Esercizi sugli studi di funzione

Studiare l'andamento e tracciare il grafico delle seguenti funzioni di x:

(**a**) $\dfrac{x-1}{x^2}$; (**b**) $\dfrac{x^4}{x^3+2}$; (**c**) $2\cos x - \sin^2 x$; (**d**) $x^3\, e^x$;

(**e**) $\log|e^x - 3x|$; (**f**) $\operatorname{arctg}\dfrac{2x+1}{|x|-1}$; (**g**) $(x^2+2x)\log|x|$; (**h**) $e^{\frac{1}{\sin x}}$;

(**i**) $|\operatorname{tg} x| - 2x$; (**j**) $\sqrt{|x^2+2x-3|} - x$; (**k**) $(x+1)\operatorname{arctg}|x|$; (**l**) $(|x|-1)e^{\frac{1}{x+1}}$.

(Per rendere più significativo l'esercizio, si consiglia di non leggere gli svolgimenti scritti e non osservare i grafici delle funzioni prima di aver provato a compierne personalmente lo studio, per quanto possibile.)

Risoluzione. Per ogni funzione f si seguirà, di massima, questo schema: dominio naturale; eventuali periodicità e parità; continuità; limiti notevoli; limitatezza; intersezioni del grafico con gli assi coordinati; segno; asintoti, e loro eventuali intersezioni col grafico; derivabilità, e calcolo di f'; punti stazionari; crescenza; estremanti locali; derivabilità ulteriore, e calcolo di f''; punti stazionari di f'; convessità; punti di flesso, e calcolo della "tangente inflessionale"; descrizione della regolarità di f. I grafici sono riportati alla fine.

(a) $[f(x) = \frac{x-1}{x^2}]$ Il dominio è dato da $x \neq 0$. La funzione non ha periodo ne' parità, è di classe $\mathcal{C}^\infty$ in ogni punto del dominio, si annulla in $x = 1$ ed è positiva per $x > 1$. Vale $\lim_{x\to\mp\infty} f(x) = 0^\mp$ e $\lim_{x\to 0^\mp} f(x) = -\infty$; pertanto la funzione è inferiormente illimitata ma, come si può intuire da quanto appena calcolato, si può dimostrare che essa è superiormente limitata.[1] Come visto, $y = 0$ è asintoto orizzontale a $\mp\infty$ (interseca il grafico di $f(x)$ in $x = 1$), e $x = 0$ è asintoto verticale bilatero. La derivata è $f'(x) = \frac{1\cdot x^2-(x-1)\cdot 2x}{x^4} = \frac{2-x}{x^3}$; vale $f'(x) = 0$ per $x = 2$, e $f'(x) > 0$ per $0 < x < 2$, pertanto f decresce strettamente per $x < 0$ e $x > 2$ e cresce strettamente per $0 < x < 2$, così che $x = 2$ è punto di massimo relativo (in realtà, come preannunciato, assoluto) stretto per f, con $f(2) = \frac{1}{4}$. La derivata seconda risulta $f''(x) = \frac{(-1)\cdot x^3-(2-x)\cdot 3x^2}{x^6} = 2\frac{x-3}{x^4}$; vale $f''(x) = 0$ per $x = 3$, e $f'(x) > 0$ per $x > 3$, pertanto f è strettamente concava per $x < 0$ e $0 < x < 3$ e strettamente convessa per $x > 3$, dunque $x = 3$ è un flesso, con quota $f(3) = \frac{2}{9}$ e pendenza $f'(3) = -\frac{1}{27}$.

(b) $[f(x) = \frac{x^4}{x^3+2}]$ Il dominio è dato da $x \neq -\sqrt[3]{2}$. La funzione non ha periodo ne' parità, è di classe $\mathcal{C}^\infty$ in ogni punto del dominio, vale $\lim_{x\to\mp\infty} f(x) = \mp\infty$ e $\lim_{x\to -\sqrt[3]{2}^\mp} f(x) = \mp\infty$, dunque è illimitata sia sopra

[1] Notando che (a) $f(x)$ è positiva se e solo se $x > 1$, (b) f è continua in tutto il suo dominio, (c) vale ad esempio $f(3) = \frac{2}{9}$, e (d) essendo $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0^+$, esiste $M > 3$ tale che $f(x) < \frac{1}{9}$ per ogni $x > M$, certamente il massimo assoluto di $f(x)$ sull'intervallo $[1, M]$ —che esiste per il Teorema di Weierstrass— è anche massimo assoluto per $f(x)$ su tutto il suo dominio.

che sotto. Si ha $f(0)=0$, $f(x)=0$ solo per $x=0$ e $f(x)>0$ per $x>-\sqrt[3]{2}$. La retta $x=-\sqrt[3]{2}$ è asintoto verticale bilatero, e non vi sono asintoti orizzontali. Poiché invece $\lim_{x\to\mp\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\mp\infty}\frac{x^4}{x^4+2x}=1$ e $\lim_{x\to\mp\infty}(f(x)-x)=\lim_{x\to\mp\infty}\frac{x^4-x^4-2x}{x^3+2}=0$, si ha che $y=x$ è asintoto obliquo per f a $\mp\infty$ (interseca il grafico di $f(x)$ quando $f(x)=x$, dunque solo in $x=0$). La derivata (dopo conti) è $f'(x)=\frac{x^3(x^3+8)}{(x^3+2)^2}$: vale $f'(x)=0$ per $x=0$ e $x=-2$, e $f'(x)>0$ per $x<-2$ oppure $x>0$: se ne deduce che $x=-2$ è punto di massimo locale (a quota $f(-2)=-\frac{8}{3}$) e $x=0$ punto di minimo locale (a quota $f(-2)=-\frac{8}{3}$). La derivata seconda (sempre dopo conti) è $f''(x)=\frac{12x^2(4-x^3)}{(x^3+2)^3}$: vale $f''(x)=0$ per $x=0$ e $x=\sqrt[3]{4}$, e $f''(x)>0$ per $-\sqrt[3]{2}<x<\sqrt[3]{4}$, pertanto $x=\sqrt[3]{4}$ è un flesso con quota $f(\sqrt[3]{4})=\frac{2\sqrt[3]{4}}{3}$ e pendenza $f'(\sqrt[3]{4})=\frac{4}{3}$.

