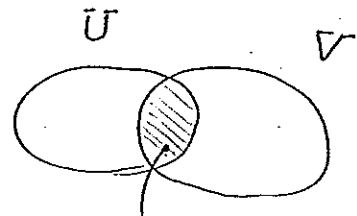


★ La successione di Mayer-Vietoris per la coomologia di de Rham

Lezione XXXVIII

consente di calcolare la coomologia di un'unione di due aperti

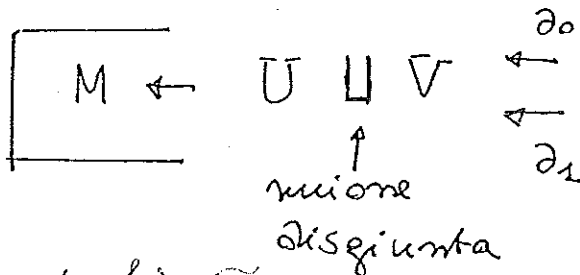
$$M = U \cup V$$



$$M = U \cup V$$

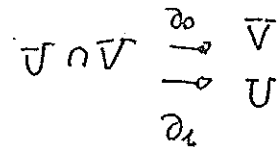
$$U \cap V$$

si ha



$$\begin{pmatrix} U \times \{0\} \cup V \times \{1\} \\ (x, 0) \quad (y, 1) \end{pmatrix}$$

di mappa di inclusione



Si applichi il functore contravariante Ω^*

(ossia, passando alle forme differenziali)

si ottiene

$$\boxed{\Omega^*(M) \rightarrow \Omega^*(U) \oplus \Omega^*(V) \begin{matrix} \xrightarrow{\partial_0^*} \\ \xrightarrow{\partial_1^*} \end{matrix} \Omega^*(U \cap V)}$$

★ in generale (restriZIONE di una forma

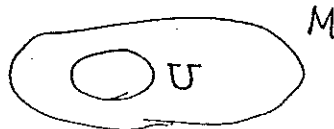
$$\omega|_U := i^* \omega$$

con $i: U \rightarrow M$

Inclusione



pull-back



esplicitamente:

$$\begin{array}{ccc} \Omega^*(M) \ni \omega & \mapsto & \omega|_U \oplus \omega|_V \in \Omega^*(U) \oplus \Omega^*(V) \\ \parallel & & \\ U \cup V & & \end{array}$$

$$\Omega^*(U) \ni \omega \xrightarrow{\partial_0^*} \omega|_V \in \Omega^*(U \cap V)$$

$$\Omega^*(V) \ni \omega \xrightarrow{\partial_1^*} \omega|_U \in \Omega^*(U \cap V)$$

Si arriva così alla

★ successione di Mayer-Vietoris

$$\begin{array}{ccccccc} \boxed{0} & \xrightarrow{\text{(inclusione)}} & \Omega^*(M) & \xrightarrow{\text{(restrictione)}} & \Omega^*(U) \oplus \Omega^*(V) & \rightarrow & \Omega^*(U \cap V) \\ & & \omega & & \omega|_U \oplus \omega|_V & & \\ & & & & (\omega, \tau) & \mapsto & \tau - \omega \\ & & & & & & (\partial_0^* - \partial_1^*) \rightarrow 0 \end{array}$$

Fatto

★ Tale successione è esatta

È sufficiente verificare l'ultimo passo, mostrando che ogni $\omega \in \Omega^q(U \cap V)$ è nell'immagine di $\partial_0^* - \partial_1^*$. Procedo

★ uso di una partizione dell'unità $\{\rho_U, \rho_V\}$

subotolimita a $\{\sigma, \sigma'\}$ (ricoprimento aperto
di $M = U \cup V$)

