Foglio 4

31 ottobre 2014

Esercizio 1 (Punti 6)**.** Si considerino i vettori in $\mathbb{C}^4$

$$v_1 = [1\ \ 0\ \ 3\ \ 0]^T, v_2 = [2\ \ 4\ \ 0\ \ 0]^T, v_3 = [2\ \ 2\ \ 3\ \ 0]^T, w = [-4\ \ 1\ \ 0\ \ 2]^T$$

1. Sia $U =< v_1, v_2, v_3 >$. Il vettore w appartiene a U?
2. Si trovi una base di U.
3. Sia $v = [x_1\ x_2\ x_3\ x_4]^T$. Per quali x_1, x_2, x_3, x_4 in $\mathbb{C}$ il vettore v appartiene a U?

Esercizio 2 (Punti 6)**.** Per quali α e β in $\mathbb{C}$ il seguente sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$?

$$W = \{[x_1\ \ x_2\ \ x_3]^T \in \mathbb{R}^3| \quad \beta x_2^2 + 2x_1 - x_2 + 2x_3 = \alpha - 1\}$$

Per tali α e β si trovi una base di W.

Esercizio 3 (Punti 4)**.** Si consideri lo spazio vettoriale $\mathbb{C}[x]_{<3}$ dei polinomi a coefficienti in $\mathbb{C}$ di grado minore di 3. Si verifichi che l'insieme $\{1 - x, 1 + x, 1 - x^2\}$ è una base per $\mathbb{C}[x]_{<3}$

Esercizio 4 (Punti 6)**.** Si consideri il seguente sottoinsieme di $M_2(\mathbb{C})$:

$$W = \{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \}$$

Si dimostri che W è un insieme linearmente indipendente e lo si completi a una base di $M_2(\mathbb{C})$.

Esercizio 5 (Punti 8)**.** Si considerino i sottoinsiemi U e V di $\mathbb{R}^3$

$$U = \left\{ [x_1\ \ x_2\ \ x_3]^T \in \mathbb{R}^3 | \left\{ \begin{array}{c} x_1 - x_2 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{array} \right\} \right. \quad \text{e} \quad V = \left\{ [x_1\ \ x_2\ \ x_3]^T \in \mathbb{R}^3 | \left\{ \begin{array}{c} x_1 + x_2 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{array} \right\} \right.$$

1. Verificare che sia U che V sono sottospazi di $\mathbb{R}^3$.
2. Determinarne la dimensione e una base di U e V.
3. Determinare la dimensione e una base dell'intersezione $U \cap V$.