(c) $[f(x)=2\cos x-\sin^2 x]$ La funzione ha dominio $\mathbb{R}$, periodo 2π ed è pari: conviene dunque studiarla in $[-\pi,\pi]$. Essa è ovunque $\mathcal{C}^\infty$, vale $f(-\pi)=f(\pi)=-2$ e $f(0)=0$; poiché $|f(x)|\le 2|\cos x|+|\sin^2 x|\le 3$, la funzione è limitata. Da $f(x)=\cos^2 x+2\cos x-1=0$ si ottiene $\cos x=-\sqrt{2}-1$ (impossibile) oppure $\cos x=\sqrt{2}-1$: posto $\alpha=\arccos(\sqrt{2}-1)$, poiché $0<\sqrt{2}-1<\frac{1}{2}$ si ha che $\frac{\pi}{3}<\alpha<\frac{\pi}{2}$, e vale $f(x)=0$ per $x=\pm\alpha$. Quanto al segno, la disequazione $f(x)=\cos^2 x+2\cos x-1>0$ è soddisfatta per $\cos x<-\sqrt{2}-1$ (impossibile) oppure $\cos x>\sqrt{2}-1$, vero per $-\alpha<x<\alpha$. La derivata risulta $f'(x)=-2\sin x-2\sin x\cos x=-2\sin x(1+\cos x)$: vale $f'(x)=0$ per $x=\pm\pi$ e $x=0$, e $f'(x)>0$ quando $\sin x<0$, ovvero per $-\pi<x<0$: se ne deduce che f cresce strettamente per $-\pi<x<0$ e decresce strettamente per $0<x<\pi$, dunque $x=\pm\pi$ e $x=0$ sono rispettivamente punti di minimo e massimo relativi (in realtà assoluti) a quota -2 e 2. La derivata seconda è $f''(x)=-2(\cos x(1+\cos x)+\sin x(-\sin x))=-2(2\cos x-1)(\cos x+1)$: vale $f''(x)=0$ per $x=\pm\pi$ e $x=\pm\frac{\pi}{3}$, e $f''(x)>0$ quando $\cos x<\frac{1}{2}$, ovvero per $-\pi<x<-\frac{\pi}{3}$ e $\frac{\pi}{3}<x<\pi$: dunque f è strettamente convessa all'esterno di $\pm\frac{\pi}{3}$ e strettamente concava all'interno, così che $x=\pm\frac{\pi}{3}$ sono flessi con quota $f(\pm\frac{\pi}{3})=\frac{1}{4}$ e pendenza $f'(\pm\frac{\pi}{3})=\mp\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

(d) $[f(x)=x^3\,e^x]$ Il dominio è tutto $\mathbb{R}$; la funzione non ha periodo ne' parità, ed è ovunque $\mathcal{C}^\infty$. Vale ovviamente $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$, mentre $\lim_{x\to-\infty}f(x)$ è in forma indeterminata $\infty\cdot 0$; tuttavia, posto $t=-x$ si ottiene $\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{t\to+\infty}(-t^3e^{-t})=-\lim_{t\to+\infty}\frac{t^3}{e^t}=0^-$. Con gli stessi ragionamenti usati per le funzioni studiate in precedenza, si conclude che $f(x)$ è superiormente illimitata ma inferiormente limitata. Si ha $f(0)=0$, $f(x)=0$ solo per $x=0$ e $f(x)>0$ per $x>0$. Come visto, la retta $y=0$ è asintoto orizzontale a $-\infty$; essendo $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}x^2e^x=+\infty$, non vi sono asintoti obliqui a $+\infty$ (era chiaro: la funzione cresce troppo rapidamente). La derivata risulta $f'(x)=3x^2e^x+x^3e^x=x^2(x+3)e^x$: vale $f'(x)=0$ per $x=-3$ e $x=0$, mentre $f'(x)>0$ per $x>-3$: se ne deduce che $x=-3$ è punto di minimo locale (in realtà assoluto) stretto, a quota $f(-3)=-\frac{27}{e^3}\sim 1{,}3$, mentre $x=0$ è semplicemente un flesso orizzontale. La derivata seconda risulta $f''(x)=2x(x+3)e^x+x^2 1e^x+x^2(x+3)e^x=x(x^2+6x+6)e^x$: vale $f''(x)=0$ per $x=0$, $x=-3-\sqrt{3}\sim-4{,}3$ e $x=-3+\sqrt{3}\sim-1{,}7$, e $f''(x)>0$ per $-3-\sqrt{3}<x<-3+\sqrt{3}$ oppure $x>0$: pertanto, oltre al già noto flesso orizzontale $x=0$, sono flessi anche i punti $x=-3\pm\sqrt{3}$.

