodotto vettoriale $\vec{v}\wedge\vec{w}$ di $\vec{v}$ e $\vec{w}$ ponendo

$$\boxed{\vec{v}\wedge\vec{w} = \sum_{i,j,k=1}^3 \varepsilon_{i,j,k}v_jw_k\vec{e}_i, \qquad \text{dove } \vec{v} = \sum_{i=1}^3 v_i\vec{e}_i \text{ e } \vec{w} = \sum_{i=1}^3 w_i\vec{e}_i}$$

2. Richiami di algebra lineare

Definizione 2.1. Siano E, F due spazi vettoriali reali. Poniamo

$$\mathscr{L}(E,F) := \{\ell : E \to F : \ell \text{ è una funzione lineare}\},$$
$$E' := \{\ell : E \to \mathbb{R} : \ell \text{ è una funzione lineare}\} = \mathscr{L}(E,\mathbb{R}).$$

Tali insiemi sono spazi vettoriali rispetto alle seguenti operazioni:

a. Dato $\lambda \in \mathbb{R}$, $\ell \in \mathscr{L}(E,F)$, la funzione $\lambda\ell$ è definita ponendo per ogni $\vec{v} \in E$
$$(\lambda\ell)(\vec{v}) = \ell(\lambda\vec{v}) = \lambda\ell(\vec{v}) \in F.$$

b. Dati $\ell_1, \ell_2 \in \mathscr{L}(E,F)$, la funzione $\ell_1 + \ell_2$ è definita ponendo per ogni $\vec{v} \in E$
$$(\ell_1 + \ell_2)(\vec{v}) = \ell_1(\vec{v}) + \ell_2(\vec{v}) \in F.$$

Lo spazio E' prende il nome di spazio *duale* di E.

Osservazione 2.2. Siano E_m, F_n due spazi vettoriali reali di dimensione finita, $\dim(E_m) = m$ e $\dim(F_n) = n$, e sia $\ell : E_m \to F_n$ una funzione lineare. Per ogni $\vec{v} \in E_m$ di componenti $(v_1, \dots, v_m)$ rispetto ad una base $\mathscr{B}_{E_m} = \{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_m\}$ si ha

$$\ell(\vec{v}) = \ell\left(\sum_{j=1}^{m} v_j \vec{e}_j\right) = \sum_{j=1}^{m} v_j \ell(\vec{e}_j).$$

Ciò implica che $\ell(\cdot) \in \mathscr{L}(E_m, F_n)$ è completamente determinata qualora si conoscano i vettori $\ell(\vec{e}_j) \in F_n$, ovvero le immagini degli elementi della base $\mathscr{B}_{E_m}$.

D'altra parte, fissata una base $\mathscr{B}_F = \{\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_n\}$ di F_n, per ogni $j = 1, \dots, m$ il vettore $\ell(\vec{e}_j) \in F_n$ è univocamente determinato dalle sue componenti rispetto alla base $\mathscr{B}_F$ e quindi esistono unici i coefficienti $a_{1j}, \dots, a_{nj} \in \mathbb{R}$, tali per cui

$$\ell(\vec{e}_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \vec{f}_i.$$

Ciò implica che fissate $\mathscr{B}_{E_m}$ e $\mathscr{B}_{F_n}$ l'applicazione ℓ sia univocamente determinata dalla matrice $A_\ell := (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,m}} \in \mathrm{Mat}_{n\times m}(\mathbb{R})$.

Un caso particolare del precedente è dato da $n = 1$ e $F_n = \mathbb{R}$. In questo caso porremo su F_n la base $\{1\}$.

Definizione 2.3 (Duale di uno spazio di dimensione finita)**.** Supponiamo che E_m sia uno spazio vettoriale reale di dimensione finita, $\dim(E_m) = m$. Fissata una base $\mathscr{B}_{E_m} = \{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_m\}$ di E_m, definiamo

$$\mathscr{B}_{E'_m} = \{d\vec{e}_1, \dots, d\vec{e}_m\} \subseteq E'_m$$

ponendo

$$d\vec{e}_i(\vec{e}_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j, \\ 0, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

ed estendendo la definizione per linearità. Ma allora

$$\boxed{d\vec{e}_i(\vec{v}) = d\vec{e}_i\left(\sum_{j=1}^{m} v_j \vec{e}_j\right) = \sum_{j=1}^{m} v_j\, d\vec{e}_i\,(\vec{e}_j) = v_i, \text{ per ogni } \vec{v} = \sum_{j=1}^{m} v_j \vec{e}_j \in E_m}$$

ovvero la i-esima componente di un vettore $\vec{v} \in E_m$ rispetto alla base $\mathscr{B}_{E_m}$ è data da $d\vec{e}_i(\vec{v})$, dove $d\vec{e}_i$ è l'i-esimo elemento della base duale $\mathscr{B}_{E'_m}$ di $\mathscr{B}_{E_m}$. Si ha che $\mathscr{B}_{E'_m}$ è una base del duale E'_m di E_m, che prende il nome di *base duale* di $\mathscr{B}_{E_m}$. Quindi E'_m

è anch'esso uno spazio di dimensione finita, ed è isomorfo a E_m. Data un'applicazione $\ell \in E'_m$, la j-esima componente di ℓ rispetto alla base $\mathscr{B}_{E'_m}$ è $\ell(\vec{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{j}})$, ovvero

$$\boxed{\ell = \sum_{i=1}^{n} \ell_i d\vec{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{i}} \text{ se e solo se } \ell_i = \ell(\vec{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{i}})}$$

Se $v = (v_1, \dots, v_m) \in \mathbb{R}^m$ sono le componenti di $\vec{\boldsymbol{v}}$ rispetto a $\mathscr{B}_{E_m}$ e $w = (\ell_1, \dots, \ell_m) \in \mathbb{R}^m$ sono le componenti di ℓ rispetto a $\mathscr{B}_{E'_m}$ allora $\ell(\vec{\boldsymbol{v}}) = \langle v, w \rangle$, ovvero

$$\boxed{\text{Se } \vec{\boldsymbol{v}} = \sum_{i=1}^{n} v_i \vec{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{i}} \text{ e } \ell = \sum_{i=1}^{n} \ell_i \, d\vec{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{i}} \text{ allora } \ell(\vec{\boldsymbol{v}}) = \sum_{i=1}^{n} \ell_i v_i = \langle \begin{pmatrix} \ell_1 \\ \vdots \\ \ell_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \rangle}$$

Generalizziamo ora l'osservazione precedente nel seguente enunciato.

Proposizione 2.4 (Rappresentazione delle funzioni lineari)**.** *Siano E_m, F_n due spazi vettoriali reali di dimensione finita con $\dim(E_m) = m$ e $\dim(F_n) = n$. Supponiamo di fissare una base $\mathscr{B}_{E_m} = \{\vec{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{1}}, \dots, \vec{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{m}}\}$ di E_m e una base $\mathscr{B}_{F_n} = \{\vec{\boldsymbol{f}}_{\boldsymbol{1}}, \dots, \vec{\boldsymbol{f}}_{\boldsymbol{n}}\}$ di F_n. Per ogni $j = 1, \dots, m$, $i = 1, \dots, n$ definiamo l'applicazione lineare $d\vec{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{j}} \otimes \vec{\boldsymbol{f}}_{\boldsymbol{i}} : E_m \to F_n$ ponendo*

$$d\vec{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{j}} \otimes \vec{\boldsymbol{f}}_{\boldsymbol{i}}(\vec{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{k}}) = \begin{cases} 0, & \text{se } j \neq k, \\ \\ \vec{\boldsymbol{f}}_{\boldsymbol{i}}, & \text{se } j = k. \end{cases}$$

Allora

(1) *l'insieme*

$$\boxed{\mathscr{B}_{E'_m} \otimes \mathscr{B}_{F_n} := \{d\vec{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{j}} \otimes \vec{\boldsymbol{f}}_{\boldsymbol{i}} : \, i = 1, \dots, n, \, j = 1, \dots, m\}}$$

è una base di $\mathscr{L}(E_m, F_n)$, che ha quindi dimensione nm;

(2) *data $\ell \in \mathscr{L}(E_m, F_n)$, esiste un'unica matrice $A_\ell \in \mathrm{Mat}_{n \times m}(\mathbb{R})$, $A_\ell = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots m}}$ tale che*

$$\boxed{\ell = \sum_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots m}} a_{ij} \, d\vec{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{j}} \otimes \vec{\boldsymbol{f}}_{\boldsymbol{i}}}$$

e diremo che A_ℓ rappresenta *ℓ nella base $\mathscr{B}_{E'_m} \otimes \mathscr{B}_{F_n}$ di $\mathscr{L}(E_m, F_n)$;*

(3) *la j-esima colonna di A_ℓ è data dalle componenti rispetto alla base $\mathscr{B}_{F_n}$ di $\ell(\vec{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{j}})$ dove $\vec{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{j}}$ è il j-esimo vettore della base $\mathscr{B}_{E_m}$.*

