Matematica – Autoverifica n. 1

Equazioni e disequazioni - Funzioni - Numeri reali - Algebra lineare

Università di Verona - Laurea in Biotecnologie - A.A. 2009/10

martedì 20 ottobre 2009

Istruzioni generali. **(1)** Risolvere i quesiti senza guardare lo svolgimento <u>che sarà fornito lunedì 26/10</u>. **(2)** Al termine, autovalutare la propria risoluzione con l'ausilio dello svolgimento indicato. **(3)** Una volta terminata l'autovalutazione, collegandosi via web al sito `http://docenti.math.unipd.it/maraston/FormValut_0910/compito11.php` a partire dal <u>pomeriggio di lunedì 26/10 e fino al venerdì seguente</u> sarà possibile <u>comunicare via web</u> in forma anonima i risultati dell'autovalutazione esercizio per esercizio, assieme ad eventuali commenti: queste informazioni serviranno al docente come riscontro del grado di comprensione generale delle nozioni insegnate.
Istruzioni per l'autovalutazione. **Ex. 1:** 28 pt (4×7 pt). **Ex. 2:** 22 pt (6+16 pt). **Ex. 3:** 24 pt (4×6 pt). **Ex. 4:** 26 pt (10+16 pt). **Totale:** 100 pt. Lo studente valuti da sè quanto assegnarsi per un'eventuale risoluzione solo parziale dei singoli quesiti.
Consigli. Questa verifica vuole aiutare lo studente a capire il proprio grado di comprensione degli argomenti trattati a lezione, dunque andrebbe svolta individualmente con impegno, usando lo svolgimento fornito solo per l'autovalutazione e per rendersi conto delle difficoltà incontrate nel lavoro solitario. Inoltre, per provare l'impegno di un esame, la verifica andrebbe affrontata col minor numero possibile di interruzioni (ad es. in una seduta da 3 ore, o in due sedute da 2 ore).

---

(1) Risolvere le seguenti disequazioni in $x \in \mathbb{R}$ (il logaritmo è in base naturale $e = 2,71828...$).

$$\frac{|x-5|-|1-x^2|}{|x+1|-3} < 1; \qquad \sin 2x < \cos x; \qquad \frac{2\operatorname{tg} x\ -3}{\sqrt{2}\cos x + 1} \leq 0; \qquad \log\left(\frac{1-2x}{x+1}\right) \leq 2.$$

(2) (a) Siano $X = \{1,2,3,4,5\}$, $Y = \{a,b,c,d\}$ e $f : X \to Y$ la funzione data da $f(1) = b$, $f(2) = d$, $f(3) = d$, $f(4) = d$, $f(5) = a$. Cos'è l'immagine di f? f è iniettiva? f è suriettiva? Chi sono $f(\{2,3,5\})$, $f^{-1}(\{a,d\})$, $f^{-1}(\{c\})$? Si può corestringere f a $\{a,c,d\}$? Per quali sottoinsiemi non vuoti A del dominio la restrizione di f ad A è iniettiva?

(b) Sia $g : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ la funzione $g(x) = \sqrt{\frac{x+2}{x}}$. Dimostrare che g è iniettiva. Calcolare $g^{-1}(]-2,3])$. Calcolare la fibra[1] $g^{-1}(y)$ per ogni $y \in \mathbb{R}$, e dedurne cosa sia l'immagine $B = g(\mathbb{R}_{>0})$. Calcolare la funzione inversa $g^{-1} : B \to \mathbb{R}_{>0}$.