si ha che

$$(-\rho_V w, \rho_U w) \mapsto w \quad \cap$$

\cap

$$\Omega^*(U \cap V)$$

$$\Omega^*(U) \oplus \Omega^*(V)$$

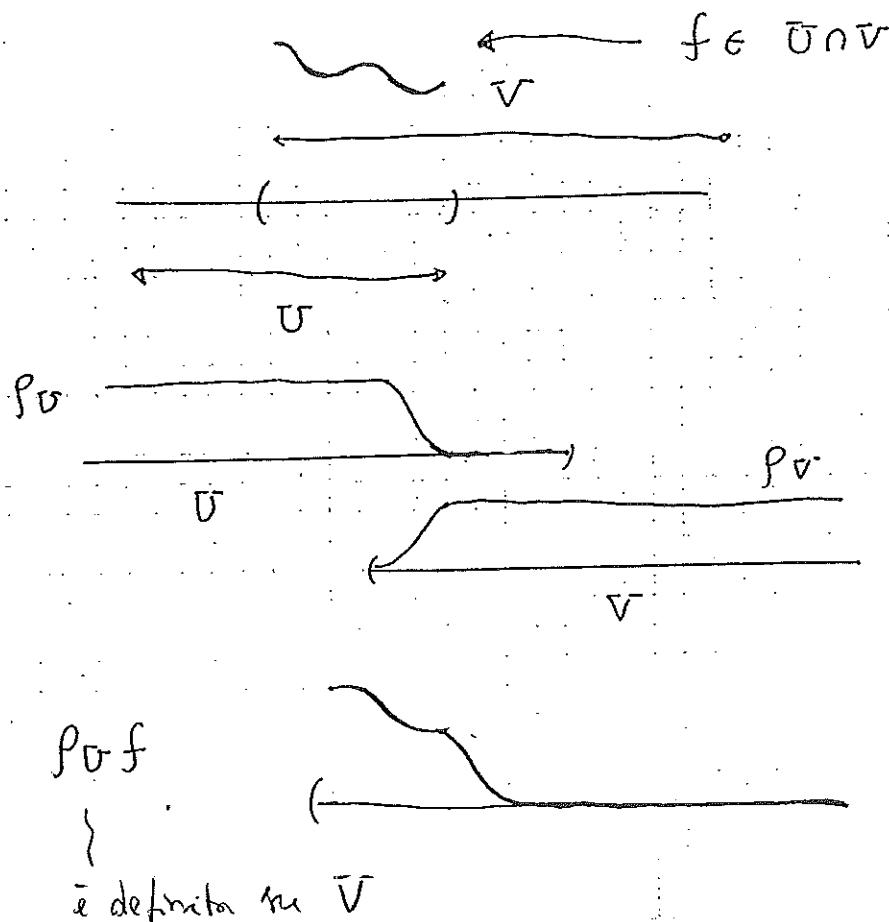
$$(\rho_U + \rho_V = 1)$$

|||

$$\begin{aligned} \star \text{ notare : } & -\rho_V w \in \Omega^*(U) \\ & \rho_U w \in \Omega^*(V) \end{aligned}$$

□

[verifichiamo il caso $M = \mathbb{R}$, $f \in \Omega^0$



]

* La successione di Mayer-Vietoris
in coomologia

Dalla successione (esatta corta)

$$0 \rightarrow \Omega^*(M) \rightarrow \Omega^*(U) \oplus \Omega^*(V) \rightarrow \Omega^*(U \cap V) \rightarrow 0$$

si deduce una successione (esatta lunga)

$$\left(\begin{array}{ccc} H^{q+1}(M) & \rightarrow & H^{q+1}(U) \oplus H^{q+1}(V) \rightarrow H^{q+1}(U \cap V) \end{array} \right)$$

d^* operatore di co bordo

$$\left(\begin{array}{ccc} H^q(M) & \rightarrow & H^q(U) \oplus H^q(V) \rightarrow H^q(U \cap V) \end{array} \right)$$

esplicitamente:

$$\begin{array}{ccccccc} & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ 0 & \rightarrow & \Omega^{q+1}(M) & \rightarrow & \Omega^{q+1}(U) \oplus \Omega^{q+1}(V) & \rightarrow & \Omega^{q+1}(U \cap V) \rightarrow 0 \\ & & \uparrow d & & \uparrow d & & \uparrow d \\ 0 & \rightarrow & \Omega^q(M) & \rightarrow & \Omega^q(U) \oplus \Omega^q(V) & \rightarrow & \Omega^q(U \cap V) \rightarrow 0 \\ & & & & \uparrow \cong & & \uparrow \omega \end{array}$$

(diagramma a righe esatte)