(4) *per ogni $\vec{\boldsymbol{v}} \in E_m$ si ottiene*

$$\boxed{\ell(\vec{\boldsymbol{v}}) = \sum_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,m}} a_{ij} v_j \vec{\boldsymbol{f}}_{\boldsymbol{j}}, \text{ dove } \vec{\boldsymbol{v}} = \sum_{j=1}^{n} v_j \vec{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{j}}}.$$

(5) *dato $\vec{\boldsymbol{v}} \in E_m$, posto $\vec{\boldsymbol{w}} = \ell(\vec{\boldsymbol{v}})$ e indicate con $(v_1, \dots, v_m)$ le componenti di $\vec{\boldsymbol{v}}$ rispetto a $\mathscr{B}_E$ e con $(w_1, \dots, w_n) \in \mathbb{R}^n$ le componenti di $\vec{\boldsymbol{w}}$ rispetto a $\mathscr{B}_F$, ovvero $v_1, \dots, v_m, w_1, \dots, w_n \in \mathbb{R}$ sono gli unici coefficienti tali che*

$$\vec{\boldsymbol{v}} = \sum_{j=1}^{m} v_j \vec{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{j}}, \qquad \vec{\boldsymbol{w}} = \sum_{i=1}^{n} w_i \vec{\boldsymbol{f}}_{\boldsymbol{i}},$$

si ha

(1)
$$\underbrace{\boxed{\begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}}}_{\substack{\text{componenti di } \vec{\boldsymbol{w}} = \\ \ell(\vec{\boldsymbol{v}}) \text{ nella base } \mathscr{B}_F}} = A_\ell \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & \underbrace{\boxed{\begin{matrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{matrix}}}_{\substack{\text{componenti di } \ell(\vec{\boldsymbol{e}}_j) \\ \text{nella base } \mathscr{B}_F}} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \underbrace{\boxed{\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix}}}_{\substack{\text{componenti di } \vec{\boldsymbol{v}} \\ \text{nella base } \mathscr{B}_E}}$$

(6) *ad ogni matrice $A \in \mathrm{Mat}_{n\times m}(\mathbb{R})$ è possibile associare una ed una sola applicazione lineare $\ell_A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ ponendo*
$$\ell_A(\vec{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{j}}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \vec{\boldsymbol{f}}_{\boldsymbol{i}},$$

Dimostrazione. Sia $\ell : E_m \to F_n$ una funzione lineare, $\vec{\boldsymbol{v}} \in E_m$. Per ogni $j = 1, \dots, m$ fissato, esistono unici i coefficienti $a_{1j}, \dots, a_{nj} \in \mathbb{R}$ tali che $\ell(\vec{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{j}}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \vec{\boldsymbol{f}}_{\boldsymbol{i}}$. Proviamo che
$$\ell = \sum_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,m}} a_{ij}\, d\vec{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{j}} \otimes \vec{\boldsymbol{f}}_{\boldsymbol{i}}.$$

Dato $\vec{\boldsymbol{v}} \in E_m$, esistono unici i coefficienti $v_1, \dots, v_m \in \mathbb{R}$ tali che $\vec{\boldsymbol{v}} = \sum_{j=1}^{m} v_j \vec{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{j}}$, da cui
$$\begin{aligned}
\left(\sum_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,m}} a_{ij} d\vec{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{j}} \otimes \vec{\boldsymbol{f}}_{\boldsymbol{i}} \right)(\vec{\boldsymbol{v}}) &= \sum_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,m}} a_{ij}\, d\vec{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{j}} \otimes \vec{\boldsymbol{f}}_{\boldsymbol{i}} \left(\sum_{k=1}^{m} v_k \vec{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{k}} \right) \\
&= \sum_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,m \\ k=1,\dots,m}} a_{ij} v_k \underbrace{d\vec{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{j}} \otimes \vec{\boldsymbol{f}}_{\boldsymbol{i}}(\vec{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{k}})}_{=0 \text{ se } k \neq j} \\
&= \sum_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,m}} a_{ij} v_j \vec{\boldsymbol{f}}_{\boldsymbol{i}} = \sum_{j=1}^{m} v_j \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij} \vec{\boldsymbol{f}}_{\boldsymbol{i}} \right)}_{=\ell(\vec{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{j}})} = \sum_{j=1}^{m} v_j \ell(\vec{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{j}}) = \ell(\vec{\boldsymbol{v}}).
\end{aligned}$$

Poniamo a questo punto $A_\ell = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,m}}$. Per ogni j fissato, le componenti di $\ell(\vec{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{j}})$ rispetto alla base $\mathscr{B}_F$ sono esattamente $\begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$, ovvero la j-esima colonna di A_ℓ. Pertanto la j-esima colonna di A_ℓ è data dalle componenti rispetto alla base $\mathscr{B}_F$ di $\ell(\vec{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{j}})$ dove $\vec{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{j}}$ è il j-esimo vettore della base $\mathscr{B}_E$.

Viceversa, ad ogni matrice $A \in \mathrm{Mat}_{n\times m}(\mathbb{R})$ è possibile associare una ed una sola applicazione lineare $\ell_A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ ponendo
$$\ell_A(\vec{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{j}}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \vec{\boldsymbol{f}}_{\boldsymbol{i}},$$

e quindi, poiché ogni vettore $\vec{\boldsymbol{v}} \in E_m$ si scrive in modo unico come combinazione lineare degli elementi della base $\mathscr{B}_E$, pertanto esistono unici $v_1, \ldots, v_m \in \mathbb{R}$ tali che $v = \sum_{j=1}^m v_j \vec{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{j}}$, si ha per linearità

$$\ell_A(\vec{\boldsymbol{v}}) = \ell_A\left(\sum_{j=1}^m v_j \vec{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{j}}\right) = \sum_{j=1}^m v_j \ell_A(\vec{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{j}}) = \sum_{\substack{i=1,\ldots,n\\ j=1,\ldots,m}} a_{ij} v_j \vec{\boldsymbol{f}}_{\boldsymbol{i}}.$$

□

Un'ulteriore caso rilevante è quello in cui supponiamo $E_m = F_n$, quindi $m = n$, e vogliamo rappresentare la funzione identità rispetto a due basi diverse.

Definizione 2.5 (Matrice del cambiamento di base)**.** Sia E_n uno spazio vettoriale di dimensione finita, $\dim(E_n) = n$ e consideriamo due basi $\mathscr{B}$ e $\mathscr{B}'$ su E_n. Poniamo $\ell : E_n \to E_n$ l'applicazione identica, ovvero $\ell(\vec{\boldsymbol{v}}) = \vec{\boldsymbol{v}}$ per ogni $\vec{\boldsymbol{v}} \in E_n$. In questo caso dalla formula (1) segue che, dato un vettore $\vec{\boldsymbol{v}} \in E_n$, le sue componenti $(v_1, \ldots, v_n)$ rispetto alla base $\mathscr{B}$, e $(w_1, \ldots, w_n)$ rispetto alla base $\mathscr{B}'$ sono legate da
(2)

$$\underbrace{\boxed{\begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}}}_{\text{componenti di } \vec{\boldsymbol{v}} = \ell(\vec{\boldsymbol{v}}) \text{ nella base } \mathscr{B}'} = A_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}'}\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & \underbrace{\boxed{\begin{matrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{matrix}}}_{\text{componenti di } \vec{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{j}} = \ell(\vec{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{j}}) \text{ nella base } \mathscr{B}'} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \underbrace{\boxed{\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix}}}_{\text{componenti di } \vec{\boldsymbol{v}} \text{ nella base } \mathscr{B}}$$

La matrice $A_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}'}$ prende il nome di *matrice del cambiamento di base* da $\mathscr{B}$ a $\mathscr{B}'$, e la sua j-esima colonna è costituita dalle componenti del j-esimo vettore di $\mathscr{B}$ rispetto a $\mathscr{B}'$

Poiché la matrice che rappresenta un'applicazione lineare tra spazi di dimensione finita dipende dalla scelta delle basi su tali spazi, vogliamo studiare come cambia tale rappresentazione al variare della scelta delle basi.