(3) Dire (dimostrandolo) se i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ sono limitati superiormente e/o inferiormente oppure no, e calcolarne, ove possibile, sup/inf e max/min.

$$A_1 = (\,[-\pi, 0[\ \cup\ [-1, +\infty[\,)\ \cap\ \mathbb{Q}_{\geq -4}; \qquad A_2 = \{-4 + \frac{(-1)^n}{n+1} : n \in \mathbb{N}\};$$

$$A_3 = \mathbb{Z}_{\geq -2}\ \cap\ [-\sqrt{2}, +\infty[; \qquad A_4 = \{x \in \mathbb{R} : 4 - x - x^2 > 0\}\ \cup\ \{(-3)^n : n \in \mathbb{Z}\}.$$

[1] Data una funzione $g : A \to B$ ed un elemento $y \in B$, la *fibra* $g^{-1}(y)$ è definita come l'antiimmagine $g^{-1}(\{y\})$, ovvero $g^{-1}(y) = \{x \in A : g(x) = y\}$.

(4) (a) Consideriamo nel piano cartesiano i punti $P_{\vec{a}} = (2,1)$ e $Q_{\vec{b}} = (1,-3)$ ed il vettore $\vec{v} = (4,-1)$. Trovare le forme parametriche e cartesiane della retta s passante per P e Q, della retta r passante per P e parallela a $\vec{v}$ e della retta r' passante per Q e ortogonale a $\vec{v}$. Trovare una forma parametrica della retta s' di equazione cartesiana $3x + 2y + 3 = 0$ e le distanze di P e Q da s'.

(b) Nello spazio cartesiano si disegnino i vettori $\vec{v} = (-1,0,2)$ e $\vec{w} = (1,3,-1)$. Calcolare i moduli $|\vec{v}|$, $|\vec{w}|$; il prodotto vettoriale $\vec{v} \wedge \vec{w}$; le proiezioni ortogonali $p_{\vec{w}}(\vec{v})$ e $p_{\vec{v}}(\vec{w})$. Scrivere le forme parametrica e cartesiana del piano Π passante per $P_{\vec{a}} = (1,-2,1)$ e parallelo a $\vec{v}$ e $\vec{v}$; si spieghi la relazione tra la forma cartesiana di Π ed il vettore $\vec{v} \wedge \vec{w}$. Si calcoli infine la distanza di $Q_{\vec{b}} = (-1,1,1)$ da Π; le equazioni della retta r passante per P e Q; l'equazione cartesiana del piano passante per P, Q e l'origine.

Soluzioni.

(1) $\boxed{\frac{|x-5|-|1-x^2|}{|x+1|-3} < 1}$ Per l'esistenza della disequazione bisogna che $|x+1| \neq 3$, ovvero $x+1 \neq 3$ (cioè $x \neq 2$) e $x+1 \neq -3$ (cioè $x \neq -4$). Esaminiamo ora i contenuti dei moduli. Si ha $x-5 \geq 0$ se e solo se $x \geq 5$; poi $1-x^2 \geq 0$ se e solo se $-1 \leq x \leq 1$; infine $x+1 \geq 0$ se e solo se $x \geq -1$. Dunque distinguiamo quattro casi. (a) Se $x \leq -1$, si ottiene $\frac{(5-x)-(x^2-1)}{(-x-1)-3} < 1$, da cui $\frac{x^2-10}{x+4} < 0$. Vale $x^2 - 10 > 0$ per $x < -\sqrt{10}$ oppure $x > \sqrt{10}$, e $x+4 > 0$ per $x > -4$: pertanto $\frac{x^2-10}{x+4} < 0$ se e solo se $x < -4$ oppure $-\sqrt{10} < x < \sqrt{10}$. Dovendo però essere $x \leq -1$, le soluzioni accettabili sono $x < -4$ oppure $-\sqrt{10} < x < -1$. (b) Se $-1 < x \leq 1$, si ottiene $\frac{(5-x)-(1-x^2)}{(x+1)-3} < 1$, da cui $\frac{x^2-2x+6}{x-2} < 0$. Poiché il numeratore è sempre positivo, ciò equivale a $x-2 < 0$, ovvero $x < 2$. Dovendo però essere $-1 \leq x < 1$, le soluzioni accettabili sono $-1 \leq x < 1$. (c) Se $1 \leq x < 5$, si ottiene $\frac{(5-x)-(x^2-1)}{(x+1)-3} < 1$, da cui $\frac{x^2+2x-8}{x-2} > 0$. Vale $x^2+2x-8 > 0$ per $x < -4$ oppure $x > 2$, e $x-2 > 0$ per $x > 2$: dunque $\frac{x^2+2x-8}{x-2} > 0$ se e solo se $-4 < x < 2$ oppure $x > 2$. Dovendo però essere $1 \leq x < 5$, le soluzioni accettabili sono $1 \leq x < 2$ e $2 < x < 5$. (d) Infine, se $x \geq 5$ si ottiene $\frac{(x-5)-(x^2-1)}{(x+1)-3} < 1$, da cui $\frac{x^2+3}{x-2} > 0$. Il numeratore è sempre > 0, e (poiché $x \geq 5$) lo è anche il denominatore: si ottengono dunque le soluzioni accettabili $x \geq 5$. Le soluzioni della nostra disequazione si ottengono unendo quelle dei quattro casi, dunque esse sono $x < -4$ oppure $x > -\sqrt{10}$ ma $x \neq 2$.