Sia $w \in \Omega^q(U \cap V)$ chiusa

$$dw = 0 \quad ([w] \in H^q(U \cap V))$$

richiamiamo
la procedura
descritta precedentemente

Poiché le righe sono esatte, $\exists \xi \in \Omega^q(U) \oplus \Omega^q(V)$

inviato in $\omega : \xi = (-p_V \omega, p_U \omega)$

Il diagramma è commutativo \Rightarrow

$$\left. \begin{array}{l} \star d\xi = 0 \text{ in } \Omega^{q+1}(U \cap V) \\ \hline -d(p_V \omega) = d(p_U \omega) \text{ in } U \cap V \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow d\xi$ proviene da un elemento in

$\Omega^{q+1}(M)$. Tale elemento è chiuso e

rappresenta $d^*[\omega]$. In definitiva

\star Tale costruzione è indipendente dalle varie scelte fatte $(*)$

$$d^*[\omega] = \begin{cases} [-d(p_V \omega)] & \text{in } U \\ [d(p_U \omega)] & \text{in } V \end{cases}$$

$\star\star\star$

ancor meglio: $d^*[\omega] = \begin{bmatrix} -d p_V \omega \\ d p_U \omega \end{bmatrix}$

$(*)$ "abstract nonsense"

(v. lez. prec.)

da ricordare: Poisson: una k -forma chiusa è localmente esatta (e viceversa)

commentare:

la chiusa è antiforma

ma ..

★ calcolo di $H^*(S^1)$

$$\textcircled{1} \quad H^0(S^1) = \mathbb{R}$$

$$H^1(S^1) = \mathbb{R}$$

$$\omega = f(x) dx \quad f(0) = f(2\pi)$$

$$\text{Se } \omega = dg = g'(x) dx$$

$$\int_{S^1} \omega = \int_0^{2\pi} g'(x) dx$$

$$= g(2\pi) - g(0) = 0$$

$$\Rightarrow \star \int f dx \text{ è solita} \Leftrightarrow \int_0^{2\pi} f(x) dx = 0$$

$$g(x) = \int_0^x f(\varphi) d\varphi$$

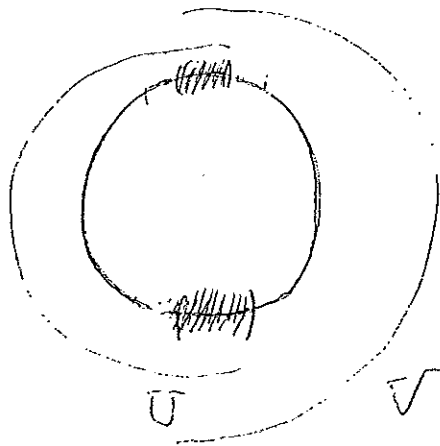
$$dg = f dg$$

★ $[dx]$ genera H^1

forma omologica

$\textcircled{2}$

Altro modo: con Mayer-Vietoris



|||| : $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$
 ☆ Sconnesso

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & S^1 & & U \amalg V & & U \cap V \\
 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 d^* \curvearrowright & H^1(S^1) & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \text{Poin Caré ...} \\
 & H^0(S^1) & \longrightarrow & \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} & \xrightarrow{\delta} & \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} & \\
 & & & (\omega, \nu) & & (\tau - \omega, \tau - \omega) &
 \end{array}$$

Onu $\text{Im } \delta = 1$

\Rightarrow Onu $\text{Ker } \delta = 1$

$\Rightarrow H^0(S^1) = \text{Ker } \delta = \mathbb{R}$

$H^1(S^1) = \text{Coker } \delta = \mathbb{R}$

$(\dots \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \xrightarrow{\delta} \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \xrightarrow{d^*} H^1(S^1) \rightarrow 0 \dots)$

equivalentemente: $H^1 = \text{Im } d^* \quad \text{Ker } d^* = \text{Im } \delta$

