

# Correzione dell'appello del giorno 16 febbraio 2011

DAVIDE BOSCAINI

Questa è una soluzione della versione del compito scritto di Analisi Matematica 1 assegnata al gruppo C dell'appello del giorno 18 febbraio 2011. Invito chi trovasse eventuali errori a segnalarli presso [davide.boscaini@studenti.univr.it](mailto:davide.boscaini@studenti.univr.it).

**Esercizio 1** (punti 7). Determinare gli insiemi di convergenza, di convergenza assoluta e di divergenza (a seconda dei valori del parametro reale  $x$ ), per la seguente serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt[3]{2n^2+1}}{n^3-4} (\log(3x) - 2^n).$$

*Soluzione.* Quando si ha a che fare con una serie di potenze<sup>1</sup> la prima cosa da fare è calcolare il raggio di convergenza. Nel nostro caso abbiamo

$$\begin{aligned} L &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\sqrt{2(n+1)^2+1}}{(n+1)^3-4} \bigg/ \frac{\sqrt{2n^2+1}}{n^3-4} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\sqrt{2n^2+4n+3}}{n^3+3n^2+3n-3} \frac{n^3-4}{\sqrt{2n^2+1}} \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \sqrt[3]{\frac{2n^2+4n+1}{2n^2+1}} \frac{n^3(1-4/n^3)}{n^3(1+3/n+3/n^2-3/n^3)} \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \sqrt[3]{\frac{n^2(2+4/n+1/n^2)}{n^2(2+1/n^2)}} \frac{1-4/n^3}{1+3/n+3/n^2-3/n^3} \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \sqrt[3]{\frac{2+4/n+1/n^2}{2+1/n^2}} \frac{1-4/n^3}{1+3/n+3/n^2-3/n^3} \right| \\ &= 1. \end{aligned}$$

Quindi  $R = 1/L = 1$ . Dalla teoria segue allora che, per  $x \in \mathbb{R}$  tale che

$$|\log(3x) - 2| < 1,$$

la serie converge assolutamente, mentre diverge al di fuori di tale intervallo. In particolare la condizione  $|\log(3x) - 2| < 1$  è soddisfatta se

$$\begin{cases} \log(3x) - 2 < 1, \\ \log(3x) - 2 > -1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log(3x) < 3, \\ \log(3x) > 1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x < e^3, \\ 3x > e. \end{cases}$$

Di conseguenza sappiamo che la serie assegnata converge assolutamente, e quindi semplicemente, per

$$x \in \left( \frac{e}{3}, \frac{e^3}{3} \right),$$

---

<sup>1</sup>Per ulteriori dettagli sullo studio delle serie di potenze si rimanda alle note relative al ricevimento del 26 Gennaio, reperibili presso la pagina web del corso al seguente link <http://www.scienze.univr.it/fof/main?ent=oi&codiceCs=S24&codins=10534&cs=420&discr=&discrCd=>.

mentre diverge per  $x < e/3$  o per  $x > e^3/3$ . Rimane quindi solo da discutere il comportamento della serie di potenze in corrispondenza dei punti estremi dell'intervallo di convergenza, ovvero per  $x = e/3$  e per  $x = e^3/3$ .

Sostituendo ora il primo di tali valori si ottiene la seguente serie numerica a segno alterno

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\sqrt[3]{2n^2+1}}{n^3-4} =: \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n a_n.$$

Dal momento che

$$a_1 = -\frac{\sqrt[3]{3}}{3} < 0,$$

mentre per  $n \geq 2$ ,  $a_n > 0$ , riscriviamo la serie assegnata come

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n a_n = -\frac{\sqrt[3]{3}}{3} + \sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n a_n,$$

così che gli  $a_n$  siano termini positivi.