$\boxed{\sin 2x < \cos x}$ Essendo $\sin 2x = 2\sin x \cos x$, si ottiene $(2\sin x - 1)\cos x < 0$. Risolviamo dapprima in $[-\pi, \pi]$. Si ha $\cos x > 0$ se e solo se $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$, e $2\sin x - 1 > 0$ se e solo se $\sin x > \frac{1}{2}$, valido in $\frac{\pi}{6} < x < \frac{5\pi}{6}$. Dunque $(2\sin x - 1)\cos x < 0$ se e solo se $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{6}$ oppure $\frac{\pi}{2} < x < \frac{5\pi}{6}$. Per le soluzioni generali, basta aggiungere $2k\pi$ (ove $k \in \mathbb{Z}$) agli estremi.

$\boxed{\frac{2\operatorname{tg} x - 3}{\sqrt{2}\cos x + 1} \leq 0}$ Per l'esistenza della tangente bisognerà che $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, e per il denominatore dovrà essere $\cos x \neq -\frac{\sqrt{2}}{2}$, ovvero $x \neq \pm\frac{3\pi}{4} + 2k\pi$ (con $k \in \mathbb{Z}$). Il maggiore dei periodi presenti è 2π, dunque risolviamo ad esempio in $[-\pi, \pi]$. Il numeratore è > 0 se e solo se $\operatorname{tg} x > \frac{3}{2}$: questa, risolta in $[-\pi, \pi]$, dà $-\pi + \operatorname{arctg}\frac{3}{2} < x < -\frac{\pi}{2}$ oppure $\operatorname{arctg}\frac{3}{2} < x < \frac{\pi}{2}$. Il denominatore è > 0 se e solo se $\cos x > -\frac{\sqrt{2}}{2}$ che, risolta in $[-\pi, \pi]$, dà $-\frac{3\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{4}$. Si ha dunque $\frac{2\operatorname{tg} x - 3}{\sqrt{2}\cos x + 1} \leq 0$ se e solo se $-\frac{\pi}{4} < x \leq -\pi + \operatorname{arctg}\frac{3}{2}$ oppure $-\frac{\pi}{2} < x \leq \operatorname{arctg}\frac{3}{2}$ oppure $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{4}$. Per le soluzioni generali, basta aggiungere $2k\pi$ (ove $k \in \mathbb{Z}$) agli estremi.

$\boxed{\log\left(\frac{1-2x}{x+1}\right) \leq 2}$ Per l'esistenza del logaritmo bisognerà che $\frac{1-2x}{x+1} > 0$, ovvero che $-1 < x < \frac{1}{2}$. Applicando l'esponenziale naturale ad ambo i membri si ottiene $\frac{1-2x}{x+1} \leq e^2$, da cui $\frac{(e^2+2)x+e^2-1}{x+1} \geq 0$. Il numeratore è > 0 per $x > -\frac{e^2-1}{e^2+2}$, il denominatore è > 0 per $x > -1$; poiché $-1 < -\frac{e^2-1}{e^2+2}$, la frazione è ≥ 0 per $x < -1$ oppure $x \geq -\frac{e^2-1}{e^2+2}$. Tenendo presente però la condizione di esistenza $-1 < x < \frac{1}{2}$, si ottengono le soluzioni accettabili $-\frac{e^2-1}{e^2+2} \leq x < \frac{1}{2}$.