Proposizione 2.6 (Rappresentazioni e cambiamenti di base)**.** *Siano E_m, F_n due spazi vettoriali reali di dimensione finita con $\dim(E_m) = m$ e $\dim(F_n) = n$, e sia $\ell : E_m \to F_n$ una funzione lineare. Fissiamo due basi $\mathscr{B}_E^{(i)} = \{\vec{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{1}}^{\boldsymbol{(i)}}, \ldots, \vec{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{m}}^{\boldsymbol{(i)}}\}$, $i = 1, 2$ di E_m e due basi $\mathscr{B}_F^{(i)} = \{\vec{\boldsymbol{f}}_{\boldsymbol{1}}^{\boldsymbol{(i)}}, \ldots, \vec{\boldsymbol{f}}_{\boldsymbol{n}}^{\boldsymbol{(i)}}\}$, $i = 1, 2$ di F_n.*

Sia $A_\ell^{(1)}$ la matrice associata a $\ell(\cdot)$ se poniamo su E_m la base $\mathscr{B}_E^{(1)}$ e su F_n la base $\mathscr{B}_F^{(1)}$, e sia $A_\ell^{(2)}$ la matrice associata a $\ell(\cdot)$ se poniamo su E_m la base $\mathscr{B}_E^{(2)}$ e su F_n la base $\mathscr{B}_F^{(2)}$. Indicate con $N_{\mathscr{B}_F^{(1)}\to\mathscr{B}_F^{(2)}}$ e $M_{\mathscr{B}_E^{(2)}\to\mathscr{B}_E^{(1)}}$ le matrici di cambiamento di base, si ha

$$\boxed{A_\ell^{(2)} = N_{\mathscr{B}_F^{(1)}\to\mathscr{B}_F^{(2)}} A_\ell^{(1)} M_{\mathscr{B}_E^{(2)}\to\mathscr{B}_E^{(1)}}},$$

Dimostrazione. Supponiamo di conoscere la matrice $A_\ell^{(1)}$ e di voler ricavare la matrice $A_\ell^{(2)}$. A tal proposito, è necessario ricavare le matrici del cambiamento di base $P \in \mathrm{Mat}_{m\times m}$ da $\mathscr{B}_E^{(1)}$ a $\mathscr{B}_E^{(2)}$ e $N_{\mathscr{B}_F^{(1)}\to\mathscr{B}_F^{(2)}} = Q \in \mathrm{Mat}_{n\times n}$ da $\mathscr{B}_F^{(1)}$ a $\mathscr{B}_F^{(2)}$. Tali matrici sono chiaramente invertibili perché mandano una base in una base.

La j-esima colonna di P sarà data dalle componenti del j-esimo vettore di $\mathscr{B}_E^{(1)}$ rispetto a $\mathscr{B}_E^{(2)}$, e analogamente la k-esima colonna di Q sarà data dalle componenti del k-esimo vettore di $\mathscr{B}_F^{(1)}$ rispetto a $\mathscr{B}_F^{(2)}$. Se $(v_1^{(i)}, \ldots, v_m^{(i)})$ sono le componenti di $\vec{\boldsymbol{v}}$ rispetto a $\mathscr{B}_E^{(i)}$,

$i = 1, 2$ e $(w_1^{(i)}, \dots, w_m^{(i)})$ sono le componenti di $\vec{\boldsymbol{w}} = \ell(\vec{\boldsymbol{v}})$ rispetto a $\mathscr{B}_F^{(i)}$, $i = 1, 2$, si ha

$$\begin{pmatrix} v_1^{(2)} \\ \vdots \\ v_m^{(2)} \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} v_1^{(1)} \\ \vdots \\ v_m^{(1)} \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} w_1^{(2)} \\ \vdots \\ w_n^{(2)} \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} w_1^{(1)} \\ \vdots \\ w_n^{(1)} \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} w_1^{(1)} \\ \vdots \\ w_n^{(1)} \end{pmatrix} = A_\ell^{(1)} \begin{pmatrix} v_1^{(1)} \\ \vdots \\ v_n^{(1)} \end{pmatrix}$$

da cui

$$\begin{pmatrix} w_1^{(2)} \\ \vdots \\ w_n^{(2)} \end{pmatrix} = QA_\ell^{(1)} \begin{pmatrix} v_1^{(1)} \\ \vdots \\ v_m^{(1)} \end{pmatrix} = QA_\ell^{(1)} P^{-1} P \begin{pmatrix} v_1^{(1)} \\ \vdots \\ v_m^{(1)} \end{pmatrix} = QA_\ell^{(1)} P^{-1} \begin{pmatrix} v_1^{(2)} \\ \vdots \\ v_m^{(2)} \end{pmatrix} = A_\ell^{(2)} \begin{pmatrix} v_1^{(2)} \\ \vdots \\ v_m^{(2)} \end{pmatrix},$$

quindi

$$\begin{pmatrix} w_1^{(2)} \\ \vdots \\ w_n^{(2)} \end{pmatrix} = A_\ell^{(2)} \begin{pmatrix} v_1^{(2)} \\ \vdots \\ v_m^{(2)} \end{pmatrix} \text{ dove } A_\ell^{(2)} = QA_\ell^{(1)} P^{-1},$$

da cui la tesi perché $P^{-1} = M_{\mathscr{B}_E^{(2)} \to \mathscr{B}_E^{(1)}}$ è la matrice inversa di P. □

Il risultato precedente può essere applicato in particolare al caso in cui $F_n = \mathbb{R}$, quindi $\ell \in E'_m$.

Corollario 2.7. *Sia E_n uno spazio vettoriale reale di dimensione finita* $\dim(E_n) = n$, *e sia $\ell \in E'_n$. Siano $\mathscr{B}_E^{(i)} = \{\vec{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{1}}^{\boldsymbol{(i)}}, \dots, \vec{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{n}}^{\boldsymbol{(i)}}\}$, $i = 1, 2$ due basi di E_n. e siano $\mathscr{B}_{E'}^{(1)}$, $\mathscr{B}_{E'}^{(2)}$ le corrispondenti basi duali. Se $A_{\mathscr{B}_E^{(1)} \to \mathscr{B}_E^{(2)}}$ è la matrice del cambiamento di base, allora*

$$\boxed{A_{\mathscr{B}_E^{(1)} \to \mathscr{B}_E^{(2)}} = A^T_{\mathscr{B}_{E'}^{(2)} \to \mathscr{B}_{E'}^{(1)}}}$$

Equivalentemente,

$$\boxed{\ell = \sum_{j=1}^n \ell_j^{(1)} \vec{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{j}}^{\boldsymbol{(1)}} = \sum_{i=1}^n \ell_i^{(2)} \vec{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{i}}^{\boldsymbol{(2)}} \text{ se e solo se } \ell_j^{(1)} = \sum_{i=1}^n a_{ij} \ell_i^{(2)},\ j = 1, \dots, n}$$

Dimostrazione. Per ogni $j = 1, \dots, n$ si ha

$$\ell_j^{(1)} = \ell(\vec{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{j}}^{\boldsymbol{(1)}}) = \ell\left(\sum_{i=1}^n a_{ij} \vec{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{i}}^{\boldsymbol{(2)}}\right) = \sum_{i=1}^n a_{ij} \ell\left(\vec{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{i}}^{\boldsymbol{(2)}}\right) = \sum_{i=1}^n a_{ij} \ell_i^{(2)},$$

ovvero

$$\left(\ell_1^{(1)}, \cdots, \ell_n^{(1)}\right) = \left(\ell_1^{(2)}, \cdots, \ell_n^{(2)}\right) \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

o, equivalentemente,

$$\begin{pmatrix} \ell_1^{(1)} \\ \vdots \\ \ell_n^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \ell_1^{(2)} \\ \vdots \\ \ell_n^{(2)} \end{pmatrix}.$$

□

Esercizio 1. Sia $\mathscr{B} = \{\vec{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{1}}, \vec{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{2}}, \vec{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{3}}\}$ dove i vettori $\vec{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{1}}$, $\vec{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{2}}$, $\vec{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{3}}$ hanno rispettivamente componenti $(1, 1, 0)$, $(1, 0, 2)$, $(0, 0, 1)$ rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$.

(1) Si verifichi che $\mathscr{B}$ è una base di $\mathbb{R}^3$.
(2) Si consideri l'applicazione lineare $\ell : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita da $\ell(\vec{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{1}}) = \vec{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{1}} + 2\vec{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{2}}$, $\ell(\vec{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{2}}) = \vec{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{2}}$, $\ell(\vec{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{3}}) = \vec{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{2}}$ Si trovi la matrice associata a $\ell(\cdot)$ rispetto alla base canonica sul dominio e sul codominio.

(3) Si determini una base dello spazio nullo di $\ell(\cdot)$ e dell'immagine di $\ell(\cdot)$.
(4) Si dica se il vettore di componenti $(0,1,1)$ rispetto alla base canonica appartiene all'immagine di $\ell(\cdot)$. In caso affermativo si trovi un vettore la cui immagine tramite $\ell(\cdot)$ abbia componenti $(0,1,1)$ rispetto alla base canonica.

Soluzione. Indichiamo con $\mathscr{C} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ i vettori della base canonica di $\mathbb{R}^3$. Per definizione, si ha allora

$$\begin{aligned}\vec{v}_1 &= \vec{e}_1 + \vec{e}_2,\\ \vec{v}_2 &= \vec{e}_1 + 2\vec{e}_3,\\ \vec{v}_3 &= \vec{e}_3.\end{aligned}$$

Consideriamo l'applicazione lineare ψ che mandi $\vec{e}_i$ in $\vec{v}_i$ per $i = 1,2,3$. Poiché $\psi(\vec{e}_i) = \vec{v}_i$ e le componenti di $\vec{v}_i$ rispetto alla base canonica sono assegnate, tale applicazione rispetto alla base canonica $\mathscr{C}$ su dominio e codominio è rappresentata dalla matrice che ha per i-esima colonna le componenti di $\vec{v}_i$ rispetto alla base canonica.

$$P_\psi := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si ha $\det(P_\psi) = -1 \neq 0$, quindi la trasformazione è invertibile, e perciò $\mathscr{B}$ è una base di $\mathbb{R}^3$.