Per poter studiare la nuova serie numerica, essendo essa appunto a segno alterno, scegliamo di usare il criterio della convergenza assoluta: studiamo quindi il comportamento della serie dei valori assoluti  $\sum_{n=2}^{+\infty} a_n$ . Quest'ultima serie è certamente una serie a termini positivi, possiamo quindi applicare il criterio del confronto asintotico con la serie

$$\sum_{n=2}^{+\infty} b_n := \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^7}}.$$

Ora

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \sqrt[3]{2} \neq 0, +\infty;$$

possiamo quindi concludere che la serie assegnata si comporta come  $\sum_{n=2}^{+\infty} b_n$ . Quest'ultima è una serie armonica generalizzata di esponente  $7/3 > 1$ , quindi converge.

Infine se sostituiamo nella serie di potenze il valore  $x = e^3/3$ , otteniamo proprio la serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ , che sappiamo essere assolutamente convergente per i passaggi fin qui svolti.

In conclusione la serie assegnata converge assolutamente, e quindi semplicemente, per  $x \in [e/3, e^3/3]$ , diverge altrove.

**Esercizio 2** (punti 5). Dimostrare che la seguente successione, definita per ricorrenza, è convergente e calcolarne il limite

$$c_0 = -\frac{1}{2}; \quad c_{n+1} = \frac{1}{3}c_n, \quad \forall n > 0.$$

*Soluzione.* Per prima cosa, dal momento che il primo elemento è negativo e che ogni altro elemento è ottenuto moltiplicando una quantità positiva per questo primo valore, notiamo che la successione numerica  $\{c_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  è negativa per ogni  $n \in \mathbb{N}$ . Grazie a questa prima considerazione possiamo già affermare che 0 è un estremo superiore di tale successione.

Osserviamo inoltre che

$$\left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = \frac{|c_n|}{|c_n|} = 3 > 1,$$

quindi la successione dei valori assoluti è decrescente.

Se teniamo conto di tutte le informazioni ottenute, segue che  $\{c_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  è una successione monotona crescente e limitata superiormente, possiamo quindi concludere che essa ammette limite finito, e quindi converge.

Chiamato  $L$  tale limite, allora se la successione  $\{c_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge a  $L$ , anche

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} c_{n+1} = L.$$

Ma allora da

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{3}c_n = L,$$

segue  $1/3 L = L$ , cioè  $L = 0$ .

Per capire se quanto fatto può essere corretto, consiglio di operare qualche sostituzione. In questo modo si trova

$$c_0 = -\frac{1}{2}, \quad c_1 = -\frac{1}{6}, \quad c_2 = -\frac{1}{18}, \quad c_3 = -\frac{1}{54}, \quad c_4 = -\frac{1}{162}, \quad c_5 = -\frac{1}{486}, \quad \dots$$

È quindi evidente che, al crescere di  $n$ , gli elementi della successione tendono proprio a 0.

**Esercizio 3** (punti 8). Calcolare l'integrale

$$I = \int_0^2 \sqrt{4-x^2} dx.$$

*Soluzione.* Si ha

$$I = \frac{2}{2} \int_0^2 \sqrt{4-x^2} dx = 2 \int_0^2 \sqrt{1-\frac{x^2}{4}} dx = 2 \int_0^2 \sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2} dx.$$

In particolare ci accorgiamo del fatto che l'integrale trovato è del tipo

$$c \int \sqrt{1-y^2} dy, \quad c \in \mathbb{R},$$

e che, di conseguenza, una sostituzione di tipo trigonometrico ci potrebbe aiutare ad individuare una primitiva. Posto allora  $x = 2 \sin t$  si ha  $dx = 2 \cos t dt$  e gli estremi diventano  $0 = \sin t \Rightarrow t = 0$  e  $1 = \sin t \Rightarrow t = \pi/2$ . Possiamo quindi riscrivere l'integrale precedente come

$$I = 4 \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2 t} \cos t dt = 4 \int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt,$$

dove si è usata l'identità fondamentale delle funzioni trigonometriche.