(2) (a) L'immagine di f è $f(X) = \{y \in Y : y = f(x)\ \exists x \in X\} = \{a, b, d\}$. f non è iniettiva (infatti $2 \neq 3$ ma $f(2) = f(3) = d$) né suriettiva, perché $Y \neq f(X)$ (infatti $c \in Y$ non è un valore assunto da f). Si ha $f(\{2,3,5\}) = \{a, d\}$, $f^{-1}(\{a, d\}) = \{2,3,4,5\}$, $f^{-1}(\{c\}) = \varnothing$. Non si può corestringere f a $\{a, c, d\}$ (altrimenti

1 non avrebbe più immagine). Infine, i sottoinsiemi non vuoti A del dominio tali che la restrizione di f ad A è iniettiva sono $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$, $\{5\}$, $\{1,2\}$, $\{1,3\}$, $\{1,4\}$, $\{1,5\}$, $\{2,5\}$, $\{3,5\}$, $\{4,5\}$, $\{1,2,5\}$, $\{1,3,5\}$, $\{1,4,5\}$.

(b) Siano $x_1, x_2 > 0$ tali che $g(x_1) = g(x_2)$, ovvero $\sqrt{\frac{x_1+2}{x_1}} = \sqrt{\frac{x_2+2}{x_2}}$: allora $\frac{x_1+2}{x_1} = \frac{x_2+2}{x_2}$, da cui $x_1x_2 + 2x_2 = x_1x_1 + 2x_1$, da cui $x_1 = x_2$. Dunque g è iniettiva. Si ha poi $g^{-1}(]-2,3]) = \{x > 0 : -2 < \sqrt{\frac{x+2}{x}} \leq 3\}$: poiché la radice (quando esiste) è ≥ 0, si tratta di trovare gli $x > 0$ tali che $\sqrt{\frac{x+2}{x}} \leq 3$, ovvero $\frac{x+2}{x} \leq 9$, ovvero $x \geq \frac{1}{4}$. Dunque $g^{-1}(]-2,3]) = \mathbb{R}_{\geq \frac{1}{4}}$. Calcoliamo ora la fibra $g^{-1}(y)$ per ogni $y \in \mathbb{R}$, ovvero risolviamo $g(x) = y$ nell'incognita $x > 0$. Poiché $g(x) = \sqrt{\frac{x+2}{x}} \geq 0$, dovrà essere anche $y \geq 0$: in questa ipotesi, si ricava $\frac{x+2}{x} = y^2$, da cui $x + 2 = xy^2$, da cui $(y^2-1)x = 2$. Poiché $x > 0$, dovrà essere anche $y^2 - 1 > 0$, ovvero (tenendo presente che già abbiamo richiesto $y > 0$) bisogna che $y > 1$: in tali ipotesi si ha $x = \frac{2}{y^2-1}$. Pertanto, se $y \leq 1$ si ha $g^{-1}(y) = \varnothing$, mentre se $y > 1$ si ha $g^{-1}(y) = \{\frac{2}{y^2-1}\}$. Ne deduciamo che l'immagine B è $\mathbb{R}_{>1}$, e che la funzione inversa $g^{-1} : B \to \mathbb{R}_{>0}$ è data da $g^{-1}(x) = \frac{2}{x^2-1}$.