Se poniamo la base $\mathscr{B}$ su dominio e codominio, l'applicazione ℓ è rappresentata da una matrice $A_\mathscr{B}$ la cui i-esima colonna è data dalle componenti di $\ell(\vec{v}_i)$ rispetto a $\mathscr{B}$. Poiché $\ell(\vec{v}_i)$ è già dato dal testo in termini della base $\mathscr{B}'$, la matrice $A_\mathscr{B}$ risulta semplicemente

$$A_\mathscr{B} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Tale matrice ha rango 2, quindi $\ell(\cdot)$ ha rango 2, e pertanto lo spazio nullo di $\ell(\cdot)$ ha dimensione pari alla dimensione dello spazio (quindi 3) meno il rango (quindi 2). Allora lo spazio nullo ha dimensione 1.

Determiniamo ora la matrice del cambiamento di base $P_{\mathscr{B}\to\mathscr{C}}$ da $\mathscr{B}$ a $\mathscr{C}$. Tale matrice, che rappresenta la funzione identità, è costruita nel modo seguente: nella i-esima colonna vi sono le componenti dell'i-esimo vettore di $\mathscr{B}$, ovvero $\vec{v}_i$, rispetto alla base $\mathscr{C}$, ovvero rispetto alla base canonica. I vettori $\vec{v}_i$ sono già assegnati rispetto alla base canonica, quindi

$$P_{\mathscr{B}\to\mathscr{C}} := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice inversa rappresenta il cambiamento di base inverso:

$$P_{\mathscr{C}\to\mathscr{B}} = P^{-1}_{\mathscr{B}\to\mathscr{C}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Si avrà quindi che la matrice $A_\mathscr{C}$ di $\ell(\cdot)$ rispetto alla base $\mathscr{C}$ sul dominio e sul codominio sarà data da

$$\begin{aligned} A_\mathscr{C} &= P_{\mathscr{B}\to\mathscr{C}} A_\mathscr{B} P_{\mathscr{C}\to\mathscr{B}} = P_{\mathscr{B}\to\mathscr{C}} A_\mathscr{B} P^{-1}_{\mathscr{B}\to\mathscr{C}} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 6 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Verifichiamo il risultato ottenuto: rispetto alla base canonica si ha che il vettore $\ell(\vec{\boldsymbol{v}}_1) = \vec{\boldsymbol{v}}_1 + 2\vec{\boldsymbol{v}}_2$ ha componenti $(3,1,4)$, e moltiplicando la matrice $A_{\mathscr{C}}$ per la rappresentazione di $\vec{\boldsymbol{v}}_1$ rispetto alla base $\mathscr{C}$, ovvero $(1,1,0)$, si ha

$$\begin{pmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 6 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Analogamente, rispetto alla base canonica si ha che il vettore $\ell(\vec{\boldsymbol{v}}_2) = \vec{\boldsymbol{v}}_2$ ha componenti $(1,0,2)$, e moltiplicando la matrice $A_{\mathscr{C}}$ per la rappresentazione di $\vec{\boldsymbol{v}}_2$ rispetto alla base $\mathscr{C}$, ovvero $(1,0,2)$, si ha

$$\begin{pmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 6 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Infine, rispetto alla base canonica si ha che il vettore $\ell(\vec{\boldsymbol{v}}_3) = \vec{\boldsymbol{v}}_2$ ha componenti $(1,0,2)$, e moltiplicando la matrice $A_{\mathscr{C}}$ per la rappresentazione di $\vec{\boldsymbol{v}}_3$ rispetto alla base $\mathscr{C}$, ovvero $(0,0,1)$, si ha

$$\begin{pmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 6 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Osserviamo inoltre che $\ell(\vec{\boldsymbol{v}}_2) = \ell(\vec{\boldsymbol{v}}_3)$, quindi $\ell(\vec{\boldsymbol{v}}_2 - \vec{\boldsymbol{v}}_3) = 0$, pertanto $\{\vec{\boldsymbol{v}}_2 - \vec{\boldsymbol{v}}_3\}$ è una base dello spazio nullo di $\ell(\cdot)$ che, ricordiamo, in questo caso ha dimensione 1. Rispetto alla base $\mathscr{C}$ il vettore $\vec{\boldsymbol{v}}_2 - \vec{\boldsymbol{v}}_3$ ha componenti $(1,0,1)$. Si poteva ottenere lo stesso risultato osservando che

$$A_{\mathscr{B}} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = 0$$

implica $\beta + \gamma = 0$, ovvero un vettore che sia nello spazio nullo ha componenti rispetto alla base $\mathscr{B}$ pari a $(0, \beta, -\beta)$, quindi è della forma $\beta(\vec{\boldsymbol{v}}_2 - \vec{\boldsymbol{v}}_3)$ al variare di $\beta \in \mathbb{R}$. Per ottenere una base dell'immagine, completiamo una base dello spazio nullo ad una base di tutto lo spazio. Ad esempio, osserviamo che $\{\vec{\boldsymbol{v}}_1, \vec{\boldsymbol{v}}_2, \vec{\boldsymbol{v}}_2 - \vec{\boldsymbol{v}}_3\}$ sono linearmente indipendenti. A questo punto le immagini dei vettori $\{\vec{\boldsymbol{v}}_1, \vec{\boldsymbol{v}}_2\}$ saranno una base dell'immagine. Si ha quindi che una base dell'immagine è $\{\ell(\vec{\boldsymbol{v}}_1), \ell(\vec{\boldsymbol{v}}_2)\} = \{\vec{\boldsymbol{v}}_1 + 2\vec{\boldsymbol{v}}_2, \vec{\boldsymbol{v}}_2\}$. Si poteva arrivare allo stesso risultato osservando che il rango della matrice formata dalle prime due colonne di $\mathscr{A}_{\mathscr{B}}$ è pari a 2, e ciò significa che le immagini dei primi due vettori di $\mathscr{B}$ formano uno spazio di dimensione 2. In modo analogo, le ultime due colonne di $\mathscr{A}_{\mathscr{C}}$ formano una matrice di rango 2, quindi le immagini di $\vec{\boldsymbol{e}}_2$ e $\vec{\boldsymbol{e}}_3$ sono un'altra base per l'immagine di $\ell(\cdot)$, ovvero $\{4\vec{\boldsymbol{e}}_1 + \vec{\boldsymbol{e}}_2 + 6\vec{\boldsymbol{e}}_3, \vec{\boldsymbol{e}}_1 + 2\vec{\boldsymbol{e}}_3\}$. Vogliamo stabilire se il vettore di componenti $(0,1,1)$ rispetto alla base canonica, ovvero il vettore $\vec{\boldsymbol{e}}_2 + \vec{\boldsymbol{e}}_3$ appartiene all'immagine di $\ell(\cdot)$. Ciò è vero se e solo se esso si scrive come combinazione lineare dei vettori della base, ovvero se esistono $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tali che

$$\vec{\boldsymbol{e}}_2 + \vec{\boldsymbol{e}}_3 = \alpha \ell(\vec{\boldsymbol{e}}_2) + \beta \ell(\vec{\boldsymbol{e}}_3).$$

ovvero

$$0 = (4\alpha + \beta)\vec{\boldsymbol{e}}_1 + (\alpha - 1)\vec{\boldsymbol{e}}_2 + (6\alpha + 2\beta - 1)\vec{\boldsymbol{e}}_3.$$

Si ottiene $4\alpha + \beta = 0$, $\alpha - 1 = 0$, $6\alpha + 2\beta - 1 = 0$, ma tale sistema è impossibile, quindi $\vec{\boldsymbol{e}}_2 + \vec{\boldsymbol{e}}_3$ non appartiene all'immagine. Si poteva arrivare allo stesso risultato osservando che la matrice formata dalle prime due colonne di $A_{\mathscr{C}}$ e come terza colonna le componenti del vettore $\vec{\boldsymbol{e}}_2 + \vec{\boldsymbol{e}}_3$ rispetto alla base canonica ha rango massimo, pertanto i vettori $\ell(\vec{\boldsymbol{e}}_2)$, $\ell(\vec{\boldsymbol{e}}_3)$ e $\vec{\boldsymbol{e}}_2 + \vec{\boldsymbol{e}}_3$ sono linearmente indipendenti. Infine, si poteva pervenire sempre allo stesso risultato osservando che rispetto alla base $\mathscr{B}$ il vettore $\vec{\boldsymbol{e}}_2 + \vec{\boldsymbol{e}}_3$ ha componenti $(1,-1,3)$, ma poiché una base dell'immagine è $\{\vec{\boldsymbol{v}}_1 + 2\vec{\boldsymbol{v}}_2, \vec{\boldsymbol{v}}_2\}$, nessun vettore dell'immagine può avere terza componente rispetto alla base $\mathscr{B}$ diversa da zero, quindi $\vec{\boldsymbol{e}}_2 + \vec{\boldsymbol{e}}_3$ non appartiene all'immagine. $\square$

Una naturale estensione del concetto di funzione lineare è il seguente.

