Calcolo Numerico – 30/09/2014 (Corso di Laurea in Informatica)

MAT.	COGNOME	NOME

QUESITI A RISPOSTA CHIUSA

Indicare la casella che ha la miglior risposta (corretta: 1 punto, errata o non data: 0 punti).

1. La precisione di macchina `eps` del sistema floating point $\mathbb{F}(10, 2, -2, 2)$ è

   ☐ $5 \cdot 10^{-3}$ ☐ 10^{-3} ☐ $5 \cdot 10^{-2}$ ☐ 10^{-2}

2. La radice $\xi = 2$ dell'equazione $x^2 - 4 = 0$ viene approssimata con il metodo di bisezione partendo dall'intervallo $[a_0,\ b_0] = [1,\ 5]$. Ricordando che $x_k = (a_k + b_k)/2$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, il valore assoluto dell'errore $e_2 = \xi - x_2$ della seconda iterata x_2 è pari a

   ☐ 0 ☐ $\frac{1}{8}$ ☐ $\frac{1}{4}$ ☐ $\frac{3}{4}$

3. La funzione $f(x) = e^x + 2x - 3$ ha un'unica radice positiva ξ. Volendo approssimare ξ col metodo di Newton, ci si aspetta che il suo ordine di convergenza sia pari a

   ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ non è determinabile perché non si conosce ξ

4. Sia ξ il punto fisso del metodo iterativo $x_{k+1} = \sqrt{2x_k + 3}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$. Posto $x_0 = -1$, ricordando che l'errore associata all'iterata x_k è $e_k = \xi - x_k$, il valore assoluto dell'errore e_1 della prima iterata x_1 è

   ☐ 1 ☐ 2 ☐ $\sqrt{5}$ ☐ nessuna delle risposte date

5. Si devono risolvere $m \gg 1$ sistemi lineari del tipo $A\mathbf{x} = \mathbf{b}_k$, $k = 1, \ldots, m$ con A matrice quadrata di ordine n. Supponendo di avere già a disposizione la fattorizzazione LU della matrice A (ossia, sono note le matrici L ed U tali che $L \cdot U = A$), quale è, all'incirca, il numero di operazioni aritmetiche necessarie per risolvere tutti gli m sistemi lineari?

   ☐ n^2 ☐ mn^2 ☐ $2n^2$ ☐ $2mn^2$

6. Il metodo iterativo $\mathbf{x}^{(k+1)} = E\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{q}$, $k = 0, 1, \ldots$ con

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{q} = \begin{pmatrix} 1/4 \\ 1/3 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

   viene utilizzato per risolvere un certo sistema lineare di ordine $n = 3$. Allora, almeno per k abbastanza grandi, ci si aspetta che il rapporto tra le norme Euclidee di due errori consecutivi $||\mathbf{e}^{(k+1)}||_2/||\mathbf{e}^{(k)}||_2$ sia all'incirca

   ☐ $1/5$ ☐ $1/4$ ☐ $1/3$ ☐ il metodo non converge

7. Siano
$$L_i^{(2)}(x) = \frac{\prod_{r=0, r\neq i}^{2}(x - x_r)}{\prod_{r=0, r\neq i}^{2}(x_i - x_r)}, \quad i = 0, 1, 2$$
i tre polinomi di Lagrange associati ai nodi $x_0 = -1$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$. Allora il polinomio P definito dall'espressione
$$P(x) = L_1^{(2)}(x) \bullet \sum_{i=0}^{2} L_i^{(2)}(x)$$
è uguale a

☐ $1 - x^2$ ☐ $2 - x^2$ ☐ $-x^2$ ☐ $(1 - x^2)(4 - x^2)$

8. Siano dati la funzione $f(x) = x^4 - 3x$ ed i nodi equispaziati $x_k = x_0 + k \cdot h$, $k = 0, \ldots, 4$ con $x_0 = -1$ e $h = 1$. Allora, la quantità q data da
$$q = (\, f[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4] + f[x_0, x_1, x_2] - f[x_4, x_3, x_2, x_1, x_0]\,)^2$$
è pari a ☐ 0 ☐ 1 ☐ 4 ☐ 9

9. Il polinomio di grado $n = 1$ che approssima ai minimi quadrati i dati $(-2, 2)$, $(0, 0)$, $(2, 4)$ è

☐ $\frac{x}{2} + 1$ ☐ $2x + \frac{1}{2}$ ☐ $\frac{x}{2} + 2$ ☐ nessuna delle risposte è corretta

10. Il metodo di Cavalieri-Simpson composto con m intervalli viene usato per approssimare l'integrale
$$I = \int_{-1}^{1} \left(4x^3 - 3x^2 + 2x \right) dx$$
con un errore assoluto inferiore a 10^{-6}. Il più piccolo valore di m che assicura la richiesta è (ricordarsi che in ognuno degli m intervalli viene applicata Cavalieri-Simpson)