(e) $[f(x)=\log|e^x-3x|]$ Il dominio è dato dagli $x\in\mathbb{R}$ tali che $e^x\neq 3x$. Ma il grafico di e^x e quello di $3x$ si intersecano o no? Imponendo alla retta tangente $y-e^c=e^c(x-c)$ di passare per l'origine si trova $c=1$ e la retta $y=ex$: essendo $3>e$ e l'esponenziale strettamente convesso, esisteranno esattamente due punti α e β (con $0<\alpha<1<\beta<2$ essendo $(e^x)_{x=2}=e^2>6=(3x)_{x=2}$) per cui $e^x\neq 3x$. Il dominio è dunque $\mathbb{R}\backslash\{\alpha,\beta\}$, ed in esso la funzione è di classe $\mathcal{C}^\infty$. I limiti notevoli sono $\lim_{x\to\mp\infty}f(x)=+\infty$ e $\lim_{x\to\alpha}f(x)=\lim_{x\to\beta}f(x)=-\infty$. Vale $f(0)=0$, mentre $f(x)=0$ se e solo se $|e^x-3x|=1$, cioè $e^x=3x-1$ (impossibile) o $e^x=3x+1$ (che accade per $x=1$ e $x=\gamma$ con $\beta<\gamma<2$, essendo $(e^x)_{x=2}=e^2>7=(3x+1)_{x=2}$); quanto a $f(x)>0$, esso vale quando $|e^x-3x|>1$, ovvero $e^x<3x-1$ (impossibile) o $e^x>3x+1$ (che accade per $x<0$ e $x>\gamma$). La funzione non ha asintoto obliquo a $-\infty$ (si noti che $f(x)\sim_{-\infty}\log|x|$) mentre ha $y=x$ come asintoto obliquo a $+\infty$ (infatti $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\log(e^x-3x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x-3}{e^x-3x}=1$ e $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-x)=\lim_{x\to+\infty}(\log(e^x-3x)-\log e^x)=\lim_{x\to+\infty}\log\frac{e^x-3x}{e^x}=0$), e da $f(x)=x$ si ha $|e^x-3x|=e^x$, ovvero $e^x-3x=-e^x$ (impossibile) o $e^x-3x=e^x$ (da cui $x=0$). La derivata è $f'(x)=\frac{e^x-3}{e^x-3x}$; si ha $f'(x)=0$ per $x=\log 3\sim 1,1$ e $f'(x)>0$ (cioè f strettamente crescente) per $\alpha<x<\log 3$ e $x>\beta$: dunque $x=\log 3$ è un punto di massimo locale, con $f(\log 3)=\log(3(\log 3-1))\sim\log\frac{1}{3}=-\log 3\sim-1,1$. Infine si ricava $f''(x)=-\frac{9}{(e^x-3x)^2}((x-2)e^x+3)$. Il confronto grafico tra le funzioni e^x e $-\frac{3}{x-2}$ risulta troppo delicato tra 0 e 2 (le due funzioni sono estremamente vicine; in particolare, in $x=0$ la seconda sta sopra la prima ma ha pendenza inferiore...), dunque conviene procedere come segue: considerando la funzione derivabile $\varphi(x)=(x-2)e^x+3$ si ha $\varphi'(x)=(x-1)e^x$, dunque $\varphi(x)$ ha minimo assoluto in $x=1$, in cui vale $\varphi(1)=3-e\sim 0,3>0$: dunque $\varphi(x)$ è sempre positiva, e ne deduciamo che $f''(x)<0$ (ovvero, f è concava) in ogni x del suo dominio.

(f) $[f(x) = \operatorname{arctg}\frac{2x+1}{|x|-1}]$ Il dominio è $\mathbb{R}\setminus\{\pm1\}$; la funzione non ha periodicità o parità, ed è $\mathcal{C}^\infty$ in tutto il suo dominio eccetto che in 0, ove è certamente continua ma non è detto sia derivabile (a causa della presenza di $|x|$). Inoltre, f è limitata perché $|f(x)| \leq \frac{\pi}{2}$ per ogni x nel dominio. I limiti notevoli sono $\lim_{x\to\mp\infty} f(x) = \mp\operatorname{arctg} 2$ (ove $\operatorname{arctg} 2 \sim 1,1$) e $\lim_{-1\mp} f(x) = \lim_{1\mp} f(x) = \mp\frac{\pi}{2}$. Si ha $f(0) = -\frac{\pi}{4}$ e $f(x) = 0$ se e solo se $x = -\frac{1}{2}$; si ha poi $f(x) > 0$ se e solo se $\frac{2x+1}{|x|-1} > 0$, il che è vero se e solo se $-1 < x < -\frac{1}{2}$ oppure $x > 1$. Come visto, la retta $y = \mp\operatorname{arctg} 2$ è asintoto orizzontale per $f(x)$ a $\mp\infty$; da $f(x) = -\operatorname{arctg} 2$ (risp. $f(x) = \operatorname{arctg} 2$) da si ricava la sola intersezione $x = \frac{1}{4}$ (risp. $x = -\frac{3}{4}$). Per $x \neq 0, \pm1$ si ricava $f'(x) = -\frac{2+\operatorname{sign} x}{5x^2+4x-2|x|+2)}$, ovvero $f'(x) = -\frac{1}{5x^2+6x+2}$ (se $x < 0$, $x \neq -1$) e $f'(x) = -\frac{3}{5x^2+2x+2}$ (se $x > 0$, $x \neq 1$): si noti che $f'(x) < 0$ per ogni tale x, dunque la funzione è strettamente decrescente negli intervalli $]-\infty, -1[$, $]-1, 1[$ e $]1, +\infty[$. Per il disegno, è interessante notare che $\lim_{x\to-1} f'(x) = -1$, $f'_-(0) = -\frac{1}{2}$, $f'_+(0) = -\frac{3}{2}$ (dunque, come si sospettava, f non è derivabile in 0) e $\lim_{x\to1} f'(x) = -\frac{1}{3}$. Infine, se $x < 0$ e $x \neq -1$ si ha $f''(x) = 2\frac{5x+3}{(5x^2+6x+2)^2}$, mentre se $x > 0$ e $x \neq 1$ si ha $f''(x) = 6\frac{5x+1}{(5x^2+6x+2)^2}$: vale $f''(x) = 0$ se e solo se $x = -\frac{3}{5}$, e $f''(x) > 0$ (dunque f è strettamente convessa) per $-\frac{3}{5} < x < 0$ oppure $x > 0$; in $x = -\frac{3}{5}$ la funzione ammette dunque un flesso, con $f(-\frac{3}{5}) = -\operatorname{arctg}\frac{1}{2} \sim -0,46$ e $f'(-\frac{3}{5}) = -5$.

