Note per Sistemi a Eventi Discreti

La definizione di segnale discreto

Tiziano Villa

11 Ottobre 2018

Si consideri un segnale della forma $e : \mathcal{R} \longrightarrow \{assente\} \cup X$, dove X e' un insieme qualsiasi di valori. Intuitivamente questo segnale e' discreto se e' assente per la maggior parte del tempo, e si possono contare in ordine i tempi in cui e' presente (cioe' non assume il valore di *assente*). Ogni volta che e' presente, si ha un evento discreto. Per esempio, se e e' presente per tutti i numeri razionali t, allora non diciamo che il segnale e' discreto, perche' i tempi in cui e' presente non possono essere contati in ordine (essi non sono una successione di eventi istantanei nel tempo, bensi' un insieme di eventi istantanei nel tempo).

Formalmente, se $T \subseteq \mathcal{R}$ e' l'insieme dei tempi in cui e e' presente, cioe' $T = \{t \in \mathcal{R} : e(t) \neq assente\}$, il **segnale** e e' **discreto** se c'e' una funzione iniettiva $f : T \longrightarrow \mathcal{N}$ che preserva l'ordine, cioe' $\forall t_1, t_2 \in T$ se $t_1 \leq t_2$ allora $f(t_1) \leq f(t_2)$. L'esistenza di tale funzione iniettiva garantisce che possiamo contare gli eventi secondo un ordine temporale.

Un **segnale** si dice **puro** se ad ogni istante di tempo e' *assente* (non c'e' nessun evento in quell'istante) o *presente* (c'e' un evento in quell'istante), cioe' non specifica un valore, ma solo l'informazione di essere presente o assente in un certo istante di tempo.

1. Si consideri il segnale puro $x : \mathcal{R} \longrightarrow \{presente, assente\}$ dato da

$$\forall t \in \mathcal{R}, x(t) = \begin{cases} \textit{presente} & \text{se } t \text{ e' un intero non-negativo} \\ \textit{assente} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Questo segnale e' discreto ?

Risposta.

Si. Dobbiamo costruire una funzione $f : T \longrightarrow \mathcal{N}$ iniettiva e che preserva l'ordine. Poiche' in questo caso l'insieme dei tempi in cui il segnale x e' presente e' $T = \mathcal{N}$, basta prendere come f la funzione identita' che e' iniettiva e preserva banalmente l'ordine.

2. Si consideri il segnale puro $y : \mathcal{R} \longrightarrow \{presente, assente\}$ dato da

$$\forall t \in \mathcal{R}, y(t) = \begin{cases} \textit{presente} & \text{se } t = 1 - 1/n \text{ per ogni intero positivo } n \\ \textit{assente} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Questo segnale e' discreto ?

Risposta.

Si. Dobbiamo costruire una funzione $f : T \longrightarrow \mathcal{N}$ iniettiva e che preserva l'ordine. Poiche' in questo caso l'insieme dei tempi in cui il segnale y e' presente e' $T = \{1-1/1, 1-1/2, 1-1/3, \ldots, 1-1/n, \ldots\} = \{0, 1/2, 2/3, \ldots$., possiamo definire f come

$$\forall t \in T : f(t) = n, \text{dove } t = 1 - 1/n$$

che e' iniettiva e preserva l'ordine.

3. Si consideri il segnale w che si ottiene dalla fusione dei due segnali precedenti x e y, cioe'

$$\forall t \in \mathcal{R}, w(t) = \begin{cases} \textit{presente} & \text{se } x(t) \text{ e' } \textit{presente} \text{ o } y(t) \text{ e' } \textit{presente} \\ \textit{assente} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Questo segnale e' discreto ?

Risposta.

No. Per essere w discreto dovrebbe esserci una funzione $f : T \longrightarrow \mathcal{N}$ iniettiva e che preserva l'ordine. Si noti che $1 \in T$ e che $1 - 1/n \in T, \forall n \in \mathcal{N}, n > 0$; inoltre $1 > 1 - 1/n, \forall n \in \mathcal{N}, n > 0$. Se f preserva l'ordine deve essere vero che

$$f(1) > f(1 - 1/n).$$

Ma $f(1 - 1/n)$ non ha un maggiorante in $\mathcal{N}$, poiche' $1 - 1/n$ non ha un maggiorante < 1, per $n \in \mathcal{N}, n > 0$. Quindi tale f non puo' esistere.

La conclusione e' che la proprieta' dei segnali di essere discreti non e' preservata dalla composizione.