$\Rightarrow \chi = h^1 + 1 \quad (N+2) \quad \text{XXXVIII-7}$


$\Rightarrow h^1 = 1$

Determiniamo un rappresentante concreto
 il generatore di
 per $H^1(S^1)$

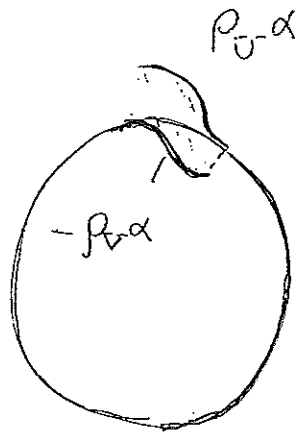
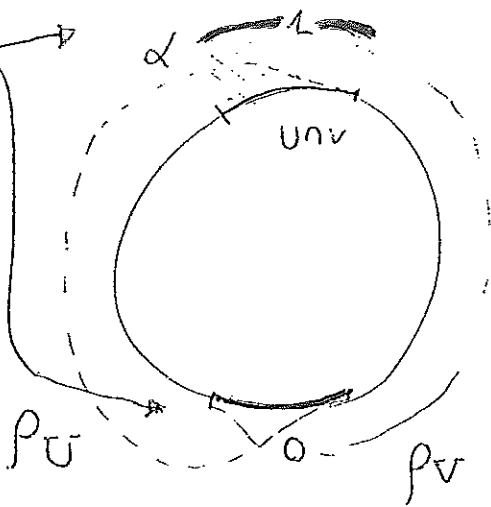
Basta a tale scopo prendere $\alpha \in \Omega^0(U \cap V)$

che non sia in $\mathcal{S} \left(\begin{smallmatrix} \alpha \\ \eta \end{smallmatrix} \right)$
 (auto. viene mappato a zero)
 $\Omega^0(U) \oplus \Omega^0(V)$
 ω chiusa

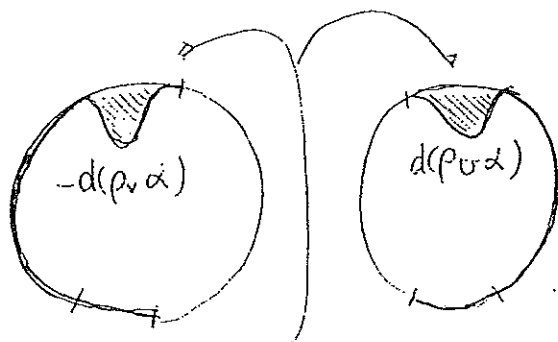
Si ricordi
 $d^*[\omega] =$
 $\begin{cases} [-d(p_U \omega)] \text{ su } U \\ [d(p_V \omega)] \text{ su } V \end{cases}$
 (informazione non felice)

$$\omega = \alpha$$


e considerare $d^* \alpha$:

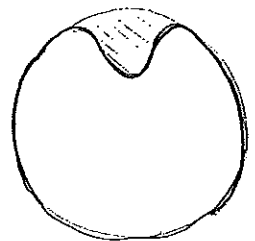


$$(-p_U \alpha, p_V \alpha) \rightarrow \alpha = (p_U + p_V) \alpha$$



$$d(p_U + p_V) \alpha = 0$$

forma globale ~ 0



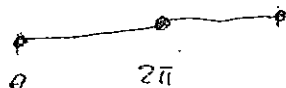
1-forma "umetta" (bump)

★ Ancora $H^2(S^1)$

③ Sia $w = a(\varphi) d\varphi$ e $\omega^2(S^1)$
($dw = 0$)

consideriamo la forma "mediata"

$$\left[\hat{w}(\varphi) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} w(\varphi + t) dt \right]$$



ora, $\hat{w} \sim w$ ★
coomologa
($\hat{w} = w + df \dots$)

Infolli $w(\varphi) \sim w(\varphi + t)$

poiché $\varphi \mapsto \varphi + t$ induce un'applicazione

da S^1 in sé omotopa all'identità ★

(Assioma di omotopia)

($\varphi \mapsto \varphi + \lambda t$)
 $\lambda \in [0, 1]$

\Rightarrow ogni somma integrale di Riemann ★
 $\hat{w} \sim w$.

★ Passando al limite si ha l'assunto
(perché? ...) (d'insieme...)