Se ora vediamo la funzione integranda come prodotto tra la costante 1 e la funzione  $\cos^2 t$ , grazie alla formula di integrazione per parti troviamo che

$$I = 4 \left( t \cos^2 t \Big|_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} t 2 \cos t \sin t dt \right) = 0 + 4 \int_0^{\pi/2} t \sin 2t dt.$$

Applicando una seconda volta la regola di integrazione per parti sulle funzioni  $t$  e  $\sin 2t$  si ottiene

$$I = 2 \left( -t \cos 2t \Big|_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \cos 2t dt \right) = 2 \left( \frac{\pi}{2} + \frac{\sin 2t}{2} \Big|_0^{\pi/2} \right) = \pi + 0 = \pi.$$

Si ha quindi  $I = \pi$  e l'esercizio è concluso.

**Esercizio 4** (punti 10). Studiare e disegnare il grafico della funzione

$$f(x) = (2x^2 - x + 1)e^x.$$

*Soluzione.* 1. DOMINIO: la funzione assegnata si ottiene come prodotto tra la funzione esponenziale  $y = e^x$  e la parabola  $y = 2x^2 - x + 1$ , di conseguenza essa esiste per qualsiasi  $x \in \mathbb{R}$ .

2. INTERSEZIONE CON GLI ASSI CARTESIANI: per quanto riguarda l'intersezione con l'asse delle ordinate si ha

$$\begin{cases} x = 0, \\ y = (2x^2 - x + 1)e^x, \end{cases}$$

la cui soluzione è  $y = e^0 = 1$ . Quindi la funzione assegnata passa per il punto  $A = (0, 1)$ . Invece per l'intersezione con l'asse delle ascisse si ha

$$\begin{cases} y = 0, \\ y = (2x^2 - x + 1)e^x, \end{cases}$$

cioè  $(2x^2 - x + 1)e^x = 0$ . Dal momento che la funzione esponenziale è sempre positiva, la soluzione dell'equazione è data dagli zeri dell'equazione del secondo ordine  $2x^2 - x + 1$ . Tuttavia  $\Delta = -7 < 0$ , quindi non esistono soluzioni reali. Di conseguenza  $f$  non interseca mai l'asse delle ascisse.

3. SEGNO: ci chiediamo quando  $f(x) > 0$ , cioè quando  $(2x^2 - x + 1)e^x > 0$ . Tenendo conto di quanto analizzato nel punto precedente, si può concludere immediatamente che la funzione è sempre positiva. Infatti la funzione esponenziale è positiva per definizione e la parabola  $y = 2x^2 - x + 1$  è rivolta verso l'alto e non interseca mai l'asse delle ascisse.

4. PARITÀ/DISPARITÀ: controlliamo se la funzione assegnata presenta delle simmetrie. Per prima cosa verifichiamo se  $f$  è simmetrica rispetto l'asse delle ordinate, ovvero se vale  $f(x) = f(-x)$ . Ora

$$f(-x) = (2x^2 + x + 1)e^{-x} \neq (2x^2 - x + 1)e^x = f(x),$$

quindi la funzione non è pari. Inoltre

$$f(-x) = (2x^2 + x + 1)e^{-x} \neq -(2x^2 - x + 1)e^x = f(x),$$

quindi la funzione non è nemmeno dispari. Si conclude che la funzione non è né pari né dispari.

5. LIMITI/ASINTOTI: dal momento che il dominio della funzione coincide con tutta la retta reale, sicuramente non ci saranno asintoti verticali. Passiamo quindi a cercare eventuali asintoti orizzontali:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x^2 - x + 1)e^x &= \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 e^x \left( 2 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right) = 2(+\infty)e^{+\infty} = +\infty, \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^2 - x + 1)e^x &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 - x + 1}{e^{-x}} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{4x - 1}{e^{-x}} \\ &\stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4}{e^{-x}} = \frac{4}{+\infty} = 0, \end{aligned}$$

dove negli ultimi due passaggi, si è usata la regola di de l'Hopital (indicata con la lettera  $H$ ). Di conseguenza si ha che l'asse delle ascisse  $y = 0$  è un asintoto orizzontale unilatero per  $x \rightarrow -\infty$ .