(g) $[f(x) = (x^2 + 2x)\log|x|]$ La funzione non è periodica, non ha parità, ed ha come dominio $\mathbb{R}\setminus\{0\}$; vale poi, $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$ e (usando il noto $\lim_{t\to0^\pm} t\log|t| = 0^\mp$) $\lim_{x\to0^\pm} f(x) = 0^\mp$. Si ha $f(x) = 0$ se e solo se (nel dominio) $x^2 + 2x = 0$ oppure $\log|x| = 0$, ovvero se e solo se (nel dominio) $x = -2, -1, 1$. Vediamo ora il segno. Si ha $x^2 + 2x > 0$ se e solo se $x < -2$ oppure $x > 0$, mentre $\log|x| > 0$ se e solo se $|x| > 1$, cioè se e solo se $x < -1$ oppure $x > 1$: da ciò deduciamo che sarà $f(x) > 0$ se e solo se $x < -2$, $-1 < x < 0$ oppure $x > 1$. La funzione è di classe $\mathcal{C}^\infty$ nel suo dominio, ed è priva di asintoti lineari. La derivata risulta $f'(x) = (2x + 2)\log|x| + \frac{x^2+2x}{x} = 2(x + 1)\log|x| + x + 2$. Si ha allora $f'(x) = 0$ se e solo se $2(x + 1)\log|x| + x + 2 = 0$; se $x = -1$ ciò è falso, e se $x \neq -1$, dividendo per $x + 1$, ciò vale se e solo se $\log|x| = -\frac{x+2}{2(x+1)}$. La funzione al primo membro è la nota $\log|x|$ (il cui grafico si ottiene "riflettendo quello di $\log x$ rispetto all'asse y"), mentre la funzione al secondo membro è la funzione affine con asintoto orizzontale $y = -\frac{1}{2}$, asintoto verticale $x = -1$ e che vale -1 per $x = 0$; un semplice confronto grafico tra le due funzioni mostra chiaramente l'esistenza di tre punti a, b, c con $-2 < a < -1 < b < 0 < c < 1$ in cui i loro grafici si intersecano. Per il segno di $f'(x)$, notiamo che $f'(-1) = 1 > 0$; se invece $x \neq -1$, nel dividere per $x + 1$ bisogna fare attenzione al segno di quest'ultimo, e dunque se $x \gtrless -1$ si ha $f'(x) = 2(x + 1)\log|x| + x + 2 > 0$ se e solo se $\log|x| \gtrless -\frac{x+2}{2(x+1)}$. Usando ancora il suddetto confronto grafico, ricaviamo dunque che $f'(x) > 0$ se e solo se $a < x < b$ oppure $x > c$: ne deduciamo che $x = a$ e $x = c$ sono punti di minimo relativo, mentre $x = b$ è un punto di massimo relativo. È altresì interessante notare che $\lim_{x\to0^\pm} f'(x) = -\infty$: la funzione "si verticalizza" mentre tende a zero per $x \to 0$. Se si vuole (ma non era richiesto) si può derivare ulteriormente, ottenendo $f''(x) = 2\log|x| + 2\frac{x+1}{x} + 1 = 2\log|x| + \frac{3x+2}{x}$, che si può studiare coi metodi già usati per f'.

