Calcolo Numerico – 10/09/2014 (Corso di Laurea in Informatica)

MAT.	COGNOME	NOME

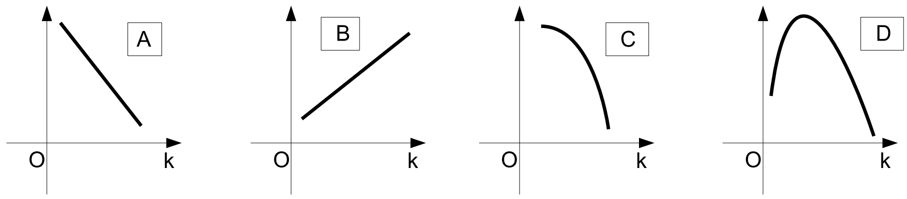
QUESITI A RISPOSTA CHIUSA

Indicare la casella che ha la miglior risposta (corretta: 1 punto, errata o non data: 0 punti).

1. Siano $x = 0.127$, $y = 1.45$ numeri floating point di $F(10, 3, -3, 3)$. L'operazione macchina $x \otimes y$ dà [A] 0.184 [B] 0.185 [C] 0.18415 [D] nessuna delle precedenti

2. L'ordine di convergenza del metodo di Newton per la soluzione dell'equazione non lineare $e^x + x = 0$ è [A] 1 [B] $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ [C] 2 [D] più di 2

3. Il metodo di Newton è utilizzato per approssimare la radice $\xi = 1$ dell'equazione $(x-1)^2 = 0$ partendo da $x_0 = 2$. Sia $e_k = \xi - x_k$, $k = 0, 1, \ldots$,l'errore della k-esima iterata generata dal metodo di Newton. La figura sottostante mostra alcuni possibili grafici per $\log_{10}(|e_k|)$ in funzione di k. Quale potrebbe essere il grafico corrispondente alla successione x_k?



4. Considerimo la successione x_k generata dal metodo di punto fisso $x_{k+1} = e^{-x_k}$, $k = 0, 1, \ldots$ con $x_0 = 0$. Sia α il punto fisso del metodo e $e_k = \alpha - x_k$, $k = 0, 1, \ldots$ l'errore della k-esima iterata. Allora

   [A] x_k non converge [B] $x_{k+1} < x_k$ [C] $e_k \cdot e_{k+1} < 0$ [D] $\alpha > 1$

5. Esiste almeno una matrice reale e <u>non simmetrica</u> $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $n \geq 3$ con raggio spettrale negativo, $\rho(A) < 0$

   [A] vero [B] falso [C] vero solo se $|A| < 0$ [D] vero solo se $a_{ii} < 0$, $i = 1, \ldots, n$

6. Esiste almeno una matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ed una norma indotta di matrice $\|\cdot\|$ tale che il numero di condizionamento rispetto a questa norma soddisfa la disequazione $2 \cdot K(A) < 1$.

   [A] vero [B] falso [C] vero solo se $2^n > n$ [D] vero solo se $\rho(A) < 2^{-n}$

7. Sia A una matrice di ordine $n = 100$ formata da tutti zeri tranne $a_{ii} = 1$, $i = 1 \ldots, n$ e $a_{i,i+1} = a \neq 0$, $i = 1, \ldots, n-1$. E' possibile scrivere $A = L \cdot U$ con L triangolare bassa con tutti 1 sulla diagonale principale ed U triangolare superiore?

   [A] no, mai [B] dipende dal valore di a [C] sì, sempre [D] non si può dire

8. Assumendo nota la fattorizzazione LU della matrice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, il numero di operazioni aritmetiche richieste per risolvere tutti i p sistemi lineari $A\mathbf{x} = \mathbf{b}_k$, $k = 1, \ldots, p$ è approssimativamente pari a

   $\boxed{\text{A}}$ $n^3/3$ $\boxed{\text{B}}$ n^2 $\boxed{\text{C}}$ $2n^2$ $\boxed{\text{D}}$ $2pn^2$

9. Un sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ha la matrice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ che verifica $a_{ii} > 1$, $i = 1, \ldots, n$ e $0 < a_{ij} < 1/n$, $i, j = 1, \ldots, n$, $i \neq j$. Allora, il metodo iterativo di Jacobi è convergente.