Rimane ora solo da chiedersi se per  $x \rightarrow +\infty$  esistono asintoti obliqui della forma  $y = mx + q$ . Dalla teoria sappiamo che, affinché tale retta esista deve esistere finita (e diversa da 0) la seguente quantità:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2x^2 - x + 1)e^x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2x - 1 + \frac{1}{x}\right) e^x = +\infty.$$

Nel nostro caso ciò non accade, possiamo quindi concludere che non esistono asintoti obliqui.

6. DERIVATA PRIMA: chiamiamo  $g(x) := 2x^2 - x + 1$  ed  $h(x) := e^x$ , allora applicando la regola di Leibniz per la derivata del prodotto di funzioni si ha

$$f'(x) = g'(x)h(x) + g(x)h'(x) = (2(2x) - 1)e^x + (2x^2 - x + 1)e^x = (2x^2 + 3x)e^x.$$

7. CRESCENZA/DECRESCENZA: sempre dalla teoria vista a lezione sappiamo che la funzione sarà crescente negli intervalli dell'asse reale in cui  $f'(x) > 0$ . Nel nostro caso questo coincide col chiedersi quando  $e^x(2x^2 + 3x) > 0$ . Ancora una volta l'esponenziale è ininfluente essendo sempre positivo, quindi la condizione da verificare è  $2x^2 + 3x > 0$ . Dopo qualche semplice conto algebrico si trova che la derivata è positiva per

$$x < -\frac{3}{2} \cup x > 0.$$

8. PUNTI STAZIONARI: per la discussione fatta al punto precedente è ovvio che i punti stazionari di  $f$ , ovvero i punti in cui  $f'(x) = 0$ , non possono che essere  $x_1 = -3/2$  e  $x_2 = 0$ .
9. DERIVATA SECONDA: si può vedere anche  $f'(x)$  come prodotto di funzioni, in particolare posto  $g(x) := 2x^2 + 3x$  e  $h(x) := e^x$ , allora

$$f''(x) = g'(x)h(x) + g(x)h'(x) = (4x + 3)e^x + (2x^2 + 3x)e^x = (2x^2 + 7x + 3)e^x.$$

10. CONVESSITÀ/CONCAVITÀ: ci chiediamo quando  $f''(x) > 0$ , ovvero quando  $(2x^2 + 7x + 3)e^x > 0$ . Tale condizione, come è stato già fatto molte altre volte nel corso dell'esercizio si riduce a  $2x^2 + 7x + 3 > 0$ . Questa è una parabola e gli intervalli in cui è positiva si individuano nel modo consueto. Svolgendo i conti si ha che la funzione è convessa per

$$x < -3 \cup x > -\frac{1}{2},$$

concava altrove.

11. PUNTI DI FLESSO: per la discussione fatta al punto precedente è ovvio che i punti di flesso di  $f$ , ovvero i punti in cui  $f''(x) = 0$ , non possono che essere  $x_3 = -3$  e  $x_4 = -1/2$ .
12. GRAFICO DEFINITIVO: si veda la figura 1.
13. MASSIMI E MINIMI ASSOLUTI SU  $I = [-4, 1/2]$ : per prima cosa vale la pena ricordare che, per il teorema di Weierstrass, una funzione continua su un insieme compatto ammette massimo e minimo. Sulla retta reale un insieme compatto è un intervallo chiuso, e si dà il caso che  $I$  sia chiuso. Questa discussione teorica preliminare ci permette di affermare che in  $[-4, 1/2]$  esistono due punti, che indicheremo con  $x_3$  e  $x_4$ , rispettivamente di minimo e di massimo per  $f$ .