(3) $\boxed{A_1 = ([-\pi, 0[\cup [-1, +\infty[) \cap \mathbb{Q}_{\geq -4}}$ Il sottoinsieme A_1 è costituito da tutti gli $x \in \mathbb{R}$ tali che $-\pi \leq x < 0$ oppure $x \geq -1$ (dunque, da tutti gli $x \in \mathbb{R}$ tali che $x \geq -\pi$) che però stanno anche in $\mathbb{Q}_{\geq -4}$, ovvero che sono numeri razionali ≥ -4. Poiché $-\pi > -4$ e $-\pi$ è irrazionale, ne concludiamo che A_1 è costituito da tutti gli $x \in \mathbb{Q}$ tali che $x > -\pi$: dunque A_1 è inferiormente limitato (un suo minorante è, ad esempio, -5) ma superiormente illimitato (e dunque non ammette ne' sup ne' max). Si ha $\inf A_1 = -\pi$: infatti $-\pi$ è un minorante, e se $-\pi < x$ si può sempre trovare qualche numero razionale $\frac{m}{n}$ tale che $-\pi < \frac{m}{n} < x$ (infatti $\mathbb{Q}$ è denso in $\mathbb{R}$). Poiché $-\pi \notin A_1$, il $\min A_1$ non esiste.

$\boxed{A_2 = \{-4 + \frac{(-1)^n}{n+1} : n \in \mathbb{N}\}}$ Facendo variare n in $\mathbb{N}$, si ottiene la descrizione estensiva $A_2 = \{-4-\frac{1}{2}, -4+\frac{1}{3}, -4-\frac{1}{4}, -4+\frac{1}{5}, -4-\frac{1}{6}, -4+\frac{1}{7}, \dots\}$. È dunque chiaro che $\min A_2 = -4 - \frac{1}{2} = -\frac{9}{2}$ (infatti sta in A_2, ed è $\leq$ di tutti gli altri elementi) e che $\max A_2 = -4 + \frac{1}{3} = -\frac{11}{3}$ (infatti sta in A_2, ed è $\geq$ di tutti gli altri elementi). Sarà perciò $\inf A_2 = \min A_2 = -\frac{9}{2}$ e $\sup A_2 = \max A_2 = -\frac{11}{3}$.

$\boxed{A_3 = \mathbb{Z}_{\geq -2} \cap [-\sqrt{2}, +\infty[}$ A_3 è fatto dai numeri interi ≥ -2 che però sono anche $\geq -\sqrt{2}$. Poiché $-2 < -\sqrt{2} < -1$, si ottiene dunque $A_3 = \mathbb{Z}_{\geq -1} = \{-1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$, inferiormente (un minorante è ad esempio -8) ma non superiormente limitato. Si ha chiaramente $\min A_3 = \inf A_3 = -1$, mentre $\sup A_3$ e $\max A_3$ non esistono.

$\boxed{A_4 = \{x \in \mathbb{R} : 4 - x - x^2 > 0\} \cup \{(-3)^n : n \in \mathbb{Z}\}}$ La disequazione $4 - x - x^2 > 0$ è verificata per $\frac{-1-\sqrt{17}}{2} < x < \frac{-1+\sqrt{17}}{2}$. Al variare di n in $\mathbb{Z}$, si ha poi $\{(-3)^n : n \in \mathbb{Z}\} = \{\dots, \frac{1}{81}, -\frac{1}{27}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{3}, 1, -3, 9, -27, 81, -243, 729, \dots\}$. È allora chiaro che A_4, unione di questi due insiemi, è illimitato sia inferiormente che superiormente, e che dunque non ammette ne' inf/min ne' sup/max.