(h) $[f(x) = e^{\frac{1}{\sin x}}]$ Il dominio è $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}\pi = \{x : x \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$. La funzione è periodica di periodo 2π, dunque studiamola in $]-\pi, \pi[\setminus\{0\}$, in cui è di classe $\mathcal{C}^\infty$. I limiti notevoli sono $\lim_{x\to-\pi^+} f(x) = \lim_{x\to0^-} f(x) = 0^+$ e $\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to\pi^-} f(x) = +\infty$; la funzione è inferiormente limitata da 0 (infatti un esponenziale è sempre > 0), e per quanto appena visto si ha $0 = \inf(f)$. La derivata è $f'(x) = -\frac{\cos x}{\sin^2 x} e^{\frac{1}{\sin x}}$: si ha $f'(x) = 0$ per $\cos x = 0$, ovvero $x = \pm\frac{\pi}{2}$, e $f'(x) > 0$ per $\cos x < 0$, ovvero $-\pi < x < -\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2} < x < \pi$. Dunque f ha un punto di massimo in $-\frac{\pi}{2}$ (con $f(-\frac{\pi}{2}) = 1/e$) e un punto di minimo in $\frac{\pi}{2}$ (con $f(\frac{\pi}{2}) = e$). Per il disegno, si noti che $\lim_{x\to-\pi^+} f'(x) = 0^+$ e $\lim_{x\to0^-} f'(x) = 0^-$ (basta porre $t = \frac{1}{\sin x}$). Infine, si calcola $f''(x) = -\frac{\sin^3 x+\sin^2 x-2\sin x-1}{\sin^4 x} e^{\frac{1}{\sin x}}$. Posto $u = \sin x$, consideriamo il polinomio $P(u) = u^3 + u^2 - 2u - 1$: derivando si ottiene $P'(u) = 3u^2 + 2u - 2$, dunque P cresce per $u < -\frac{\sqrt{7}+1}{2} \sim -1,8$ e $u > \frac{\sqrt{7}-1}{2} \sim 0,8$, ed essendo $\lim_{u\to\mp\infty} P(u) = \mp\infty$, $P(-2) = -1$, $P(-1) = 1$ e $P(0) = P(1) = -1$, per il Teorema degli Zeri le tre soluzioni $a < b < c$ di $P(u) = 0$ (si noti che non ci sono radici multiple, perché $P(u)$ e $P'(u)$ non hanno radici comuni) soddisferanno $a < -1 < b < 0 < 1 < c$. Pertanto $f''(x) = -\frac{(\sin x-a)(\sin x-b)(\sin x-c)}{\sin^4 x} e^{\frac{1}{\sin x}}$ ove vale sempre $\sin x - a > 0$ e $\sin x - c < 0$. Ne ricaviamo che $f''(x) = 0$ se e solo se $\sin x = b$ (da cui $x = \arcsin b < 0$ e $x = -\pi - \arcsin b$), e $f''(x) = 0$ se e solo se $\sin x > b$ (da cui $-\pi < x < -\pi - \arcsin b$, $\arcsin b < x < 0$ e $0 < x < \pi$): pertanto $-\pi - \arcsin b$ e $\arcsin b$ sono flessi, collocati tra $-\pi$ e 0; in essi f vale $e^{\frac{1}{b}} < 1$ e f' vale $\pm\frac{\sqrt{1-b^2}}{b^2} e^{\frac{1}{b}}$.

(i) $[f(x) = |\operatorname{tg} x| - 2x]$ Studiamo la funzione in $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Vale $\lim_{-\frac{\pi}{2}^+} f(x) = \lim_{\frac{\pi}{2}^-} f(x) = +\infty$. Si ha $f(x) \geq 0$ se e solo se $|\operatorname{tg} x| \geq 2x$, ed un semplice confronto grafico mostra che esiste un unico punto a in $]0, \frac{\pi}{2}[$ (ma più vicino a $\frac{\pi}{2}$ che a 0) tale che $f(x) = 0$ per $x = 0$ e $x = a$, $f(x) < 0$ per $0 < x < a$ e

$f(x)>0$ per $-\frac{\pi}{2}<x<0$ oppure $a<x<\frac{\pi}{2}$. La derivata è $f'(x)=\frac{1}{\cos^2 x}-2=\frac{1-2\cos^2 x}{\cos^2 x}$ se $x>0$, ed è $f'(x)=-\frac{1}{\cos^2 x}-2=-\frac{1+2\cos^2 x}{\cos^2 x}$ se $x<0$: dunque, se $x<0$ la funzione è strettamente decrescente, mentre per $x>0$ essa ha punti stazionari per $1-2\cos^2 x=0$, ovvero per $\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}$, che dà $x=\frac{\pi}{4}$, ed è strettamente crescente se $1-2\cos^2 x>0$, ovvero per $\cos x<\frac{\sqrt{2}}{2}$, ovvero per $\frac{\pi}{4}<x<\frac{\pi}{2}$. Dunque $x=\frac{\pi}{4}$ è un punto di minimo relativo (che vale $f(\frac{\pi}{4})=1-\frac{\pi}{2}\sim -0,5$). Nel punto $x=0$ la funzione non è derivabile; tuttavia, poiché essa è decrescente subito prima e subito dopo, tale punto non sarà d'estremo locale. Si ha inoltre $f'_-(0)=-1-2=-3$ e $f'_+(0)=1-2=-1$. La derivata seconda è $f''(x)=2\frac{\sin x}{\cos^3 x}>0$ se $x>0$, ed è $f''(x)=-2\frac{\sin x}{\cos^3 x}>0$ se $x<0$: dunque la funzione è strettamente convessa sia per $x<0$ che per $x<0$, e poiché $f'_-(0)=-3<f'_+(0)=-1$ lo è anche in $x=0$.
Sul resto del dominio naturale, la funzione tende a $+\infty$ in tutti i punti $\frac{\pi}{2}+k\pi$ (con $k\in\mathbb{Z}$); inoltre essa ha dei punti di minimo locale in $x_k=\frac{\pi}{4}+k\pi$, con $f(x_k)=1-\frac{\pi}{2}-2k\pi$. Si noti che tutti questi minimi del grafico giacciono sulla retta $y=-2x+1$ (infatti da $x=\frac{\pi}{4}+k\pi$ e $y=1-\frac{\pi}{2}-2k\pi$, eliminando k si ottiene $y=1-\frac{\pi}{2}-2\pi\frac{1}{\pi}(x-\frac{\pi}{4})=-2x+1$).