☐ 1 ☐ 4 ☐ 16 ☐ 256

11. L'istruzione Matlab

```
(1:3:7).*(1:3)
```

produce ☐ un errore ☐ [1 8 21] ☐ 12 ☐ una matrice 3×2

12. Le istruzioni Matlab

```
A = ones(3);
A(2,3) = length( A(2,:) );
```

producono

☐ un errore ☐ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

13. Le istruzioni Matlab

```
f = inline('x.^2');
a = 2;
while( a < 7 )
    a = f(a)
end
```

stampano a video

☐ 2 e 8 ☐ 4 e 16 ☐ $a = f(a), a = f(a)$ ☐ non stampano nulla

14. Sia $\mathbf{e} = [\mathbf{e}(1), \ldots, \mathbf{e}(n)]$ un vettore di lunghezza n che rappresenta gli errori di un certo metodo iterativo in funzione delle iterate k. Quale delle seguenti istruzioni Matlab permette di disegnare il grafico di $\log_{10}(|\mathbf{e}|)$ in funzione della posizione k (ossia, la scale delle ordinate è logaritmica e quella delle ascisse è lineare)?

   ☐ semilogy(abs(e)) ☐ plot(abs(e)) ☐ plot(e) ☐ loglog(abs(e))

15. (2 punti) Indicare quali delle seguenti istruzioni Matlab utilizzate per definire una function di nome pippo è corretta, barrando la casella OK e quale non lo è barrando la casella NO

   ☐ OK ☐ NO function x = pippo(x)
   ☐ OK ☐ NO function z = pippo(x,y)
   ☐ OK ☐ NO function [z,w] = pippo(x,y)
   ☐ OK ☐ NO function (z,w) = pippo[x,y]

DOMANDA TEORICA (max 3 punti)

Ricavare l'ordine di convergenza e la costante asintotica dell'errore per il metodo di punto fisso $x_{k+1} = g(x_k)$, $k = 0, 1, \ldots$ supponendo che $\xi \in \mathbb{R}$ sia un punto fisso di g e che x_0 sia convenientemente vicino a ξ in modo che la successione x_k converga a ξ.

Esercizi

Rispondere in modo sintetico ed esauriente nello spazio sottostante ciascun esercizio.

Esercizio 1 (5 punti) Si consideri la funzione $f(x) = (x-2)^3$ che ha come unica radice reale $\xi = 2$ con molteplicità $\mu = 3$.

(a) Scrivere esplicitamente l'iterazione di Newton che lega x_{k+1} ad x_k e, assunto il punto iniziale $x_0 = 4$, calcolare le prime due iterate, x_1 ed x_2.

(b) Ricordando che l'errore al passo k-esimo è definito da $e_k = \xi - x_k$, calcolare $|e_{k+1}|/|e_k|$ per il metodo di Newton e, dall'espressione trovata, dedurre sia l'ordine del metodo che la costante asintotica dell'errore. Tracciare anche un grafico qualitativamente corretto che riporti $\log_{10}(|e_k|)$ in funzione di k.

(c) Proporre un metodo di ordine almeno 2 per approssimare la radice ξ.

(d) (facoltativo) Trovare il legame tra l'errore e_k e lo scarto $x_{k+1} - x_k$ per il metodo di Newton.

Esercizio 2 (5 punti) Si consideri il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & 2 \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 8 \\ 10 \\ 8 \end{pmatrix}$$

(a) Solo guardando la matrice, dire perche' i metodi iterativi di Jacobi e di Gauss-Seidel sono convergenti.

(b) Scrivere, per i metodi iterativi di Jacobi e di Gauss-Seidel, le tre equazioni di aggiornamento che esprimono $x_i^{(k+1)}$, $i = 1, 2, 3$.

(c) Scrivere la matrice di iterazione di Jacobi e calcolarne il raggio spettrale. Utilizzarlo per stimare il numero di iterazioni necessarie per avere $||\mathbf{e}^{(k)}|| < 10^{-6} \cdot ||\mathbf{e}^{(0)}||$.

Esercizio 3 (5 punti) Si consideri la seguente tabella di dati sperimentali relativa ai punti $P_k = (x_k, y_k)$, $k = 1, \dots, 5$ con $y_k = f(x_k)$ per una qualche funzione incognita f

k	1	2	3	4	5
x_k	-2	-1	0	1	2
y_k	-1	0	1	1	3

(a) Calcolare il polinomio di approssimazione ai minimi quadrati di grado $n = 1$ (retta di regressione) che minimizza la somma degli scarti verticali.

(b) Calcolare il baricentro $G = (x_G, y_G)$ dei punti P_k e verificare che la retta di regressione passa per G.

(c) Applicando la formula dei trapezi composta ai dati della tabella, fornire una approssimazione dell'integrale

$$I = \int_{-2}^{2} f(x)\, dx$$