Definizione 2.8 (Funzioni bilineari). Siano E, F, G tre spazi vettoriali. Diremo che un'applicazione $\mathfrak{b} : E \times F \to G$ è *bilineare* se

$$\mathfrak{b}(\alpha\vec{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{1}} + \beta\vec{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{2}}, \vec{\boldsymbol{w}}) = \alpha\mathfrak{b}(\vec{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{1}}, \vec{\boldsymbol{w}}) + \beta\mathfrak{b}(\vec{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{2}}, \vec{\boldsymbol{w}})$$
$$\mathfrak{b}(\vec{\boldsymbol{v}}, \alpha\vec{\boldsymbol{w}}_{\mathbf{1}} + \beta\vec{\boldsymbol{w}}_{\mathbf{2}}) = \alpha\mathfrak{b}(\vec{\boldsymbol{v}}, \vec{\boldsymbol{w}}_{\mathbf{1}}) + \beta\mathfrak{b}(\vec{\boldsymbol{v}}, \vec{\boldsymbol{w}}_{\mathbf{2}})$$

per ogni $\vec{\boldsymbol{v}}$, $\vec{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{1}}$, $\vec{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{2}} \in E$, $\vec{\boldsymbol{w}}$, $\vec{\boldsymbol{w}}_{\mathbf{1}}$, $\vec{\boldsymbol{w}}_{\mathbf{2}} \in F$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Indicheremo con $\mathscr{L}^2(E \times F, G)$ l'insieme delle funzioni bilineari di $E \times F$ a G. In modo del tutto analogo a quanto visto per le funzioni lineari, anche $\mathscr{L}^2(E \times F, G)$ è spazio vettoriale rispetto a somma puntuale e moltiplicazioni per scalari.

Proposizione 2.9 (Rappresentazione delle funzioni bilineari). *Siano E_m, F_n, G_p tre spazi vettoriali, $\dim(E_m) = m$, $\dim(F_n) = n$, $\dim(G_p) = p$, e sia $\mathfrak{b} : E_m \times F_n \to G_p$ un'applicazione bilineare. Supponiamo fissata una base $\mathscr{B}_{E_m} = \{\vec{\boldsymbol{e}}_{\mathbf{1}}, \dots, \vec{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{m}}\}$ di E_m, una base $\mathscr{B}_{F_n} = \{\vec{\boldsymbol{f}}_{\mathbf{1}}, \dots, \vec{\boldsymbol{f}}_{\boldsymbol{n}}\}$ di F_n, e una base $\mathscr{B}_{G_p} = \{\vec{\boldsymbol{g}}_{\mathbf{1}}, \dots, \vec{\boldsymbol{g}}_{\boldsymbol{p}}\}$ di G_p. Allora possiamo rappresentare $\mathfrak{b}$ in modo unico nel modo seguente:*

$$\begin{aligned}\mathfrak{b}(\vec{\boldsymbol{x}}, \vec{\boldsymbol{y}}) &= \mathfrak{b}\left(\sum_{i=1}^{m} x_i \vec{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{i}}, \sum_{j=1}^{n} y_j \vec{\boldsymbol{f}}_{\boldsymbol{j}}\right) = \sum_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}} x_i y_j \,\mathfrak{b}\left(\vec{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{i}}, \vec{\boldsymbol{f}}_{\boldsymbol{j}}\right) \\ &= \sum_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n \\ k=1,\dots,p}} B_{ijk} x_i y_j \vec{\boldsymbol{g}}_{\boldsymbol{k}},\end{aligned}$$

dove per ogni $i = 1, \dots, m$ e $j = 1, \dots, n$ fissati, si ha che $(B_{ij1}, \dots, B_{ijp})$ sono le componenti di $\mathfrak{b}\left(\vec{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{i}}, \vec{\boldsymbol{f}}_{\boldsymbol{j}}\right) \in G_p$ rispetto alla base $\mathscr{B}_{G_p}$, ovvero

$$\boxed{B_{ijk} = d\vec{\boldsymbol{g}}_{\boldsymbol{k}}\left(\mathfrak{b}\left(\vec{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{i}}, \vec{\boldsymbol{f}}_{\boldsymbol{j}}\right)\right)}$$

Nel caso $p = 1$, $G_p = \mathbb{R}$, sceglieremo sempre $\mathscr{B}_{G_p} = \{1\}$, quindi data una funzione bilineare da $\mathfrak{b} : E_m \times F_n \to \mathbb{R}$ con $\dim(E_m) = m$, $\dim(F_n) = n$, e fissate una base $\mathscr{B}_{E_m} = \{\vec{\boldsymbol{e}}_{\mathbf{1}}, \dots, \vec{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{m}}\}$ di E_m e una base $\mathscr{B}_{F_n} = \{\vec{\boldsymbol{f}}_{\mathbf{1}}, \dots, \vec{\boldsymbol{f}}_{\boldsymbol{n}}\}$ di F_n, si ha $p = k = 1$ nella formula precedente, $\vec{g}_1 = 1$, quindi (ponendo $B_{ij1} = b_{ij}$ e $B = (b_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}} \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{R})$.

$$\mathfrak{b}(\vec{\boldsymbol{x}}, \vec{\boldsymbol{y}}) = \sum_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}} b_{ij} x_i y_j = (x_1, \cdots, x_m) B \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = x^T B y \in \mathbb{R}.$$

3. Differenziazione delle funzioni vettoriali

Nella differenziazione di funzioni a valori vettoriali, è importante ricordare che la *rappresentazione* di derivate e differenziali in generale *dipende* dalla scelta delle basi su dominio e codominio.

Definizione 3.1 (Rappresentazione di funzioni a valori vettoriali). Siano E_m, F_n due spazi vettoriali reali di dimensione finita con $\dim(E_m) = m$ e $\dim(F_n) = n$, e sia $\vec{\boldsymbol{G}} : E_m \to F_n$ una funzione qualunque. Supponiamo di fissare una base $\mathscr{B}_{E_m} = \{\vec{\boldsymbol{e}}_{\mathbf{1}}, \dots, \vec{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{m}}\}$ di E_m e una base $\mathscr{B}_{F_n} = \{\vec{\boldsymbol{f}}_{\mathbf{1}}, \dots, \vec{\boldsymbol{f}}_{\boldsymbol{n}}\}$ di F_n. Data una funzione $G : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ definita da

$$G(x_1, \dots, x_m) = \begin{pmatrix} G_1(x_1, \dots, x_m) \\ \vdots \\ G_n(x_1, \dots, x_m) \end{pmatrix},$$

diremo che G *rappresenta* $\vec{\boldsymbol{G}}$ rispetto alle basi $\mathscr{B}_{E_m}$ e $\mathscr{B}_{F_n}$ se dato $\vec{\boldsymbol{x}} \in E_m$ le cui componenti rispetto a $\mathscr{B}_{E_m}$ siano $(x_1, \dots, x_m)$, si ha che $G_i(x_1, \dots, x_m)$ è la i-esima componente rispetto a $\mathscr{B}_{F_n}$ del vettore $\vec{\boldsymbol{G}}(\vec{\boldsymbol{x}}) \in F_n$, ovvero se

$$\vec{\boldsymbol{G}}\left(\sum_{j=1}^{m} x_j \vec{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{i}}\right) = \sum_{i=1}^{n} G_i(x_1, \dots, x_m) \vec{\boldsymbol{f}}_{\boldsymbol{i}}.$$

Fissate le basi $\mathscr{B}_{E_m}$ e $\mathscr{B}_{F_n}$, ogni mappa $\vec{\boldsymbol{G}}$ ammette una ed una sola rappresentazione G (che dipende dalla scelta delle basi).