   $\boxed{\text{A}}$ vero $\boxed{\text{B}}$ falso

10. La differenza divisa $f[x_0, x_1, x_2]$ associata ai nodi $x_0 = -1$, $x_1 = 0$ e $x_2 = 1$ della funzione $f(x) = x^4 + 1$ è

    $\boxed{\text{A}}$ -1 $\boxed{\text{B}}$ 0 $\boxed{\text{B}}$ 1 $\boxed{\text{D}}$ nessuna delle precedenti

11. Sia I_T il valore dato dalla formula dei trapezi composta con $m = 2$ intervalli per approssimare l'integrale

    $$I = \int_{-1}^{1} \left(1 + x^2\right)\, dx$$

    Allora, detto $E_T = I - I_T$ l'errore, si ha

    $\boxed{\text{A}}$ non è possibile calcolare E_T $\boxed{\text{B}}$ $E_T > 0$ $\boxed{\text{B}}$ $E_T = 0$ $\boxed{\text{D}}$ $E_T < 0$

12. Dati i due vettori `x` ed `y` con le stesse dimensioni, la funzione `plot(x, y)` è usata in Matlab per disegnare il grafico di `y` in funzione dei valori di `x` $\boxed{\text{A}}$ vero $\boxed{\text{B}}$ falso

13. Determinare `v` dopo l'esecuzione del seguente codice Matlab

    ```
    1.    v = -1:2:4;
    2.    v = v * v';
    ```

    $\boxed{\text{A}}$ `[ -1 1 3 ]` $\boxed{\text{B}}$ `[ -1 2 4 ]` $\boxed{\text{C}}$ 11 $\boxed{\text{D}}$ nessuna delle precedenti

14. Determinare `v` dopo l'esecuzione del seguente codice Matlab

    ```
    1.    v = [ -1  2  3 ];
    2.    for k = 1:length(v)
    3.       v = v .* [ v(k) v(k) v(k) ];
    4.    end
    ```

    $\boxed{\text{A}}$ `[ -1 4 9 ]` $\boxed{\text{B}}$ `[ -2 4 6 ]` $\boxed{\text{C}}$ `[ -12 24 36 ]` $\boxed{\text{D}}$ `[ 1 -2 -3 ]`

15. Quanto vale `a` al termine delle seguenti istruzioni Matlab?

    ```
    1. a = [1 2 3; 3 2 1];
    2. a(:,2) = [];
    3. a = a.^a;
    ```

    $\boxed{\text{A}}$ $[1\ 4\ 9]$ $\boxed{\text{B}}$ $\begin{bmatrix} 1 & 27 \\ 27 & 1 \end{bmatrix}$ $\boxed{\text{C}}$ $\begin{bmatrix} 10 & 6 \\ 6 & 10 \end{bmatrix}$ $\boxed{\text{D}}$ 12

DOMANDA TEORICA (max 3 punti)

Illustrare graficamente il metodo di punto fisso. Formire una condizione sufficiente alla convergenza e ricavare l'ordine di convergenza del metodo e la corrispondente costante asintotica dell'errore.

Esercizi

Rispondere in modo sintetico ed esauriente nello spazio sottostante ciascun esercizio.

Esercizio 1 (5 punti) Si consideri l'equazione non lineare $x^3 + x - 1 = 0$.

(a) Dimostrare che c'è un'unica soluzione $\xi \in [0,\ 1]$. Applicare a questo intervallo due passi del metodo di bisezione per ottenere $[a_2,\ b_2]$ ed x_2.

(b) Partendo da $x_0 = 1$, fornire le prime due approssimazioni x_1 ed x_2 della radice ξ col metodo di Newton ed utilizzarle per stimare la costante asintotica dell'errore.

Esercizio 2 (5 punti) Si consideri il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 6 \end{pmatrix}$$

(a) Scrivere, per il metodo iterativo di Gauss-Seidel, le tre equazioni di aggiornamento che esprimono $x_i^{(k+1)}$, $i = 1, 2, 3$.

(b) Scrivere la matrice di iterazione di Jacobi e calcolarne il raggio spettrale. Utilizzarlo per stimare il numero di iterazioni necessarie per avere $||\mathbf{e}^{(k)}|| < 10^{-6} \cdot ||\mathbf{e}^{(0)}||$.

Esercizio 3 (5 punti) Calcolare il numero di itervalli richiesti per calcolare

$$I = \int_1^2 \frac{1}{x}\, dx$$

col metodo di Cavalieri-Simpson composto in modo da avere il valore assoluto dell'errore $E_{CS,C}^{(m)}$ inferiore a 10^{-6}. Ricordarsi che

$$E_{CS,C}^{(m)} = -\frac{(b-a)^5}{2880 m^4} f^{(4)}(\xi).$$