(j) $[f(x)=\sqrt{|x^2+2x-3|}-x]$ Il dominio di f è tutto $\mathbb{R}$ (grazie al modulo, l'argomento della radice è sempre ≥ 0). La funzione non ha periodo ne' parità, ed è certamente continua ovunque; inoltre, nei punti in cui $x^2+2x-3\neq 0$ (ovvero per $x\neq -3$ e $x\neq 1$) essa è anche $\mathcal{C}^\infty$. A tal proposito conviene notare subito che $x^2+2x-3\geq 0$ per $x\leq -3$ oppure $x\geq 1$, perciò in tal caso vale $f(x)=\sqrt{x^2+2x-3}-x$; invece, quando $-3<x<1$ si ha $f(x)=\sqrt{3-2x-x^2}-x$, e nei punti di passaggio vale $f(-3)=3$ e $f(1)=-1$; vale inoltre $f(0)=\sqrt{3}$. Si ha poi $f(x)=0$ quando $\sqrt{|x^2+2x-3|}=x$; nell'ipotesi $x\geq 0$ ciò equivale a $|x^2+2x-3|=x^2$, ovvero $x^2+2x-3=x^2$, da cui $x=\frac{3}{2}>0$ (accettabile), oppure $x^2+2x-3=-x^2$, da cui $x=\frac{\sqrt{7}-1}{2}>0$ (accettabile) e $x=\frac{-\sqrt{7}-1}{2}<0$ (non accettabile). Pertanto il grafico di f interseca l'asse x nei due punti $x=\frac{\sqrt{7}-1}{2}\sim 0{,}8$ e $x=\frac{3}{2}$. Passando al segno, vale $f(x)>0$ quando $\sqrt{|x^2+2x-3|}>x$; se $x<0$ ciò è sempre vero, mentre se $x\geq 0$ ciò equivale a $|x^2+2x-3|\geq x^2$, ovvero $x^2+2x-3>x^2$, da cui $x>\frac{3}{2}$ (accettabile), oppure $x^2+2x-3<-x^2$, da cui $\frac{-\sqrt{7}-1}{2}<x<\frac{\sqrt{7}-1}{2}$ (accettabile solo l'intervallo $0<x<\frac{\sqrt{7}-1}{2}$). Pertanto il grafico di f sta sopra l'asse x quando $x<\frac{\sqrt{7}-1}{2}$ e $x>\frac{3}{2}$.
Si ha $\lim_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$ (entrambi gli addendi tendono a $+\infty$), mentre $\lim_{x\to+\infty}f(x)$ è in forma indeterminata $+\infty-\infty$; moltiplicando e dividendo per $\sqrt{x^2+2x-3}+x$ si ottiene però $\lim_{x\to+\infty}\frac{(x^2+2x-3)-x^2}{\sqrt{x^2+2x-3}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x(2-3/x)}{x(\sqrt{1+2/x-3/x^2}+1)}=1$. Pertanto la retta $y=1$ è asintoto orizzontale solo a $+\infty$; le sue intersezioni col grafico di $f(x)$ sono date dall'equazione $f(x)=1$, ovvero $\sqrt{|x^2+2x-3|}=x+1$, che nell'ipotesi $x+1\geq 0$, cioè $x\geq -1$, equivale a $|x^2+2x-3|=(x+1)^2=x^2+2x+1$, ovvero $x^2+2x-3=x^2+2x+1$ (impossibile) oppure $x^2+2x-3=-(x^2+2x+1)$, cioè $x^2+2x-1=0$, con soluzioni $x=-1\pm\sqrt{2}$ delle quali l'unica accettabile (perché ≥ -1) è $x=\sqrt{2}-1\sim 0{,}4$. A questo punto resta da indagare l'eventuale presenza di un asintoto obliquo a $-\infty$, pertanto calcoliamo $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+2x-3}-x}{x}$ che è in forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$; tuttavia, raccogliendo x^2 sotto radice e notando che $\sqrt{x^2}=|x|=-x$ (infatti x sta tendendo a $-\infty$) si ottiene $\lim_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{1+2/x-3/x^2}-x}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-\sqrt{1+2/x-3/x^2}-1}{1}=-2$. Va calcolato ora $\lim_{x\to-\infty}(f(x)+2x)=\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{|x^2+2x-3|}+x)$, in forma indeterminata $+\infty-\infty$; moltiplicando e dividendo per $\sqrt{x^2+2x-3}-x$ si ottiene $\lim_{x\to-\infty}\frac{(x^2+2x-3)-x^2}{\sqrt{x^2+2x-3}-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x(2-3/x)}{-x(\sqrt{1+2/x-3/x^2}+1)}=-1$. Pertanto la retta $y=-2x-1$ è asintoto obliquo a $-\infty$, e interseca il grafico di $f(x)$ nel solo punto $x=-\sqrt{2}-1\sim -2{,}4$ (procedere come per le intersezioni con l'asintoto $y=1$).
Passiamo finalmente al calcolo della derivata. Se $x<-3$ oppure $x>1$ vale $f'(x)=\frac{2x+2}{2\sqrt{x^2+2x-3}}-1=\frac{x+1-\sqrt{x^2+2x-3}}{\sqrt{x^2+2x-3}}$: con calcoli simili a quelli già fatti si ottiene che $f'(x)\geq 0$ per $x\geq\sqrt{2}-1$, dunque f è strettamente decrescente per $x<-3$ e strettamente crescente per $x>1$. Invece, per $-3<x<1$ vale $f'(x)=\frac{-2x-2}{2\sqrt{3-2x-x^2}}-1=-\frac{x+1+\sqrt{3-2x-x^2}}{\sqrt{3-2x-x^2}}$, e si trova che $f'(x)\geq 0$ per $-3<x\leq-\sqrt{2}-1$: dunque f è strettamente crescente per $-3<x<-\sqrt{2}-1$ e strettamente decrescente per $-\sqrt{2}-1<x<1$, e il punto $x=-\sqrt{2}-1$ è di massimo relativo con quota $f(-\sqrt{2}-1)=2\sqrt{2}+1\sim 3{,}8$. Da quanto detto, infine, i punti di passaggio $x=-3$ e $x=1$ sono di minimo relativo; in essi la funzione è continua ma non derivabile, in quanto $\lim_{x\to-3^\mp}f'(x)=\lim_{x\to1^\mp}f'(x)=\pm\infty$ (verificarlo): detto con altre parole, in tali punti il grafico assume pendenza infinita.