Proposizione 3.2 (Differenziale delle funzioni lineari e bilineari)**.** *Siano E, F, G tre spazi vettoriali di dimensione finita. Allora:*

(1) *per ogni $\ell : E \to F$ lineare, si ha*

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\partial \ell(\vec{\boldsymbol{x}})}{\partial \vec{\boldsymbol{w}}} &= \ell(\vec{\boldsymbol{w}}), \ \textit{per ogni } \vec{\boldsymbol{x}}, \vec{\boldsymbol{w}} \in E,\ \vec{\boldsymbol{w}} \neq 0 \\ D\ell(\vec{\boldsymbol{x}}) &= \ell, \ \textit{per ogni } \vec{\boldsymbol{x}} \in E \end{aligned}}$$

(2) *per ogni $\mathfrak{b} : E \times F \to G$ bilineare, si ha*

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \vec{\boldsymbol{z}}} \mathfrak{b}(\vec{\boldsymbol{x}}, \vec{\boldsymbol{y}}) &= \mathfrak{b}(\vec{\boldsymbol{x}}, \vec{\boldsymbol{w}}) + \mathfrak{b}(\vec{\boldsymbol{v}}, \vec{\boldsymbol{y}}), \ \textit{per ogni } (\vec{\boldsymbol{x}}, \vec{\boldsymbol{y}}), \vec{\boldsymbol{z}} \in E \times F,\ \vec{\boldsymbol{z}} = (\vec{\boldsymbol{v}}, \vec{\boldsymbol{w}}) \neq 0 \\ D\mathfrak{b}(\vec{\boldsymbol{x}}, \vec{\boldsymbol{y}})(\vec{\boldsymbol{v}}, \vec{\boldsymbol{w}}) &= \mathfrak{b}(\vec{\boldsymbol{x}}, \vec{\boldsymbol{w}}) + \mathfrak{b}(\vec{\boldsymbol{v}}, \vec{\boldsymbol{y}}), \ \textit{per ogni } (\vec{\boldsymbol{x}}, \vec{\boldsymbol{y}}), (\vec{\boldsymbol{v}}, \vec{\boldsymbol{w}}) \in E \times F \end{aligned}}$$

Dimostrazione.

(1) La prima uguaglianza deriva da

$$\lim_{h \to 0} \frac{\ell(\vec{\boldsymbol{x}} + h\vec{\boldsymbol{w}}) - \ell(\vec{\boldsymbol{x}})}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\ell(\vec{\boldsymbol{x}} + h\vec{\boldsymbol{w}} - \vec{\boldsymbol{x}})}{h} = \ell(\vec{\boldsymbol{w}}),$$

e questo, per il Teorema del Differenziale Totale, implica che $\ell(\cdot)$ sia differenziabile in $\vec{\boldsymbol{x}}$ e valga la seconda formula.

(2) Posto $\vec{\boldsymbol{z}} = (\vec{\boldsymbol{v}}, \vec{\boldsymbol{w}}) \in E \times F \setminus \{(0,0)\}$, calcoliamo

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \vec{\boldsymbol{z}}} \mathfrak{b}(\vec{\boldsymbol{x}}, \vec{\boldsymbol{y}}) :=& \lim_{h \to 0} \frac{\mathfrak{b}(\vec{\boldsymbol{x}} + h\vec{\boldsymbol{v}}, \vec{\boldsymbol{y}} + h\vec{\boldsymbol{w}}) - \mathfrak{b}(\vec{\boldsymbol{x}}, \vec{\boldsymbol{y}})}{h} \\ =& \lim_{h \to 0} \frac{\mathfrak{b}(\vec{\boldsymbol{x}}, \vec{\boldsymbol{y}}) + h\mathfrak{b}(\vec{\boldsymbol{v}}, \vec{\boldsymbol{y}}) + h\mathfrak{b}(\vec{\boldsymbol{x}}, \vec{\boldsymbol{w}}) + h^2\mathfrak{b}(\vec{\boldsymbol{v}}, \vec{\boldsymbol{w}}) - \mathfrak{b}(\vec{\boldsymbol{x}}, \vec{\boldsymbol{y}})}{h} \\ =& \mathfrak{b}(\vec{\boldsymbol{x}}, \vec{\boldsymbol{w}}) + \mathfrak{b}(\vec{\boldsymbol{v}}, \vec{\boldsymbol{y}}). \end{aligned}$$

In modo del tutto analogo al caso lineare, il Teorema del Differenziale Totale implica che $\mathfrak{b}(\cdot, \cdot)$ sia differenziabile in $(\vec{\boldsymbol{x}}, \vec{\boldsymbol{y}})$ e che valga la seconda formula.

Si osservi che tale risultato *non dipende* dalla base scelte su E, F o G. Per estendere tale risultato a spazi di dimensione infinita è necessario aggiungere l'ipotesi che $\ell(\cdot)$ e $\mathfrak{b}(\cdot, \cdot)$ siano continue (il che è automaticamente vero negli spazi di dimensione finita). □

Stabiliamo ora la relazione tra il differenziale di una funzione a valori vettoriali e la sua rappresentazione.

Proposizione 3.3. *Siano E_m, F_n due spazi vettoriali reali con* $\dim(E_m) = m$ *e* $\dim(F_n) = n$*, e sia $\vec{\boldsymbol{G}} : E_m \to F_n$ una funzione qualunque. Supponiamo di fissare una base $\mathscr{B}_{E_m} = \{\vec{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{1}}, \dots, \vec{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{m}}\}$ di E_m e una base $\mathscr{B}_{F_n} = \{\vec{\boldsymbol{f}}_{\boldsymbol{1}}, \dots, \vec{\boldsymbol{f}}_{\boldsymbol{n}}\}$ di F_n, e sia $G : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ che* *rappresenti $\vec{\boldsymbol{G}}$ rispetto alle basi scelte. Allora si ha*

$$\boxed{\frac{\partial \vec{\boldsymbol{G}}(\vec{\boldsymbol{x}})}{\partial \vec{\boldsymbol{v}}} = \sum_{\substack{i=1,\dots,n\\k=1,\dots,m}} \frac{\partial G_i(x_1,\dots,x_m)}{\partial x_k} v_k \vec{\boldsymbol{f}}_{\boldsymbol{i}}, \text{ per ogni } \vec{\boldsymbol{x}} = \sum_{i=1}^m x_i \vec{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{i}}, \text{ e } \vec{\boldsymbol{v}} = \sum_{i=1}^m v_i \vec{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{i}}}$$

$$\boxed{\vec{\boldsymbol{x}} \mapsto D\vec{\boldsymbol{G}}(\vec{\boldsymbol{x}}) \text{ è rappresentata da } (x_1,\dots,x_m) \mapsto \operatorname{Jac} G(x_1,\dots,x_m)}$$

ovvero la funzione $\vec{\boldsymbol{x}} \mapsto \dfrac{\partial \vec{\boldsymbol{G}}(\vec{\boldsymbol{x}})}{\partial \vec{\boldsymbol{v}}}$ *è rappresentata da*

$$(x_1,\dots,x_m) \mapsto \begin{pmatrix} \dfrac{\partial G_1(x_1,\dots,x_m)}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial G_1(x_1,\dots,x_m)}{\partial x_m} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial G_n(x_1,\dots,x_m)}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial G_n(x_1,\dots,x_m)}{\partial x_m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix} = \operatorname{Jac} G(x) \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix}$$

In particolare, $\vec{\boldsymbol{G}}$ è differenziabile in $\vec{\boldsymbol{x}}$ se e solo se G è differenziabile in $(x_1,\dots,x_m)$

Dimostrazione. Si ha

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \vec{\boldsymbol{G}}(\vec{\boldsymbol{x}})}{\partial \vec{\boldsymbol{v}}} &= \lim_{h\to 0} \frac{\vec{\boldsymbol{G}}(\vec{\boldsymbol{x}}+h\vec{\boldsymbol{v}}) - \vec{\boldsymbol{G}}(\vec{\boldsymbol{x}})}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^n G_i(x_1+hv_1,\dots,x_m+hv_m)\vec{\boldsymbol{f}}_{\boldsymbol{i}} - \sum_{i=1}^n G_i(x_1,\dots,x_m)\vec{\boldsymbol{f}}_{\boldsymbol{i}}}{h} \\
&= \sum_{i=1}^n \lim_{h\to 0} \left[\frac{G_i(x_1+hv_1,\dots,x_m+hv_m) - F_i(x_1,\dots,x_m)}{h} \right] \vec{\boldsymbol{f}}_{\boldsymbol{i}} \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m \frac{\partial G_i(x_1,\dots,x_m)}{\partial x_k} v_k \vec{\boldsymbol{f}}_{\boldsymbol{i}},
\end{aligned}$$

dato che rispetto a $\mathscr{B}_{E_m}$, il vettore $\vec{\boldsymbol{x}}+h\vec{\boldsymbol{v}}$ ha componenti $(x_1+hv_1,\dots,x_k+hv_k,\dots,x_m+hv_m)$. Il risultato segue dall'arbitrarietà di $\vec{\boldsymbol{v}}$. □

Corollario 3.4. *Siano E_m, F_n due spazi vettoriali reali con $\dim(E_m) = m$ e $\dim(F_n) = n$, e sia $\vec{\boldsymbol{G}} : E_m \to F_n$ una funzione qualunque. Fissiamo una base $\mathscr{B}_{E_m} = \{\vec{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{1}},\dots,\vec{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{m}}\}$ di E_m e una base $\mathscr{B}_{F_n} = \{\vec{\boldsymbol{f}}_{\boldsymbol{1}},\dots,\vec{\boldsymbol{f}}_{\boldsymbol{n}}\}$ di F_n, e sia $G : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ che rappresenti $\vec{\boldsymbol{G}}$ rispetto alle basi scelte. Supponiamo che esista $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenziabile tale per cui $G_i(x_1,\dots,x_m) = g(x_i)$. Allora per ogni $\vec{\boldsymbol{v}} \in E_m \neq \{0\}$ di componenti $(v_1,\dots,v_m)$ rispetto a $\mathscr{B}_{E_m}$, si ha che* $\vec{\boldsymbol{x}} \mapsto \dfrac{\partial \vec{\boldsymbol{G}}(\vec{\boldsymbol{v}})}{\partial \vec{\boldsymbol{v}}}$ *è rappresentata da*

$$(x_1,\dots,x_m) \mapsto \begin{pmatrix} g'(x_1) & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & g'(x_2) & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & g'(x_{m-1}) & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & g'(x_m) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^m g'(x_i) v_i$$