(4) (a) Un vettore parallelo a s è $\vec{a} - \vec{b} = (1,4)$, da cui la forma parametrica $s = \{\vec{a} + \alpha(\vec{a} - \vec{b}) : \alpha \in \mathbb{R}\} = \{(2,1) + \alpha(1,4) : \alpha \in \mathbb{R}\} = \{(2+\alpha, 1+4\alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\}$; da $x = 2 + \alpha$ e $y = 1 + 4\alpha$ si ricava $\alpha = x - 2$ e dunque la forma cartesiana $4x - y - 7 = 0$. Si ha poi $r = \{\vec{a} + \alpha\vec{v} : \alpha \in \mathbb{R}\} = \{(2+4\alpha, 1-\alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\}$, da cui l'equazione cartesiana $x + 4y - 6 = 0$; quanto a r', poiché $\vec{v}$ è ortogonale al vettore $\vec{a} - \vec{b} = (1,4)$ di s, si avrà proprio $r' = s$ (sono rette parallele, e passano entrambe per Q). Dall'equazione cartesiana $3x + 2y + 3 = 0$ si nota che due punti di s' sono ad esempio $R_{\vec{c}} = (-1,0)$ e $S_{\vec{d}} = (1,-3)$, pertanto un vettore parallelo è $\vec{c} - \vec{d} = (-2,3)$ e l'equazione parametrica ne risulta $s' = \{\vec{c} + \alpha(\vec{c} - \vec{d}) : \alpha \in \mathbb{R}\} = \{(-1,0) + \alpha(-2,3) : \alpha \in \mathbb{R}\} = \{(-1-2\alpha, 3\alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\}$. Infine, la distanza di P da s' è $\frac{|3(2)+2(1)+3|}{\sqrt{3^2+2^2}} = \frac{11}{\sqrt{13}}$ e quella di Q da s' è $\frac{|3(1)+2(-3)+3|}{\sqrt{3^2+2^2}} = 0$ (infatti $Q \in s'$).

(b) Vale $|\vec{v}| = \sqrt{5}$, $|\vec{w}| = \sqrt{11}$, $\vec{v} \wedge \vec{w} = (-6, 1, -3)$, $p_{\vec{w}}(\vec{v}) = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{\vec{w} \cdot \vec{w}} \vec{w} = -\frac{3}{11}(1,3,-1)$ e $p_{\vec{v}}(\vec{w}) = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{\vec{v} \cdot \vec{v}} \vec{v} = -\frac{3}{5}(-1,0,2)$. La forma parametrica di Π è $\Pi = \{\vec{a} + \alpha\vec{v} + \beta\vec{w} : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} = \{(1 - \alpha + \beta, -2 + 3\beta, 1 + 2\alpha - \beta) : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$; eliminando i parametri α e β dal sistema dato da $x = 1 - \alpha + \beta$, $y = -2 + 3\beta$ e $z = 1 + 2\alpha - \beta$ si ottiene l'equazione cartesiana $6x - y + 3z - 11 = 0$ (si noti che i coefficienti di x, y e z formano un vettore parallelo a $\vec{v} \wedge \vec{w}$, il che mostra l'ortogonalità di $\vec{v} \wedge \vec{w}$ al piano Π). La distanza di $Q_{\vec{b}} = (-1,1,1)$ da Π è data da $\frac{|6(-1)-1(1)+3(1)|}{\sqrt{6^2+(-1)^2+3^2}} = \frac{4}{3\sqrt{5}}$. Un vettore parallelo a r è $\vec{a} - \vec{b} = (2,-3,0)$, da cui la forma cartesiana $r = \{\vec{a} + \alpha(\vec{a} - \vec{b}) : \alpha \in \mathbb{R}\} = \{(1+2\alpha, -2-3\alpha, 1) : \alpha \in \mathbb{R}\}$; eliminando α dal sistema formato da $x = 1 + 2\alpha$, $y = -2 - 3\alpha$ e $z = 1$ si ottiene la forma cartesiana di r data dal sistema $3x + 2y + 1 = 0$ e $z = 1$ (si noti che r è contenuta nel piano orizzontale $z = 1$, cui appartengono sia P che Q). Infine, il piano passante per P, Q e l'origine sarà parallelo ad $\vec{a}$ e $\vec{b}$, dunque ortogonale a $\vec{a} \wedge \vec{b} = (-3, -2, -1)$: la sua equazione cartesiana sarà perciò $3x + 2y + z = 0$.