La forma \hat{w} è invariante per rotazioni

$\Rightarrow \hat{w} = k d\varphi \dots$ e $H^2(S^1) = \mathbb{R}$

L'idea qui illustrata è ampiamente
generalizzabile

Le forme invarianti permettono di calcolare
la coomologia di uno spazio simmetrico
(ciò è collegato anche al teorema di Poincaré)

Il principio di Mayer-Vietoris

(= succ. di Mayer-Vietoris + lemma di 5 v. oltre)

★ Sia $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$ ricoprimento di una varietà M , $\dim M = n$

\mathcal{U} è un buon ricoprimento se

ogni intersezione finita $U_{\alpha_1} \cap U_{\alpha_2} \cap \dots \cap U_{\alpha_p}$
è diffeomorfa a \mathbb{R}^n (equiv. compatibile)

★ Teorema: ogni M ha un buon ricoprimento \mathcal{U}
se M è compatto \mathcal{U} può essere scelto finito

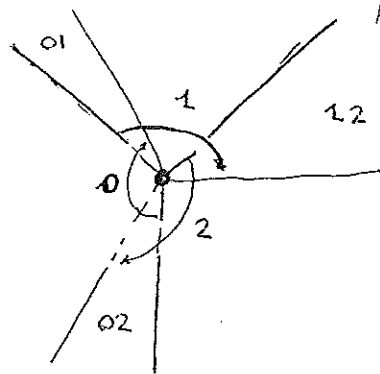
(Analogia: \mathbb{R}^n ha un buon ricoprimento finito...)

[La dimostrazione fa uso di tecniche di geometria Riemanniana] \square

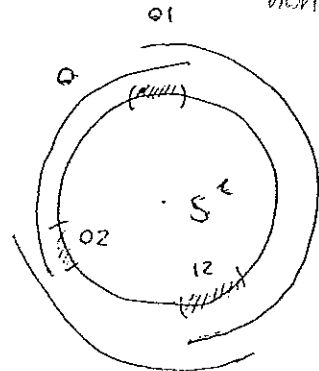
★ In generale lavoreremo con varietà orientate
un buon ricoprimento finito

★

un buon ricoprimento finito di $\mathbb{R}^2 - \{0,0\}$

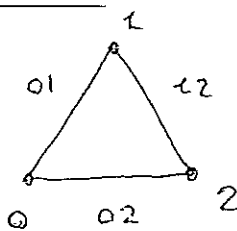


e di S^1



! quello considerato prima non ha un buon ricoprimento

"mezzo" del buon ricoprimento



Si comprende bene perché $H^*(M) = H^*(S^1)$
....

commento
★★ emerge qui l'idea fondamentale della coomologia di Čech \check{H}^* : leggere proprietà topologiche nella "combinatorica"

del buon ricoprimento.

(c'è in gioco un M.V. generalizzato...)

★ Teorema. Se M ha un buon ricoprimento finito, la sua coomologia ha dimensione finita

Dim. Dalla successione di ★ Mayer-Vietoris si ha subito: se $H^q(U), H^q(V), H^q(U \cap V)$ hanno dime. finite, lo stesso accade per $H^q(U \cup V)$:

$$\dim H^q(U \cup V) = \dim \text{Ker } \tau + \dim \text{Im } \tau$$

$$= \dim \text{Im } d^* + \dim \text{Im } \tau$$

dove:

$$\boxed{\dots \rightarrow H^{q-1}(U \cap V) \xrightarrow{d^*} H^q(U \cup V) \xrightarrow{\tau} H^q(U) \oplus H^q(V) \rightarrow \dots}$$

$\xrightarrow{\text{dim finita}}$ $\xrightarrow{\text{dim finita}}$

★ Se M è diff. a \mathbb{R}^n , ciò segue da Poincaré'.

Dall'osservazione precedente + induzione segue l'asserto.



Calcoliamo

$$H_{DR}^*(\underbrace{\mathbb{R}^2 - \{p, q\}}_M) \quad (p \neq q)$$

$$H^0 = \mathbb{R}$$

M è connesso

$$H^2 = 0$$

dim:

$$\int dx \wedge dy = \dots = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \wedge dy$$