Corollario 3.5 (Rappresentazioni)**.** *Supponiamo $\dim(E) = m$, $\dim(F) = n$ e fissiamo due basi $\{\vec{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{1}},\dots,\vec{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{m}}\}$ su E e $\{\vec{\boldsymbol{f}}_{\boldsymbol{1}},\dots,\vec{\boldsymbol{f}}_{\boldsymbol{n}}\}$ su F. Supponiamo che rispetto alle basi scelte $\ell(\cdot)$ sia rappresentata dalla matrice $A_\ell = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,n\\j=1,\dots,m}} \in \operatorname{Mat}_{n\times m}(\mathbb{R})$.*

Si ottiene allora che $\dfrac{\partial \ell(\vec{\boldsymbol{x}})}{\partial \vec{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{k}}} = \ell(\vec{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{k}})$ *è rappresentata da*

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial x_k}\left[A_\ell \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} a_{1k} \\ \vdots \\ a_{nk} \end{pmatrix}}$$

dove riconosciamo al membro di destra la k-esima colonna di A.

Considerando tutte le derivate parziali, si ottiene che $D\ell(\vec{\boldsymbol{x}}) = \ell$ *è rappresentata da*

$$\boxed{\mathrm{Jac}\left[A_\ell \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}\right] = A_\ell}$$

Questo implica:

(1) *la relazione* $\dfrac{\partial \mathfrak{b}(\vec{\boldsymbol{x}}, \vec{\boldsymbol{y}})}{\partial(\vec{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{k}}, 0)} = \mathfrak{b}(\vec{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{k}}, \vec{\boldsymbol{y}})$ *è rappresentata nelle basi scelte da*

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\left[x^T B y\right] = \frac{\partial}{\partial x_k} \sum_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}} b_{ij} x_i y_j = \sum_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}} b_{ij} \delta_{ik} y_j = \sum_{j=1}^{n} b_{kj} y_j,$$

ovvero il prodotto tra la k-esima riga di B e il vettore delle componenti di $\vec{\boldsymbol{y}}$,

(2) *la relazione* $\dfrac{\partial \mathfrak{b}(\vec{\boldsymbol{x}}, \vec{\boldsymbol{y}})}{\partial(0, \vec{\boldsymbol{f}}_{\boldsymbol{h}})} = \mathfrak{b}(\vec{\boldsymbol{x}}, \vec{\boldsymbol{f}}_{\boldsymbol{h}})$ *è rappresentata nelle basi scelte da*

$$\frac{\partial}{\partial y_h}\left[x^T B y\right] = \sum_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}} b_{ij} x_i y_j = \sum_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}} b_{ij} x_i \delta_{jh} = \sum_{i=1}^{m} b_{ih} x_i,$$

ovvero il prodotto tra il vettore delle componenti di $\vec{\boldsymbol{x}}$ e la h-esima colonna di B.

(3) *la relazione* $D\mathfrak{b}(\vec{\boldsymbol{x}}, \vec{\boldsymbol{y}})(\vec{\boldsymbol{v}}, \vec{\boldsymbol{w}}) = \mathfrak{b}(\vec{\boldsymbol{x}}, \vec{\boldsymbol{w}}) + \mathfrak{b}(\vec{\boldsymbol{v}}, \vec{\boldsymbol{y}})$ *è rappresentata nelle basi scelte da*

$$\mathrm{grad}(x^T B y) = \begin{pmatrix} B \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \\ \hline B^T \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+m}.$$

Esercizio 2. Sia $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$, $A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$.

(1) Si definisca $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ponendo $h(x) := \langle x, Ax\rangle$, dove $\langle x, y\rangle$ indica il prodotto scalare di $\mathbb{R}^n$. Si calcoli $\nabla \cdot h(x) = \begin{pmatrix} \partial_{x_1} h(x) \\ \vdots \\ \partial_{x_m} h(x) \end{pmatrix}$.

(2) Si definisca $k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ponendo $k(x) := x \circ_H (Ax)$, dove $\circ_H$ indica il prodotto di Hadamard tra vettori di $\mathbb{R}^n$. Si calcoli $\mathrm{Jac}\, k(x)$.

Soluzione. Consideriamo l'applicazione lineare $\ell : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ definita da $\ell(x) = (x, x)$. Si ha

$$\ell(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{Id}_n \\ \hline \mathrm{Id}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

dove Id_n è la matrice identica su $\mathbb{R}^n$.

Sia ora $\mathfrak{b} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ l'applicazione definita da $\mathfrak{b}(x, y) = \langle x, Ay \rangle$. Si ottiene allora $h(x) = \mathfrak{b}(x, x)$ e tale mappa è chiaramente bilineare. Si ha

$$\mathfrak{b}(x, y) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j,$$

pertanto la matrice che rappresenta $\mathfrak{b}$ rispetto alla base canonica su $\mathbb{R}^n$ è proprio A.

Quindi $h(x) = \mathfrak{b} \circ \ell(x)$, e pertanto, per la regola delle funzioni composte

$$Dh(x) = D\mathfrak{b}(\ell(x)) \circ D\ell(x) = D\mathfrak{b}(x, x) \circ \ell,$$

ovvero per ogni $k = 1, \dots, n$ si ha

$$\begin{aligned} Dh(x)(e_k) &= D\mathfrak{b}(x, x) \circ \ell(e_k) = D\mathfrak{b}(x, x)(e_k, e_k) = \mathfrak{b}(e_k, x) + \mathfrak{b}(x, e_k) \\ &= \langle e_k, Ax \rangle + \langle x, Ae_k \rangle = \langle e_k, Ax \rangle + \langle e_k, A^T x \rangle = \langle (A + A^T)x, e_k \rangle, \end{aligned}$$

da cui

$$\boxed{\nabla \cdot [\langle x, Ax \rangle] = \nabla \cdot [x^T A x] = (A + A^T)x}$$

Se A è simmetrica, ovvero $A = A^T$, si ottiene $\nabla \cdot [x^T A x] = 2Ax$.

Nel secondo caso, sia $\mathfrak{h} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ l'applicazione definita da

$$\mathfrak{h}(x, y) = x \circ_H (Ay) = \mathrm{diag}(x) Ay.$$

Tale mappa è bilineare e vale

$$\mathfrak{h}(e_q, e_p) = \left(\sum_{i=1}^{n} \delta_{iq} e_i \right) \circ_H \left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \delta_{pj} e_i \right) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \delta_{pj} \delta_{iq} e_i = a_{qp} e_q.$$

Poiché $k(x) = \mathfrak{h} \circ \ell(x)$, per la regola delle funzioni composte

$$Dk(x) = D\mathfrak{h}(\ell(x)) \circ D\ell(x) = D\mathfrak{h}(x, x) \circ \ell,$$

da cui

$$\begin{aligned} Dk(x)(e_k) &= D\mathfrak{h}(x, x) \circ \ell(e_k) = D\mathfrak{h}(x, x) \circ (e_k, e_k) = \mathfrak{h}(e_k, x) + \mathfrak{h}(x, e_k) \\ &= e_k \circ_H (Ax) + x \circ_H Ae_k = \mathrm{diag}(e_k) Ax + \mathrm{diag}(x) Ae_k \\ &= (\mathrm{diag}(Ax) + \mathrm{diag}(x) A) \, e_k, \end{aligned}$$

ricordando che $\mathrm{diag}(u)v = \mathrm{diag}(v)u$. Poiché il risultato precedente vale per ogni k, si ha

$$\boxed{\mathrm{Jac}[x \circ_H (Ax)] = \mathrm{diag}(Ax) + \mathrm{diag}(x) A}$$

$\square$

Esercizio 3. Sia Ω aperto di $\mathbb{R}^m$ e consideriamo $A : \Omega \to \mathrm{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$. Allora se $v \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$ e $x \in \Omega$ si ha

$$\frac{\partial}{\partial v} \mathrm{det} A(x) = \sum_{i=1}^{n} \det(A_{D_i}(x)),$$

dove

$$A_{D_i}(x) := \left(\begin{array}{ccc} a_{11}(x) & \dots & a_{1n}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{(i-1)1}(x) & \dots & a_{(i-1)n}(x) \\ \hline \dfrac{\partial a_{i1}(x)}{\partial v} & \dots & \dfrac{\partial a_{in}(x)}{\partial v} \\ \hline a_{(i+1)1}(x) & \dots & a_{(i+1)n}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{array} \right),$$

ovvero $A_{D_i}(x)$ è la matrice $A(x)$ in cui la i-esima riga è rimpiazzata dalla sua derivata rispetto a v.

