FOGLIO 1

Da consegnare Giovedi 16 ottobre all'inizio della lezione.

Esercizio 1 (Punti 4). Si dimostri per induzione che $\sum_{i=0}^{n}(2i)^3 = 2n^2(n+1)^2$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Esercizio 2 (Punti 4). Si dimostri per induzione che $(1-\frac{1}{2^2})(1-\frac{1}{3^2})\dots(1-\frac{1}{n^2}) = \frac{n+1}{2n}$ per ogni $n \geq 2$.

Esercizio 3 (Punti 4). Si dimostri per induzione che $4^n \geq 1+3n$ per ogni intero $n \geq 1$.

Esercizio 4 (Punti 3). Trovare l'errore nella seguente "dimostrazione" per induzione:

Dimostrazione. Dimostriamo per induzione che tutti i punti del piano sono allineati, cioè dati n punti del piano, $(n \geq 1)$, esiste una retta che li contiene.
Passo Base $(n = 1)$: Dato un punto P_1, esiste sempre una retta che passa per P_1;
Passo induttivo: Si considerino $n+1$ punti del piano $P_1, \dots, P_n, P_{n+1}$. Per ipotesi induttiva esiste una retta r passante per $P_1, \dots, P_n$ e una retta s passante per $P_2, \dots P_n, P_{n+1}$. Consideriamo l'intersezione $r \cap s = \{P_2, \dots, P_n\}$. Ricordiamo che date due rette nel piano, esse o sono parallele, o hanno un punto in comune, o sono coincidenti. Nel nostro caso r e s hanno almeno due punti in comune (P_2 e P_n) e quindi concludiamo che r e s coincidono. Pertanto $P_1 \in s$ e quindi $P_1, \dots, P_n, P_{n+1}$ sono allineati $\square$

Esercizio 5 (Punti 4). Si disegnino nel piano cartesiano i punti z_1, z_2, z_3 corrispondenti alle soluzioni dell'equazione

$$z^3 - 8i = 0.$$

e calcolare l'area della figura di vertici z_1, z_2, z_3.

Esercizio 6 (Punti 4). Si trovino le soluzioni dell'equazione

$$z^3 - (i+1)z^2 + (1+4i)z - 1 - 3i = 0.$$

Esercizio 7 (Punti 3). Dati tre insiemi A, B, C, si dimostri che

(1) $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$
(2) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Esercizio 8 (Punti 4). Individuare nel piano cartesiano i punti $P = (x, y)$ tali che

(1) $x^2 + y^2 = 1$
(2) $|x + y| \leq 1$
(3) $|x| + |y| \leq 1$
(4) $|x| > |y|$

Date: 9 ottobre 2014.