Foglio 5

6 novembre 2014

Esercizio 1 (Punti 6). Sia V uno spazio vettoriale di dimensione 5, e sia $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ una base di V. Sia V_1 il sottospazio generato dai vettori $\{v_1, v_2 - v_1\}$ e V_2 il sottospazio generato da $\{v_3, 2v_4 + v_3, v_5 + v_3\}$. Si dimostri che $V = V_1 \oplus V_2$. Si trovino le dimensioni di V_1 e V_2.

Esercizio 2 (Punti 6). Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ si consideri la funzione $f_\alpha : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita da

$$[x,\ y,\ z]^T = [x + y + z,\ x - y + \alpha,\ (\alpha - 1)z]^T$$

1. per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$, f_α è un'applicazione lineare?
2. per tali valori determinare il nucleo e l'immagine di f_α
3. per tali valori, trovare tutti gli elementi $v \in \mathbb{R}^3$ tali che $f(v) = [-1,\ 1,\ 1]^T$

Esercizio 3 (Punti 6). Si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definita da $[x,\ y,\ z,\ t]^T \longmapsto [x + 2y - z + t,\ y - x + 2z,\ x - z - t]^T$.

1. Provare che f è un'applicazione lineare.
2. Determinare una base e la dimensione del nucleo e dell'immagine di f.
3. $v = [1 \quad 0 \quad -1 \quad -1]^T$ è un elemento del nucleo di f?
4. $w = [1 \quad 2 \quad 1]^T$ è un elemento dell'immagine di f?

Esercizio 4 (Punti 6). Si consideri il sottospazio di $\mathbb{R}^3$ $W = \{[x_1 \ \ x_2 \ \ x_3]^T \in \mathbb{R}^3 \mid 2x_1 + x_2 - x_3 = 0\}$. Trovare un sottospazio U di $\mathbb{R}^3$ tale che $W \oplus U = \mathbb{R}^3$. Determinare una base del sottospazio U.

Esercizio 5 (Punti 6). Sia V l' $\mathbb{R}$-spazio vettoriale delle matrici $n \times n$ a coefficienti reali.

1. Dimostrare che l'insieme S delle matrici simmetriche $n \times n$ è un sottospazio di V di dimensione $\frac{n(n+1)}{2}$.
2. Trovare un sottospazio T di V tale che $V = T \oplus S$. Determinare una base e la dimensione di T.