Soluzione. Ricordando che

$$\det(A(x)) = \sum_{i_1,\dots,i_n=1}^{n} \varepsilon_{i_1,\dots,i_n} a_{1i_1}(x) \cdot \ldots \cdot a_{ni_n}(x) = \sum_{i_1,\dots,i_n=1}^{n} \varepsilon_{i_1,\dots,i_n} \prod_{h=1}^{n} a_{hi_h}(x),$$

si ottiene

$$\frac{\partial}{\partial v}\det(A(x)) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i_1,\dots,i_n=1}^{n} \varepsilon_{i_1,\dots,i_n} \frac{\partial a_{ji_j}(x)}{\partial v} \prod_{\substack{h=1 \\ h\neq j}}^{n} a_{hi_h}(x) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i_1,\dots,i_n=1}^{n} \varepsilon_{i_1,\dots,i_n} \prod_{h=1}^{n} b^j_{hi_h}(x),$$

dove $b^j_{hk}(x) = a_{hk}(x)$ se $h \neq j$ e $b^j_{jk}(x) = \dfrac{\partial a_{jk}(x)}{\partial v}$. Definita per $j = 1, \dots, n$ la matrice $A_{D_j}(x) = (b^j_{hk}(x))_{h,k=1,\dots,n}$, si ha allora

$$\frac{\partial}{\partial v}\det(A(x)) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i_1,\dots,i_n=1}^{n} \varepsilon_{i_1,\dots,i_n} \prod_{h=1}^{n} b^j_{hi_h}(x) = \sum_{j=1}^{n} \det(A_{D_j}(x)).$$

Esercizio 4. Sia Ω aperto di $\mathbb{R}^m$ e consideriamo $\vec{\boldsymbol{v}}^{(k)} : \Omega \to \mathbb{R}^3$, $k = 1, 2$. Allora, scelta una base ortonormale $\{\vec{\boldsymbol{e}}_1, \vec{\boldsymbol{e}}_2, \vec{\boldsymbol{e}}_3\}$ di $\mathbb{R}^3$, per ogni $z \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ si ha

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial z}\left[\vec{\boldsymbol{v}}^{(1)}(x) \wedge \vec{\boldsymbol{v}}^{(2)}(x)\right] = \frac{\partial \vec{\boldsymbol{v}}^{(1)}(x)}{\partial z} \wedge \vec{\boldsymbol{v}}^{(2)}(x) + \vec{\boldsymbol{v}}^{(1)}(x) \wedge \frac{\partial \vec{\boldsymbol{v}}^{(2)}(x)}{\partial z}}$$

Soluzione. Per $k = 1, 2$ si ha

$$\vec{\boldsymbol{v}}^{(k)}(x) = \sum_{i=1}^{3} v_i^{(k)}(x)\vec{\boldsymbol{e}}_i, \qquad \frac{\partial \vec{\boldsymbol{v}}^{(k)}(x)}{\partial z} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial v_i^{(k)}(x)}{\partial z}\vec{\boldsymbol{e}}_i.$$

Ricordando che

$$\vec{\boldsymbol{v}}^{(1)}(x) \wedge \vec{\boldsymbol{v}}^{(2)}(x) = \sum_{i,j,k=1}^{3} \varepsilon_{i,j,k} v_j^{(1)}(x) v_k^{(2)}(x) \vec{\boldsymbol{e}}_i,$$

si ottiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z}\left[\vec{\boldsymbol{v}}^{(1)}(x) \wedge \vec{\boldsymbol{v}}^{(2)}(x)\right] &= \sum_{i,j,k=1}^{3} \varepsilon_{i,j,k} \frac{\partial v_j^{(1)}(x)}{\partial z} v_k^{(2)}(x)\vec{\boldsymbol{e}}_i + \sum_{i,j,k=1}^{3} \varepsilon_{i,j,k} v_j^{(1)}(x) \frac{\partial v_k^{(2)}(x)}{\partial z}\vec{\boldsymbol{e}}_i \\ &= \frac{\partial \vec{\boldsymbol{v}}^{(1)}(x)}{\partial z} \wedge \vec{\boldsymbol{v}}^{(2)}(x) + \vec{\boldsymbol{v}}^{(1)}(x) \wedge \frac{\partial \vec{\boldsymbol{v}}^{(2)}(x)}{\partial z}. \end{aligned}$$

Proposizione 3.6. *Siano E, F spazi vettoriali, e supponiamo* $\dim(E) = m$, $\dim(F) = n$. *Sia ora $\Omega \subseteq \mathbb{R}^p$ aperto, e supponiamo di avere un'applicazione $F : \Omega \to \mathscr{L}(E, F)$, $\vec{\boldsymbol{v}} : \Omega \to E$. Posto $\ell_x = F(x)$ si ha allora per ogni $k = 1, \dots, p$*

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial x_k}\left[\ell_x(\vec{\boldsymbol{v}}(x))\right] = \sum_{\substack{i=1,\dots,n\\ j=1,\dots,m}} \left(\frac{\partial a_{ij}(x)}{x_k} v_j(x) + a_{ij}(x)\frac{\partial v_j(x)}{x_k}\right)\vec{\boldsymbol{f}}_{\boldsymbol{i}}}$$

dove

- $A(x) = (a_{ij})_{\substack{i=1\dots n\\ j=1\dots m}} \in \mathrm{Mat}_{n\times m}(\mathbb{R})$ *rappresenta ℓ_x rispetto alla base $\mathscr{B}_{E'} \otimes \mathscr{B}_F$, ovvero*
$$\ell_x = \sum_{\substack{j=1\dots m\\ i=1\dots n}} a_{ij}(x)\, d\vec{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{j}} \otimes \vec{\boldsymbol{f}}_{\boldsymbol{i}},$$
(equivalentemente, per j fissato, la j-esima colonna di $A(x)$ corrisponde alle le componenti di $\ell_x(\vec{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{j}}) = F(x)(\vec{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{j}}) \in F$ rispetto alla base $\mathscr{B}_F$).
- $\vec{\boldsymbol{v}}(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^{m} v_i(x)\vec{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{i}}$.

Passando alle rappresentazioni, si ottiene

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial x_k}\left[A(x)\begin{pmatrix} v_1(x)\\ \vdots\\ v_m(x)\end{pmatrix}\right] = \frac{\partial A(x)}{\partial x_k}\begin{pmatrix} v_1(x)\\ \vdots\\ v_m(x)\end{pmatrix} + A(x)\begin{pmatrix} \dfrac{\partial v_1(x)}{\partial x_k}\\ \vdots\\ \dfrac{\partial v_m(x)}{\partial x_k}\end{pmatrix}}$$

Dimostrazione. Si ha
$$\ell_x(\vec{\boldsymbol{v}}(x)) = \sum_{\substack{i=1,\dots,n\\ j=1,\dots,m}} a_{ij}(x) v_j(x)\vec{\boldsymbol{f}}_{\boldsymbol{i}},$$
quindi, derivando,
$$\frac{\partial}{\partial x_k}\left[\ell_x(\vec{\boldsymbol{v}}(x))\right] = \sum_{\substack{i=1,\dots,n\\ j=1,\dots,m}} \left(\frac{\partial a_{ij}(x)}{x_k} v_j(x) + a_{ij}(x)\frac{\partial v_j(x)}{x_k}\right)\vec{\boldsymbol{f}}_{\boldsymbol{i}}.$$
Passando alle rappresentazioni,
$$\frac{\partial}{\partial x_k}\left[A(x)v(x)\right] = \frac{\partial A(x)}{\partial x_k}v(x) + A(x)\frac{\partial v(x)}{\partial x_k} \text{ dove } \frac{\partial v(x)}{\partial x_k} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial v_1(x)}{\partial x_k}\\ \vdots\\ \dfrac{\partial v_m(x)}{\partial x_k}\end{pmatrix}.$$
□

Corollario 3.7. *Scelto nel precedente $E = \mathrm{Mat}_{m\times p}(\mathbb{R})$, con base data dalle matrici elementari, se $A(x) = (a_{iq}(x))_{\substack{i=1,\dots,n\\ q=1,\dots,m}}$, $B(x) = (b_{qh}(x))_{\substack{q=1,\dots,m\\ h=1,\dots,p}}$, si ha*

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial x_k}\left(A(x)B(x)\right) = \frac{\partial A(x)}{\partial x_k}B(x) + A(x)\frac{\partial B(x)}{\partial x_k}}$$

Utilizzando l'associatività del prodotto di matrici, si ottiene
$$\frac{\partial}{\partial x_k}\left(A(x)B(x)C(x)\right) = \frac{\partial A(x)}{\partial x_k}B(x)C(x) + A(x)\frac{\partial B(x)}{\partial x_k}C(x) + A(x)B(x)\frac{\partial C(x)}{\partial x_k}.$$