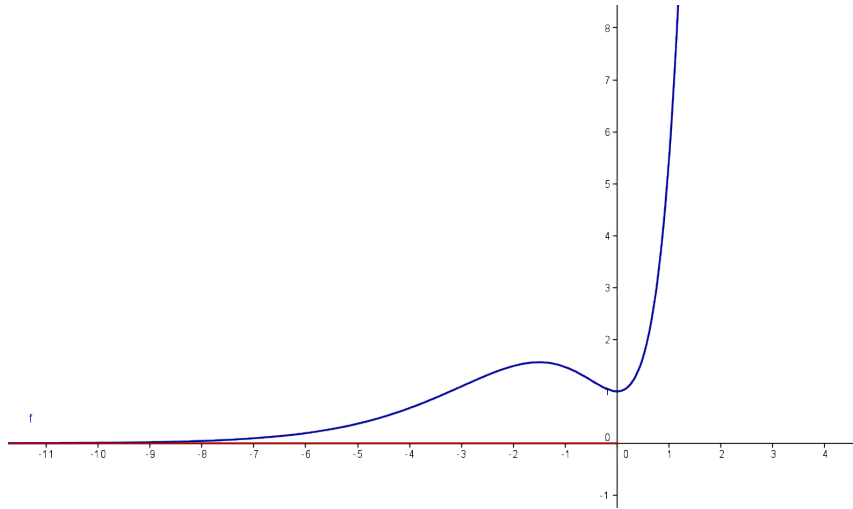


Figura 1: Grafico della funzione  $f(x) = (2x^2 - x + 1)e^x$ . In rosso si è indicata l'asintoto orizzontale unilatero per  $x \rightarrow -\infty$ .

Sappiamo poi che una funzione monotona crescente su un intervallo chiuso  $[a, b]$  ammette minimo sull'estremo di sinistra  $a$  e massimo su quello di destra  $b$ . Viceversa se la funzione è monotona decrescente, allora essa ammetterà massimo nell'estremo di destra e minimo nell'estremo di sinistra.

Scegliamo ora di dividere l'intervallo assegnato  $I$  in due sottointervalli  $[-4, -3/2] \cup [-3/2, 1/2]$ , in modo tale che su ognuno di essi la funzione sia monotona. In particolare  $f$  è crescente sul primo dei due e decrescente sul secondo. Di conseguenza, come è possibile osservare in figura 2, si ha che  $x_3 = -4$  e  $x_4 = 1/2$ , quindi

$$m = (x_3, f(x_3)) = \left(-4, \frac{37}{e^4}\right), \quad M = (x_4, f(x_4)) = \left(1/2, \frac{1}{\sqrt{e}}\right).$$

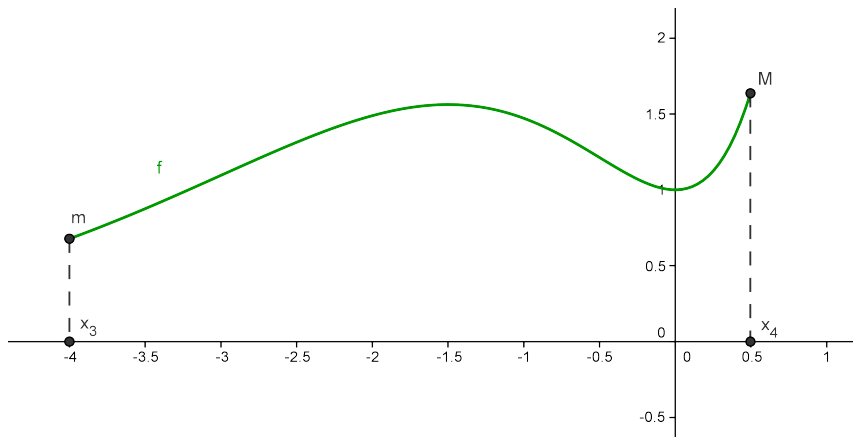


Figura 2: Andamento della funzione assegnata ristretta all'intervallo  $I = [-4, 1/2]$ .