(k) $[f(x)=(x+1)\operatorname{arctg}|x|]$ Il dominio della funzione è tutto $\mathbb{R}$, ed in esso $f(x)$ è di classe $\mathcal{C}^\infty$ in tutti i punti diversi da 0; invece in $x=0$, a causa di $|x|$, essa è continua ma probabilmente non derivabile. Limiti notevoli: $\lim_{x\to\mp\infty} f(x) = \mp\infty$. Vale $f(0) = 0$ e $f(x) = 0$ per $x = -1$ e $x = 0$; poiché $\mathrm{arctg}\,|x| > 0$ per ogni $\neq 0$, si ha $f(x) > 0$ per $x > -1$ ma $x \neq 0$. Per gli asintoti, vale $\lim_{x\to\mp\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\mp\infty} \frac{x+1}{x} \mathrm{arctg}\,|x| = \frac{\pi}{2}$, e $\lim_{x\to\mp\infty}(f(x) - \frac{\pi}{2}x = \lim_{x\to\mp\infty}(\frac{\mathrm{arctg}\,|x|-\pi/2}{1/x} + \mathrm{arctg}\,|x|) = \frac{\pi}{2} \pm 1$ (si può usare de l'Hôpital): dunque $y = x + \frac{\pi}{2} \pm 1$ è asintoto a $\mp\infty$. Quando $x \neq 0$, la derivata è $f'(x) = \mathrm{arctg}\,|x| + \frac{x+1}{x^2+1} \mathrm{sign}\, x = (\mathrm{sign}\, x)(\mathrm{arctg}\, x + \frac{x+1}{x^2+1})$. (Si noti subito che $\lim_{x\to 0^-} f'(x) = -1 = f'_-(0)$ e $\lim_{x\to 0^+} f'(x) = 1 = f'_+(0)$, dunque 0 è un punto angoloso.) Prepariamoci ad un confronto grafico tra $\mathrm{arctg}\, x$ e $\psi(x) = -\frac{x+1}{x^2+1}$. La funzione $\psi(x)$ si studia facilmente (definita su tutto $\mathbb{R}$; nulla per $x = -1$ e positiva per $x < -1$; infinitesima a $\pm\infty$; la derivata è $\psi'(x) = \frac{x^2+2x-1}{(x^2+1)^2}$, dunque ψ è strettamente crescente per $x < -\sqrt{2} - 1 \sim -2,4$ e $x > \sqrt{2} - 1 \sim 0,4$, con massimo assoluto in $-\sqrt{2} - 1$ (che vale $f(-\sqrt{2} - 1) = \frac{1}{2}(\sqrt{2} - 1) \sim 0,2$) e minimo assoluto in $\sqrt{2} - 1$ (che vale $f(\sqrt{2} - 1) = \frac{1}{2}(-\sqrt{2} - 1) \sim -1,2$). È dunque chiaro che $\mathrm{arctg}\, x$ e $\psi(x)$ si incontrano se e solo se $x = a$ per un certo $-1 < a < 0$ (si ha $a \sim -0,46$). Perciò $f'(x) = 0$ per $x = a$, e $f'(x) > 0$ per $x < a$ oppure $x > 0$: in $x = a$ si avrà allora un punto di massimo locale (con $f(a) = -(a+1)\mathrm{arctg}\, a = (a+1)\frac{a+1}{a^2+1} = 1 + \frac{2a}{a^2+1} \sim 0,23$). Derivando ancora, sempre per $x \neq 0$ si ottiene $f''(x) = -2\,(\mathrm{sign}\, x)\frac{x-1}{(x^2+1)^2}$: vale $f''(x) = 0$ per $x = 1$ e $f''(x) > 0$ (perciò f è strettamente convessa) per $0 < x < 1$, dunque 1 è un flesso (con $f(1) = \frac{\pi}{2}$ e $f'(1) = \frac{\pi}{4} + 1$).