osservazione

$$H^1(\mathbb{R}^2 - \{z\})$$

ha dim ∞

$$f(x, y) = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$$

si può scegliere $P \equiv 0$ e prendere

$$Q = \int f(x, y) dx \dots$$

* Calcoliamo $H^1 (= \mathbb{R}^2)$

Ricordiamo che * $H^1(\mathbb{R}^2 - \{P\}) \cong H^1(S^1) = \mathbb{R}$

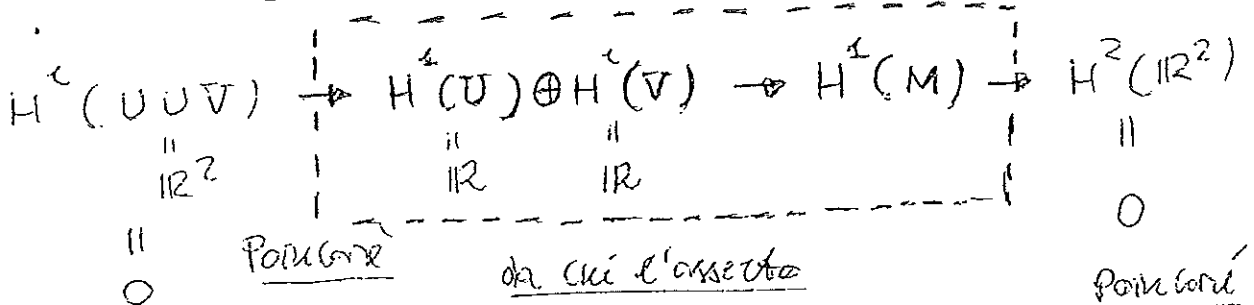
* Applichiamo M.V. con

$$M = \mathbb{R}^2 - \{p, q\} = U \cap V$$

$$U = \mathbb{R}^2 - \{p\}$$

$$V = \mathbb{R}^2 - \{q\}$$

$$U \cup V = \mathbb{R}^2$$



Rapporti potenti espliciti

(4 fluido incompressibile, irrotazionale ...
con 2 vortici, vedi sotto)

$$w_i = \frac{X_i \overset{Y_i}{dy} - Y_i \overset{X_i}{dx}}{X_i^2 + Y_i^2}$$

$$= d \arctg \frac{Y_i}{X_i}$$

$$X_i = x - x_{P_i}$$

$$Y_i = y - y_{P_i}$$

Si ricorda poi

$$\log z = \log |z| + i \arg z \dots$$

(sup. di Riemann !!!)

CR per $f \equiv \text{div } V = 0$
 $\text{curl } V = 0$
 in $\mathbb{C} - \{0\}$

Qualche dettaglio "fisico":

$$V = V_x + i V_y = \overline{f'(z)}$$

componenti
velocità

f : potenziale complesso

$$\int_{\gamma} df = \dots \Gamma$$

$$\int_{\gamma} \underline{V} \cdot d\underline{\Gamma}$$

$$= \int_{\gamma} V \cdot R \text{ (con } \Gamma \text{)} \text{ formula}$$

Per il vortice (nella origine)

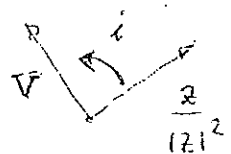
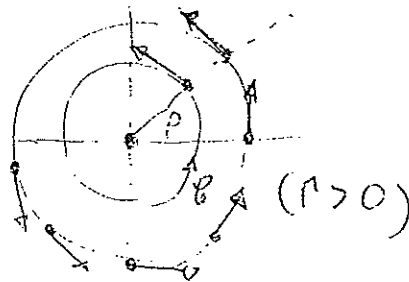
$$f(z) = \frac{\Gamma}{2\pi i} \text{Log } z$$

intensità
circolazione

$$V = \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{i}{z}$$

$$= \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{i}{|z|^2} z$$

$$V \sim \frac{1}{\rho} \text{ per } \rho \rightarrow 0$$



★

$$\text{Sia } M = \mathbb{R}^2 - \mathbb{Z}$$

Esempio
importante

• • • • •

$$\left\{ \begin{array}{l} H^0(M) = \mathbb{R} \quad (M \text{ connesso}) \\ H^1(M) = 0 \quad (M \text{ non compatto}) \quad (\text{segue dalla dualità di Poincaré}) \\ H^2(M) = \oplus \mathbb{R} \end{array} \right. \quad (\text{o anche direttamente})$$

\Rightarrow

★

M non possiede un bono ricoprimento
finito

★ altrimenti la sua coomologia
risulterebbe finito-dimensionale