(l) $[f(x) = (|x| - 1)e^{\frac{1}{x+1}}]$ Il dominio della funzione è $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$. In esso, $f(x)$ è di classe $\mathcal{C}^\infty$ in tutti i punti diversi da 0, mentre in $x = 0$ (a causa della presenza di $|x|$) essa è continua ma, probabilmente, non derivabile. I limiti notevoli sono $\lim_{x\to\mp\infty} f(x) = +\infty$ (si noti che $e^{\frac{1}{x+1}}$ tende a 1), $\lim_{x\to -1^-} f(x) = 0^+$ e $\lim_{x\to -1^+} f(x) = -\infty$ (si faccia attenzione ai segni; nel secondo caso la forma indeterminata $0 \cdot \infty$ del limite, che diventa $\lim_{x\to -1^+}(-x - 1)e^{\frac{1}{x+1}}$, si risolve col cambio $t = \frac{1}{x+1}$). Si ha $f(0) = -e$, $f(x) = 0$ per $x = 1$ (si ricordi che $x \neq -1$) e $f(x) > 0$ per $|x| > 1$, ovvero per $x < -1$ oppure $x > 1$. Si ha $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{x-1}{x}e^{\frac{1}{x+1}} = 1$, e $\lim_{x\to+\infty}(f(x) - x)) = \lim_{x\to+\infty}(x(e^{\frac{1}{x+1}} - 1) - e^{\frac{1}{x+1}}) = 0$ (si ponga $t = \frac{1}{x+1}$ e si ricordi che $\lim_{t\to 0} \frac{e^t-1}{t} = 1$), da cui l'asintoto $y = x$ a $+\infty$. In modo analogo, a $-\infty$ (notando che $|x| = -x$) si trova l'asintoto $y = -x - 2$. La derivata risulta $f'(x) = -\frac{x}{x+1}e^{\frac{1}{x+1}}$ (se $x < 0$, $x \neq -1$) e $f'(x) = \frac{x^2+x+2}{(x+1)^2}e^{\frac{1}{x+1}}$ (se $x > 0$): si noti che f' non si annulla mai (in 0 non è definita) e $f'(x) > 0$ (ovvero, f è strettamente crescente) se e solo se $-1 < x < 0$ oppure $x > 0$; si ha $f'_-(0) = 0$ e $f'_+(0) = 2$, dunque come previsto 0 è un punto angoloso. Derivando ulteriormente si ottiene infine $f''(x) = -\frac{1}{(x+1)^3}e^{\frac{1}{x+1}}$ (se $x < 0$, $x \neq -1$) e $f''(x) = -\frac{3x+5}{(x+1)^4}e^{\frac{1}{x+1}}$ (se $x > 0$): dunque f'' non si annulla mai e $f''(x) > 0$ (ovvero f è strettamente convessa) se e solo se $x < 1$.

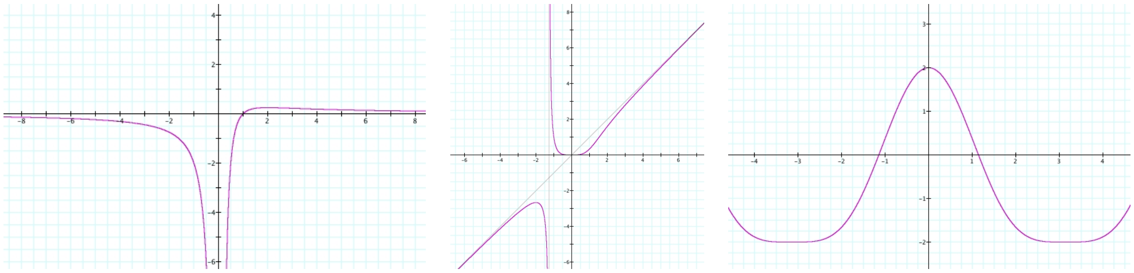

Grafico di **(a)** $\frac{x-1}{x^2}$, **(b)** $\frac{x^4}{x^3+2}$, **(c)** $2\cos x - \sin^2 x$.

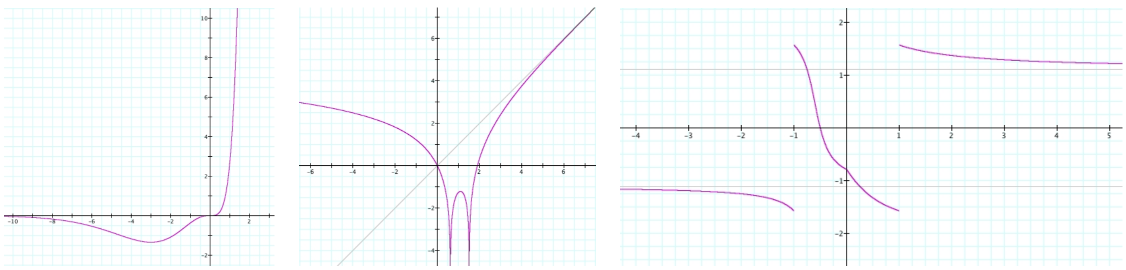

Grafico di **(d)** $x^3 e^x$, **(e)** $\log|e^x - 3x|$, **(f)** $\operatorname{arctg} \frac{2x+1}{|x|-1}$.

Grafico di **(g)** $(x^2+2x)\log|x|$, **(h)** $e^{\frac{1}{\sin x}}$, **(i)** $|\operatorname{tg} x| - 2x$.

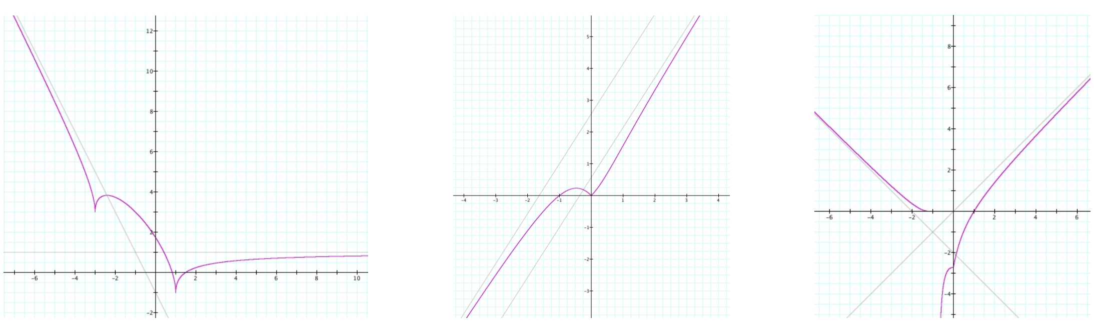

Grafico di **(j)** $\sqrt{|x^2+2x-3|} - x$, **(k)** $(x+1)\operatorname{arctg}|x|$, **(l)** $(|x|-1)e^{\frac{1}{x+1}}$.